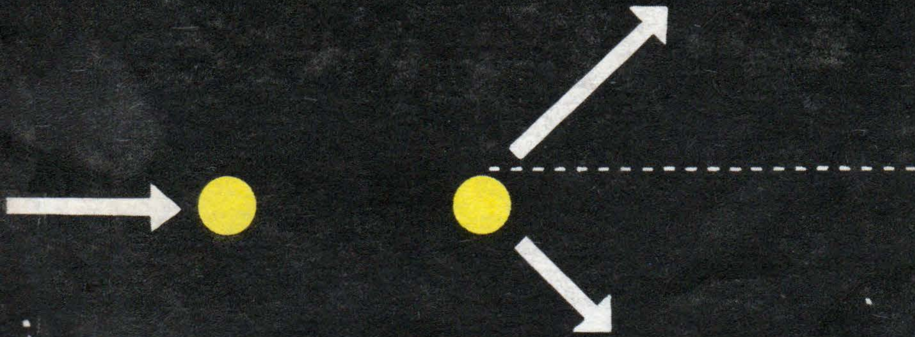
CURSUL DE FIZICĂ

BERKELEY

• VOLUMUL I •

MECANICĂ



CURSUL DE FIZICĂ

Berkeley

VOLUMUL I

MECHANICS

Berkeley Physics Course Volume 1, Second Edition

CURSUL DE FIZICĂ
BERKELEY

• VOLUMUL I •

Charles Kittel
Profesor de fizică la Universitatea
Berkeley, California

Walter D. Knight
Profesor de fizică la Universitatea
Berkeley, California

Malvin A. Ruderman
Profesor de fizică la Universitatea
New York

Revizuită de:

A. Carl Helmholz
Profesor de fizică la Universitatea
Berkeley, California

Burton J. Moyer
Decanul Colegiului de Arte Libere,
Universitatea Eugene, Oregon



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI — 1981

Traducerea: dr. **ANDREI IONESCU** (cap. 1–4)
cercetător dr. **IRINEL CAPRINI** (cap. 5–8 și cap. 9 pînă la *Orbite: ecuația și excentricitatea*)
cercetător dr. **VLADIMIR PROTOPOPESCU** (cap. 9 de la *Orbite: ecuația și excentricitatea*, cap. 10–14 și *Anexa*).

Redactor: prof. **ELISABETA MESAROȘ**
Tehnoredactor: **VIORICA CONDOPOL**
Coperta: **V. WEGEMANN**

Cuprins

Prefață la versiunea în l. română

Scrierea unui curs bun de fizică generală este astăzi o sarcină deosebit de grea. Autorii sînt confruntați cu necesitatea de a face numeroase opțiuni în materie de conținut, metodică și formă, de atitudine, atît față de progresele fizicii cît și față de cei ce se inițiază în tainele ei. O întrunire adecvată a acestor opțiuni poate avea ca rezultat un material cu valoare de referință ce se va bucura de o largă circulație. Dimpotrivă, o alegere necorespunzătoare a mijloacelor poate să îngreuneze, dacă nu să dăuneze, înțelegerii și însușirii disciplinei. La originea acestei situații se află, desigur, dezvoltarea foarte rapidă a cercetării științifice de fizică. Volumul de informații crește continuu, iar importanța relativă a multor fapte se schimbă. Aceasta creează greutăți în selectarea corectă a elementelor și noțiunilor de bază, proces care nu poate fi realizat prin simple adăugiri și eliminări, ci necesită o muncă de analiză și sinteză, de evaluare și ordonare. In același timp, ritmul rapid de acumulare face ca ceea ce astăzi este surprinzător și de avangardă, mîine să apară ca vechi și uneori depășit. Asimilarea într-un curs universitar a noutăților științifice trebuie făcută astfel încît modificările ulterioare să conserve, pe o perioadă cît mai îndelungată, structura logică și valoarea de cunoaștere a faptelor expuse. Imaginea pe care cursul sau manualul de fizică ține să o creeze în conștiința studentului este aceea a unei științe a naturii solid constituite și, totodată, orientată mereu spre progres.

Întregul proces de instruire este de fapt supus acestor exigențe, iar numeroasele căutări din întreaga lume privind organizarea și modernizarea predării fizicii reflectă tocmai conștiința că soluțiile actuale pot fi, în continuare, îmbunătățite.

Modul de organizare și orientare a procesului de învățămînt năzuiește spre formarea unor specialiști cu o gîndire sistematică și, totodată, independentă și creatoare. Se știe că învățămîntul strict expozitiv-deductiv, cu pretenția de a da enunțuri definitive unor constatări valabile în general numai pentru cazuri idealizate, determină formarea unor specialiști limitați, incapabili să vadă dincolo de litera cărții. Claritatea și logica internă a unei cărți nu este contradictorie cu deschiderea sa către faptele reale, care nu pot fi tratate în general exact, putînd fi în schimb modelate din ce în ce mai adecvat. De aceea, aprecierea valorii unui curs de fizică generală trebuie făcută nu numai din punctul de vedere al clarității faptelor prezentate ci, în egală măsură, prin deschiderea pe care o oferă înțelegerii fenomenelor complexe în interdependență.

Aplicarea cît mai eficientă a unor asemenea criterii de orientare și evaluare a materialului didactic constituie o preocupare permanentă a învățămîntului din țara noastră, angajat într-un proces de continuă perfecționare, în pas cu exigențele progresului și în acord cu condițiile deosebite create de statul nostru învățămîntului și cercetării științifice. O serie de cărți de fizică de bună calitate apărute în ultimii ani demonstrează concret rezultatele acestei preocupări. În acest sens, traducerea în limba română a cursului de fizică al Universității din Berkeley poate constitui o contribuție exemplară.

Cursul, apărut în cinci volume, conține lecțiile de fizică generală pentru studenții anilor I–II de la Universitatea Berkeley – SUA. Între autori am recunoscut cu plăcere fizicieni

ale căror înaltă competență și autoritate profesională de cercetători le-am putut aprecia din experiența contactelor și colaborării directe.

De data aceasta, specialiști ca Knight, Kittel, Pound, Purcell și alții sînt, în primul rînd, profesori. Scopul lor mărturisit este de a prezenta un ciclu de lecții care să permită atît formarea gîndirii fizice cît și însușirea noțiunilor de bază ale acestei științe. Cele cinci volume – mecanica, electricitatea, oscilații și unde, fizica cuantică, fizica statistică-nu constituie unități închise, fiind legate unele de altele prin exemple interesante care se referă la fenomene ce urmează a fi prezentate sau prin referiri la legi și noțiuni discutate anterior. Dezvoltarea cursului se face din aproape în aproape, într-o succesiune firească. Nivelul matematic este accesibil, redus la strictul necesar, în centrul atenției autorilor aflîndu-se explicația sensului fizic al fenomenelor. Se realizează astfel o tratare clară, modernă și unitară a întregului ansamblu al ideilor de bază ale fizicii.

Fiecare volum posedă un material de metodică a predării capitolului respectiv, destinat profesorului cît și unele recomandări ale autorilor către student. Prefețele volumelor dau lămuriri complete asupra conținutului și metodicii. Se scoate astfel în evidență atenția cu care aceste lucrări au fost elaborate, reprezentînd și sub acest aspect un model de lucru care poate fi studiat cu folos și la noi în țară.

Cu toate că materia prezentată în fiecare volum se propune a fi predată într-o perioadă scurtă de timp (8 – 14 săptămîni), spațiul alocat este suficient pentru ca studentul să poată efectua un studiu individual. În acest scop sînt indicate lucrări bibliografice, sînt date exerciții și probleme și sînt expuse și propuse spre efectuare o serie de experimente pentru acasă. Se încearcă și se reușește, să se aducă „acasă" fizica studiată la facultate.

Pe baza experienței dobîndite în mai mulți ani de predare, cursul a suferit modificări care i-au îmbunătățit conținutul și au permis aducerea lui la o formă cît mai adecvată, didactic și științific.

Dacă se ține seama de faptul că în cadrul programului Berkeley a fost pus la punct și un set de lucrări de laborator, se poate aprecia că acest curs este bine echilibrat, cuprinzînd atît aspectele teoretice cît și cele experimentale esențiale în predarea fizicii generale.

Sînt sigur că lucrarea va fi mult folosită de toți cei care fac primii pași în însușirea meseriei de fizician reprezentînd, alături de alte traduceri și tratate scrise de specialiști români, o carte de referință. Consider că Editura didactică și pedagogică face, prin publicarea traducerii acestui curs, un serviciu real învățămîntului de fizică, precum și învățămîntului tehnic, în general, din țara noastră.

acad. prof. **Ioan Ursu**

Cuvînt înainte

Una dintre problemele urgente ce confruntă astăzi universitățile este aceea a învățămîntului studențesc. Pe măsură ce cercetarea științifică devine din ce în ce mai importantă în facultate, un „rabat subtil la procesul de învățămînt" (pentru a-l cita pe filozoful Sidney Hook) are loc mult prea adesea. În plus, în multe domenii, conținutul și structura în schimbare a cunoștințelor ca rezultat al cercetării științifice a creat nevoia unei revizii generale. Acest fapt este desigur adevărat și pentru știința fizicii.

Este, astfel, o plăcere să contribui cu un cuvînt înainte la Cursul și Laboratorul de fizică Berkeley, care constituie o majoră îmbunătățire a programei universitare destinată a reflecta fantastica revoluție realizată în fizică în ultimii o sută de ani. Acest curs reflectă eforturile multor fizicieni care lucrează în domenii de vîrf ale cercetării și s-a bucurat de sprijinul Fundației Naționale de Știință, printr-o donație către compania Serviciile Educaționale. Cursul a fost verificat cu succes în cadrul orelor de fizică la anii mici ai Universității din California, Berkeley, pe o perioadă de cîteva semestre. Cursul reprezintă un progres educațional marcant și eu sper că va fi folosit pe scară largă.

Universitatea din California este fericită de a fi gazda grupului interuniversitar responsabil pentru elaborarea acestui nou curs și laborator și bucuroasă că un număr de studenți, de la Berkeley, s-au oferit să ajute la testarea lui. Apreciem mult sprijinul financiar al Fundației Naționale de Știință și cooperarea cu compania Serviciile Educaționale. Poate gratitudinea cea mai mare trebuie să o avem față de interesul viu manifestat pentru învățămîntul studențesc de un număr substanțial de membri ai Universității din California ce au participat la îmbunătățirea acestei programe. Tradiția savantului dascăl este veche și de onoare; munca dăruită acestui nou curs și laborator de fizică arată că tradiția mai este încă onorată la Universitatea din California.

Clark Kerr

Prefață la ediția a doua a volumului întîi

Volumul 1 al cursului de fizică de la Berkeley a fost utilizat în forma legată timp de aproape șapte ani. Acum cîțiva ani s-a considerat necesară o revizie. Pînă în acel moment, fiecare dintre noi predase acest curs la Berkeley de cîteva ori și pe baza experienței proprii precum și a discuțiilor cu colegii, atît de la Berkeley cît și de la alte instituții, am studiat și operat modificările necesare pentru a-l face mai „didactic" pentru studenții de la fizică și inginerie. Astfel s-a trecut la această revizuire.

Am încercat să păstrăm modul direct de abordare ce era caracteristic întregului curs de fizică de la Berkeley, folosirea unor exemple luate din laboratoarele de cercetare precum și prezentarea unor subiecte interesante ce fuseseră adesea considerate prea avansate pentru un curs introductiv. Am scos cîteva dintre Temele avansate din volumul 1 precum și capitolul 15 „Particulele fizicii moderne", cu credința că ele nu sînt des folosite într-un curs de acest nivel. Modificarea cea mai mare a constat în rescrierea completă a capitolului 8: „Mișcarea corpului rigid". Deși acum acest capitol are un caracter mult mai pămîntean el este mai potrivit cu nivelul studenților. Ordinea de prezentare a subiectelor a rămas aceeași cu excepția capitolelor 3 și 4 care au fost interschimbate, în speranța că o anumită familiarizare a studentului cu aplicațiile obișnuite ale legilor Newtoniene ale mișcării va pune bazele unei mai bune înțelegeri a conceptului întrucîtva mai avansat al transformărilor Galileene. În sfîrșit, deoarece studenții au întîmpinat substanțiale dificultăți cu aparatul matematic, în special cu ecuațiile diferențiale, am adăugat un număr de note matematice.

Îndrumările metodice care urmează vor detalia modul de utilizare a acestei cărți ca manual. Există încă mai mult material decît cel necesar pentru un curs de un semestru sau de un pătrar. Cel care predă trebuie să facă o alegere judicioasă a materialului pe care dorește să-l utilizeze. În ultimii ani, trecerea la Berkeley la sistemul pătrarelor a făcut, din nefericire, necesară separarea lucrărilor de laborator de materia din primul pătrar cînd se studiază mecanica. Un curs introductiv trebuie să fie legat de laborator și revederea Laboratorului de fizică Berkeley de Alan Portis și Hugh Young ne oferă lucrări de laborator valoroase pentru orice introducere în mecanică.

Am beneficiat de ajutorul și critica multor colegi. În mod special, remarcăm ajutorul d-rei Miriam Machlis în pregătirea acestei revizuiri.

A. Carl Helmholz
Burton J. Moyer

Prefaţa originală la cursul de fizică Berkeley

Acesta este un curs general de fizică de doi ani pentru studenţii ce urmează ştiinţele şi ingineria. Intenţia autorilor a fost de a prezenta elementele de fizică, pe cît posibil, în modul în care sînt folosite de către fizicienii ce lucrează pe fronturi înaintate ale domeniului lor. Ne-am gîndit să facem un manual care să scoată în evidenţă fundamentele fizicii. Obiectivele noastre particulare au fost de a introduce, în mod coerent, într-o programă elementară ideile relativităţii restrînse, fizicii cuantice şi ale fizicii statistice.

Acest curs se adresează oricărui student ce a urmat un curs de fizică în liceu. În paralel cu acest curs ar trebui urmat un curs de matematică incluzînd calculul diferenţial şi integral.

În momentul de faţă[1], în Statele Unite, se află în lucru cîteva noi cursuri universitare de fizică. Ideea de a elabora cursuri noi aparţine multor fizicieni afectaţi atît de nevoile dezvoltării ştiinţei şi ingineriei cît şi de accentul crescînd pus pe studiul ştiinţelor în şcoala generală şi în liceu. Propriul nostru curs a fost iniţiat ca urmare a discuţiei ce a avut loc la sfîrşitul anului 1961 între Philip Morrison de la Universitatea Cornell şi Charles Kittel. Am fost încurajaţi de către John Mays şi colegii săi de la Fundaţia Naţională de Ştiinţă şi de către Walter C. Michels, pe atunci preşedintele Comisiei de fizică universitară. S-a format un comitet neoficial care să îndrume elaborarea cursului în etapele iniţiale. Comitetul a fost alcătuit, la început, din Luis Alvarez, William B. Fretter, Charles Kittel, Walter D. Knight, Philip Morrison, Edward M. Purcell, Malvin A. Ruderman şi Jerrold R. Zacharias. Comitetul s-a întrunit pentru prima dată în mai 1962, la Berkeley; la acea dată, a elaborat un plan provizoriu al noului curs de fizică. Din cauza obligaţiilor unora dintre membrii iniţiali, comitetul a fost parţial reconstituit în ianuarie 1964 şi acum constă din subsemnaţii. Contribuţiile celorlalţi au fost recunoscute în prefeţele la volumele individuale.

Planul provizoriu şi ideea care a stat la baza elaborării lui au avut o puternică influenţă asupra cursului final. Planul a acoperit în întregime temele şi deprinderile care credem că ar trebui şi ar putea fi însuşite de către studenţii începători în studiul ştiinţei şi ingineriei. N-am avut niciodată intenţia să elaborăm un curs adresat numai absolvenţilor sau studenţilor avansaţi. Ne-am gîndit să prezentăm principiile fizicii din puncte de vedere noi şi unificatoare. De aceea părţi ale acestui curs pot părea aproape tot atît de noi, atît pentru cel care instruieşte cît şi pentru cel instruit. Cele cinci volume ale cursului vor include:

I Mecanica (Kittel, Knight, Ruderman)
II Electricitate şi Magnetism (Purcell)
III Unde (Crawford)
IV Fizica cuantică (Wichmann)
V Fizica statistică (Reif)

Autorii fiecărui volum au fost liberi să-şi aleagă stilul şi metoda de prezentare potrivite subiectului elaborat.

[1] în ianuarie 1965 (N.T.)

Activitatea de început la acest curs l-a condus pe Alan M. Portis să conceapă un nou laborator de fizică generală denumit acum Laboratorul de fizică Berkeley. Deoarece cursul scoate în evidență principiile fizicii, unor profesori li s-ar putea părea că el nu se ocupă îndeajuns de fizica experimentală. Laboratorul este bogat în experiențe importante și contrabalansează cursul.

În vederea apariției acestui curs, sprijinul financiar a fost dat de Fundația Națională de Știință cu un aport indirect din partea Universității din California. Fondurile au fost administrate de către compania Serviciile Educaționale, o organizație constituită pentru a administra îmbunătățirea programelor generale. Sîntem în mod special îndatorați lui Gilbert Oakley, James Aldrich și William Jones, toți de la Serviciile Educaționale, pentru sprijinul lor substanțial și binevoitor. Serviciile Educaționale au deschis la Berkeley, sub competenta direcție a d-nei Mary R. Maloney, un oficiu pentru a ajuta la dezvoltarea cursului și a laboratorului. Universitatea din California nu a avut o legătură oficială cu programul nostru dar ne-a ajutat în diferite moduri. Pentru acest ajutor dorim să mulțumim în special celor doi președinți consecutivi ai Departamentului de fizică, August C. Helmholz și Burton J. Moyer; cadrelor didactice și personalului departamentului; lui Donald Coney și multor altora din Universitate. Abraham Olshen ne-a ajutat mult în problemele inițiale de organizare.

Corecturile și sugestiile dumneavoastră vor fi întotdeauna bine primite.

Eugene D. Commins
Frank S. Crawford, Jr.
Walter D. Knight
Philip Morrison
Alan M. Portis
Edward M. Purcell
Frederick Reif
Malvin A. Ruderman
Eyvind H. Wichmann
Charles Kittel, președinte

Berkeley, California
ianuarie 1965

Îndrumări metodice

Scopul acestui volum este de a fi utilizat ca manual. Nivelul său este cel al unor studenți care au învățat și continuă învățarea analizei matematice și care au urmat un curs de fizică în liceu. La Universitatea Berkeley din California studenții de la fizică și inginerie încep analiza în primul pătrar din anul I și o continuă în paralel cu acest curs în pătrarul al doilea. Ei vor fi făcut deja calculul diferențial pînă la începutul cursului de fizică și vor ajunge la integrală cel mai tîrziu pînă la mijlocul celui de-al doilea pătrar. Asemenea programare strînsă cere o foarte bună cooperare cu cei ce predau cursul de matematică. Desigur, ei nu vor fi studiat încă ecuațiile diferențiale și astfel cîteva cunoștințe privind soluțiile unor forme simple de ecuații diferențiale au fost introduse în notele matematice de la sfîrșitul capitolelor 3 și 7. Sînt destul de puține tipuri de ecuații ce trebuie rezolvate într-un astfel de curs de mecanică și noi credem că studentul le poate învăța pe fiecare.

Profesorul va constata că lista filmelor a fost pusă în întregime la sfîrșitul cărții și nu la sfîrșitul fiecărui capitol. Scrisoarea Comisiei pentru resursele fizicii universitare constituie o listă de filme completă. Au fost evidențiate îndeosebi acelea ce par potrivite cu subiectul mecanicii. În ultimii ani s-au făcut numeroase filme. Unele dintre acestea sînt folositoare ca scurte ilustrații pentru anumite subiecte speciale; fiecare profesor le va găsi pe acelea ce îi sînt mai potrivite pentru predare.

Deși problemele introduse în această ediție sînt, în cea mai mare parte, mai ușoare decît cele pe care le-au înlocuit, n-am introdus probleme foarte simple sau probleme de simplă înlocuire în formulă. Unele dintre acestea sînt folositoare studentului pentru că îi dau o oarecare încredere în el. Noi credem că fiecare profesor poate să-și elaboreze singur asemenea probleme sau măcar să le găsească în cărți. Nu sînt doi profesori care vor voi să predea cursul de mecanică în exact același mod, și folosirea unor probleme speciale le oferă o bună ocazie de diversificare. De asemenea, acum există cîteva culegeri de probleme folositoare. Unele dintre ele, precum și alte cărți de mecanică la acest nivel, sînt prezentate în anexă.

Există desigur mai multe modalități de utilizare a cărții ca manual. Unul din modurile în care ediția întîi se pare că a fost mai rar utilizată, dar pentru care noi credem că s-ar putea găsi o bună întrebuințare întregii cărți, este folosirea sa în cadrul unui curs de mecanică ce ar urma unui an de facultate fără analiză matematică, așa cum se prezintă situația în institutele mai mici ce nu au posibilitatea ținerii și a unui curs introductiv fără analiză și a unuia cu analiză. La un asemenea curs, ce poate fi predat studenților din anii doi sau trei, poate fi acoperită întreaga carte deoarece multe subiecte vor fi fost incluse într-o formă mai puțin avansată în primul an.

Ca parte introductivă obișnuită a unui curs de fizică generală, această carte conține prea mult material, și noi îl implorăm pe profesor să se abțină de a încerca să acopere totul. Multe cursuri introductive nu includ relativitatea restrînsă, astfel încît primele nouă capitole constituie o introducere coerentă în mecanica clasică. Dar chiar și acest material, dacă cineva ar încerca să-l acopere în întregime, ar fi prea mult pentru un curs de nouă sau zece săptă-

mîni sau o fracțiune de semestru cît se acordă de obicei mecanicii. Vom da, astfel, mai jos, cîteva sugestii pentru o acoperire minimă a capitolelor. Cîteodată, nu este de dorit includerea unor probleme de electricitate sau de magnetism într-un curs de inițiere. Credem că manualul poate fi folosit în acest sens dar este totuși adevărat că mulți studenți consideră problemele de electricitate foarte interesante. Mulți profesori nu au „obrăznicia" de a reduce din material. Propria noastră experiență ne spune că este de preferat să acoperim bine un anumit material decît să predăm superficial mai mult material. Paragrafele cu un conținut mai avansat și Temele avansate ar trebui să ofere studenților buni ceva cu care să-și încerce capacitățile iar studenților care continuă fizica o lucrare de referință care să poată fi utilizată în legătură cu studiile lor ulterioare.

Cu aceste comentarii vom trece la detalierea diferitelor capitole.

Capitolul 1. Ca și în prima ediție acest capitol nu este esențial pentru studiul mecanicii dar poate constitui o lectură interesantă pentru cei cu preocupări mai largi. Pentru profesorii care vor să predea acest capitol, acum ar fi locul potrivit să ilustreze conceptul de ordin de mărime.

Capitolul 2 Vectorii îl introduc pe student într-un limbaj ce va fi foarte folositor în fizică. După cum este accentuat și în text se poate omite aici produsul vectorial precum și exemplele de forțe magnetice în care **v** și **B** nu sînt perpendiculari. Se poate ajunge pînă la capitolul 6 fără să se studieze produsul vectorial urmînd să ne întoarcem la el abia atunci. Produsul scalar este utilizat adesea pentru calcularea mărimilor din capitolul 5, privind lucrul mecanic și energia, astfel încît este de dorit să-l introducem aici. El constituie în plus un instrument pentru rezolvarea a numeroase probleme interesante. Secțiunea privind derivatele vectoriale este de asemenea utilă dar părțile care tratează vectorii unitari **r** și **θ** pot fi omise și introduse mult mai tîrziu. Sperăm ca mișcarea circulară să fie o bună introducere pentru capitolul de dinamică ce urmează.

Capitolul 3. Acesta este un capitol lung cu o mulțime de aplicații. S-au introdus legile lui Newton în forma convențională și s-a trecut la aplicații ale legii a doua. Pentru un curs mai scurt sau pentru unul ce nu include aplicațiile electrice și magnetice, paragrafele în care acestea din urmă sînt prezentate pot fi omise în întregime sau se poate trata cîmpul magnetic numai în cazul vectorilor viteză și cîmp magnetic perpendiculari. Acum se introduce, prin intermediul legii a treia a lui Newton, conservarea impulsului. În problemele de ciocnire, se fac referiri la energia cinetică deși aceasta nu este introdusă decît în capitolul 5. Mulți studenți au auzit de ea în liceu și nu întîmpină dificultăți; după dorință, ea poate fi însă și omisă.

Capitolul 4. După cum se precizează și în text acest capitol nu este de tip clasic. Mulți fizicieni sînt atrași de introducerea transformărilor galileene iar pentru cei ce vor să continue cu relativitatea restrînsă acest capitol constituie o bună introducere la transformările de coordonate. Cu toate acestea, pentru studenții nefizicieni sau pentru cei cu mai puțin timp, acesta constituie o bătaie de cap prea mare. Ar trebui făcute anumite referiri la sistemele de referință accelerate sau la forțe fictive dar acestea pot fi scoase din primele cîteva pagini.

Capitolul 5. Se introduc lucrul mecanic și energia cinetică, întîi într-o dimensiune și apoi în trei. Acum produsul scalar este cu adevărat necesar, dar se poate sări peste folosirea integralei curbilinii. Se tratează în detaliu energia potențială. Pentru un curs mai scurt, se poate omite discuția privind cîmpurile conservative, după cum se poate omite discuția privitoare la potențialul electric. Acesta este, totuși, un capitol important și n-ar trebui să trecem repede prin el.

Capitolul 6. Acest capitol tratează din nou ciocnirile și introduce sistemul de referință al centrului de masă. Centrul de masă este un concept important pentru corpurile rigide și, deși sistemul centrului de masă este utilizat pe scară largă, pentru o versiune prescurtată a cursului de mecanică se poate omite. Momentul cinetic și momentul forței cer introducerea produsului vectorial. Pînă acum studenții au atins un nivel care le permite abordarea și folosirea produsului vectorial și, dacă acesta a fost omis mai înainte, el poate fi reluat aici. Conservarea momentului cinetic este un subiect atrăgător pentru mulți studenți.

Capitolul 7. Aici ar trebui studiată întîi nota matematică dacă studenții au dificultăți cu ecuațiile diferențiale. Un corp fixat de un resort și pendulul sînt exemple imediate pentru a evidenția importanța subiectului „mișcarea oscilatorie". Într-o versiune prescurtată, paragrafele privind valoarea medie a energiei cinetice sau potențiale, mișcarea amortizată precum și oscilațiile forțate pot fi omise în întregime. Laboratorul poate da excelente exemple de astfel de tipuri de mișcare. Temele avansate privind oscilatorul anarmonic precum și oscilatorul forțat sînt interesante pentru studenții mai avansați.

Capitolul 8. Autorii consideră că o tratare introductivă a corpurilor rigide este folositoare tuturor studenților. Ideile despre momentul forței și accelerația unghiulară în jurul unei axe fixe nu sînt dificile și ele oferă studenților legătura cu lumea reală, vizibilă. Tratarea simplă a giroscopului este de asemenea folositoare; dar introducerea axelor principale, a momentelor de inerție precum și a sistemelor de coordonate în rotație ar trebui omisă în cele mai multe cursuri.

Capitolul 9. Problema forțelor centrale este foarte importantă. Anumiți profesori nu vor dori, poate, să risipească timpul pentru calcularea potențialului în interiorul și în exteriorul maselor sferice și, desigur, acest lucru poate fi omis. De asemenea, ei ar putea considera că se depune un efort prea mare pentru integrarea ecuației radiale în care caz, ar putea să o omită. Ar trebui să-i bucure Temele avansate. Se poate tăia mult din acest capitol dacă este necesar dar munca depusă pentru a-l parcurge va fi recompensată. Problema celor două corpuri precum și conceptul de masă redusă sînt folositoare dar ar putea fi de asemenea omise într-un curs prescurtat.

Capitolul 10. Acest capitol trece în revistă un număr de metode pentru determinarea vitezei luminii. Pentru un curs de mecanică, acest material nu este necesar, Noi credem că studenții vor fi interesați să-l citească, dar ar putea fi considerat ca lectură suplimentară. Urmează apoi experiența Michelson—Morley, care, într-un curs ca acesta, constituie cea mai convingătoare dovadă pentru renunțarea la transformările galileene. S-a introdus efectul Doppler deoarece pe baza lui se demonstrează că stelele îndepărtate au viteze foarte mari, iar capitolul se încheie cu un paragraf privind viteza luminii ca viteză limită pentru obiectele materiale precum și cu considerații privind eșecul formulei lui Newton pentru energia cinetică. Pentru cei care au un timp limitat pentru studiul relativității restrînse, o trecere în revistă a acestui capitol ar fi suficientă.

Capitolul 11. În acest capitol se deduc ecuațiile de transformare Lorentz care sînt apoi aplicate caracteristicilor celor mai obișnuite ale relativității restrînse, contracția lungimii și dilatarea timpului. Se introduc și se dau exemple privind transformările de viteze. Pe acest capitol se bazează capitolele următoare și în consecință ar trebui afectat destul de mult timp pentru studiul lui.

Capitolul 12. Se utilizează rezultatele din capitolul 11 pentru a arăta necesitatea unor schimbări în definirea impulsului și energiei relativiste iar în final se arată originea relației $E = mc^2$. Trebuie scoasă în evidență legătura cu experiențele cu particule de mare energie și cu experiențele din fizica nucleară a energiilor înalte. În acest stadiu studenții își dau doar

vag seama ce este, de exemplu, fizica nucleară; dar exemplele sînt atît de cunoscute publicului de astăzi încît vor fi ușor de predat. În sfîrșit, subiectul privind particulele cu masă de repaus nulă va răspunde întrebărilor multor studenți interesați.

Capitolul 13. Aici sînt tratate un număr de exemple privind subiectele dezvoltate în capitolele anterioare. Se introduce sistemul centrului de masă și se scot în evidență avantajele lui. Într-un curs prescurtat toate astea pot fi omise. Studenții buni le vor găsi însă interesante și ele pot fi date ca lecturi suplimentare în cadrul altor cursuri de fizică ce tratează relativitatea restrînsă.

Capitolul 14. În ultimii ani studiul relativității generalizate a devenit foarte popular și acest capitol poate constitui o trambulină spre studiul relativității generalizate. Desigur, nu se constituie ca un subiect central în studiul relativității restrînse, în sensul obișnuit, dar studenții vor fi interesați în studiul diferenței dintre masa inerțială și cea gravitațională iar toți vor fi auzit despre testele relativității generalizate.

Îndrumări pentru cititor

Primul an de studiu al fizicii în învățămîntul superior este de obicei cel mai dificil. În primul an sînt dezvoltate mult mai multe idei, concepte și metode decît în cursurile mai avansate ce vor urma. Studentul care va înțelege clar bazele fizicii dezvoltate în acest prim volum, chiar dacă nu va fi în stare să le aplice cu ușurință la situațiile mai complexe, a dat la o parte multe dintre dificultățile reale în învățarea fizicii.

Ce ar trebui să facă un student care are dificultăți în înțelegerea unor părți din acest curs precum și în rezolvarea problemelor, chiar dacă a citit și recitit textul? În primul rînd ar trebui să se întoarcă și să recitească părțile importante dintr-o carte de fizică de liceu. Recomandăm în special Fizica P S S C[1]. Foarte bună este și Fizica de la Harvard. Apoi ar trebui să consulte și să studieze una din multele cărți de introducere în fizică de nivel universitar. Multe dintre acestea nu folosesc calculul diferențial și integral și astfel dificultățile create de aparatul matematic vor fi minime. Exercițiile, în special exercițiile rezolvate, vor fi probabil de foarte mare ajutor. În sfîrșit, după ce va fi înțeles aceste cărți mai elementare, ar putea trece și la celelalte cărți ce sînt enumerate în anexă. Desigur, ar trebui să-și amintească că profesorii săi constituie cea mai bună sursă de răspunsuri la întrebările sale și tot ei sînt cei mai în măsură să-i clarifice neînțelegerile.

Mulți studenți au dificultăți cu matematica. În afara manualului de calcul diferențial și integral sînt folositoare și cărți mai simple. O revedere excelentă a elementelor de calcul există sub forma unui manual de autoinstruire: „Quick Calculus" (Calculul rapid), de Daniel Kleppner și Norman Ramsey (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965).

---

[1] Tradusă și în limba română sub titlul *„Fizica P S S C"* la Editura didactică și pedagogică – București, 1974, 1975.

Notații

Unități

Fiecare domeniu, din știință sau inginerie, bine constituit are unitățile sale speciale pentru mărimile ce intervin frecvent. Astfel *acrul-picior* este unitatea naturală de volum pentru un inginer de irigații, un fermier sau un procuror din vestul Statelor Unite. *MeV*-ul sau *milionul de electronvolți* este unitatea naturală de energie pentru fizicianul nuclearist; *kilocaloria* este unitatea de energie a chimistului iar *kilowattul-oră* este unitatea de energie a inginerului energetician. Fizicianul teoretician va zice pur și simplu: alegeți-vă unitățile astfel încît viteza luminii să fie egală cu unitatea. Savantul care lucrează nu pierde prea mult timp trecînd de la un sistem de unități la altul; mai mult timp cheltuiește tîrînd în calculele sale factori de 2 sau semne de plus sau de minus. Nici nu-și va bate prea mult capul cu argumente privind unitățile, deoarece nici o teorie științifică bună nu a rezultat vreodată dintr-un asemenea argument.

Fizica este concepută și publicată în mod special în sistemele de unități CGS (Gauss) și SI (sau MKS). Orice om de știință sau inginer ce dorește să aibă acces ușor la literatura de fizică va trebui să se familiarizeze cu aceste sisteme.

Textul este scris în sistemul CGS — Gauss; dar se fac un număr de referiri și la sistemul SI (Système Internationale), care pînă de curînd se mai numea și MKS sau MKSA. În problemele de mecanică, trecerea de la unitățile CGS la unitățile SI este ușoară, după cum va fi explicat în text. Totuși, cînd este vorba de probleme de electricitate sau de magnetism apar dificultăți. În text se vor da explicații despre ambele sisteme și se vor rezolva cîteva probleme în ambele sisteme. Nu este clar dacă trecerea la sistemul de unități SI care a început acum peste douăzeci de ani va continua. În literatura curentă de fizică se pare că sînt încă mai multe lucrări scrise în sistemul CGS, acesta este și motivul pentru care îl folosim în acest volum. Cu un curs ca acesta, dorim să-i fie cît se poate de ușor atît omului de știință cît și inginerului să citească revistele, în special revistele de fizică.[1]

Constante fizice

Valori aproximative ale constantelor fizice precum și mărimi numerice folositoare sînt tipărite la paginile 435, 436, 437. Valorile mai precise ale constantelor fizice sînt tabelate în E. K. Cohen și J. W. M. DuMond, Rev. Mod. Phys., *37*, 537 (1965) și B. N. Taylor, W. H. Parker și D. N. Langenberg, Rev. Mod. Phys., *41*, 375 (1969).

---

[1] În conformitate cu dispozițiile legale în Republica Socialistă România peste tot în textul versiunii românești s-a folosit SI. Desigur, s-au făcut peste tot referiri la sistemul CGS întrucît, după cum menționau mai sus și autorii acestui curs, încă peste 50% din lucrările publicate sînt scrise în CGS. (N.T.)

Semne și simboluri

Am încercat în general să aderăm la simbolurile și abrevierile ce se utilizează în literatura de fizică — și care sînt, în cea mai mare parte acceptate prin convenție internațională.

Aici, prezentăm o listă cu cîteva semne care sînt utilizate pe larg în întreaga carte:

$=$ egal cu $\approx$ aproximativ egal cu;

$\equiv$ identic cu $\sim$ același ordin de mărime cu

$\propto$ proporțional cu

Folosirea semnelor $\approx$, $\cong$, și $\sim$ nu este standardizată dar definițiile date aici sînt folosite pe scară largă de către fizicieni. Institutul American de Fizică încurajează folosirea semnului $\approx$ unde alții ar folosi fie $\approx$ fie $\cong$. (Style Manual, American Institute of Physics, rev. ed., Nov. 1970).

Semnul $\sum_{j=1}^{n}$ sau $\sum_{j}^{n}$ reprezintă suma după tot ce se află la dreapta lui $\sum$ peste toți indicii cuprinși între $j = 1$ și $j = n$. Notația $\sum_{i,j}$ reprezintă suma dublă după i și j. Notația $\sum_{i,j}'$ sau $\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}$ reprezintă suma după toate valorile lui i și j cu excepția $i = j$.

Ordinul de mărime

Prin această frază înțelegem de obicei „pînă la un factor de 10". Estimarea rapidă a ordinului de mărime al unei mărimi este caracteristică muncii fizicianului și modului său de a vorbi. Ea constituie un obicei profesional extrem de valoros, deși, adesea, îi încurcă enorm pe studenții începători. Vom spune, de exemplu, că 10^4 este ordinul de mărime al numerelor 5 500 și 25 000. În unități SI ordinul de mărime al masei electronului este 10^{-30} kg; valoarea precisă este $(0{,}910954 \pm 0{,}000005) \times 10^{-30}$ kg.

Vom spune cîteodată că o soluție include (este corectă pînă la) termeni de ordinul x^2 sau E, oricare ar fi această cantitate. Acest lucru se mai scrie ca $0(x^2)$ ori $0(E)$. Acest mod de exprimare spune că, pentru anumite scopuri, termenii soluției exacte ce conțin puteri mai mari (ca de exemplu x^3 ori E^2) ale mărimii considerate, pot fi neglijați în comparație cu termenii reținuți în soluția aproximativă.

Prefixe

Următorul tabel arată abrevierea și semnificația numerică a cîtorva prefixe utilizate frecvent:

10^{12}	T	tera-
10^{9}	G	giga-
10^{6}	M	mega-
10^{3}	k	kilo-
10^{-3}	m	mili-
10^{-6}	μ	micro-
10^{-9}	n	nano-
10^{-12}	p	pico-

Alfabetul grec

[redacted]	α	alfa
[redacted]	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
[redacted]	ϵ	epsilon
[redacted]	ζ	zeta
[redacted]	η	eta
Θ	θ	theta
[redacted]	[redacted]	iota
[redacted]	κ	kappa
Λ	λ	lambda
[redacted]	μ	miu
[redacted]	ν	niu
[redacted]	ξ	csi
[redacted]	[redacted]	omicron
Π	π	pi
[redacted]	ρ	ro
Σ	σ	sigma
[redacted]	τ	tau
[redacted]	[redacted]	iupsilon
Φ	ϕ φ	fi
[redacted]	χ	hi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

Caracterele ce nu sînt folosite frecvent sînt umbrite; cele mai multe dintre ele sînt preu apropiate în formă de caracterele latine pentru a putea fi folosite drept simboluri independente.

1

Introducere

Cuprins

LUMEA NATURALĂ

Fiecărui om natura i se pare imensă şi complexă, scena unei uimitoare diversităţi de apariţii şi evenimente. Aceste impresii sînt justificate de estimările ordinelor de mărime ale valorilor mărimilor de interes pentru studierea lumii naturale. Nu vom argumenta, în această etapă, măsurătorile ce au dus la cifrele date mai jos. Lucrul cel mai remarcabil privind aceste cifre este în primul rînd acela că le cunoaştem; este de mai mică importanţă faptul că unele dintre ele ne sînt cunoscute doar cu aproximaţie.

Universul este imens. Din observaţiile astronomice, deducem o valoare de 10^{26} metri sau 10^{10} ani lumină, pentru o dimensiune caracteristică numită cu destulă largheţe *raza* universului. Valoarea este, probabil, nesigură pînă la un factor de 3. Pentru comparaţie, distanţa de la Pămînt la Soare este $1{,}5 \times 10^{11}$ m iar raza Pămîntului este $6{,}4 \times 10^{6}$ m.

Numărul de atomi din univers este foarte mare. Se crede că numărul total de protoni şi de neutroni din univers, cu o nedeterminare de pînă la 100 de ori, este de ordinul a 10^{80}. În Soare sînt 1×10^{57} iar în Pămînt 4×10^{51}. Totalitatea celor din univers ar da deci naştere la $10^{80}/10^{57}$ (sau 10^{23}) stele egale ca masă cu masa soarelui nostru. [Pentru comparaţie, numărul de atomi dintr-un atom-gram (numărul lui Avogadro) este 6×10^{23}.] Se crede că cea mai mare parte din masa universului se află în stele, şi toate stelele cunoscute au mase cuprinse între 0,01 şi 100 de ori masa soarelui nostru.

Viaţa pare a fi cel mai complex fenomen din univers. Omul, una dintre cele mai complexe forme de viaţă, se compune din aproximativ 10^{16} celule. O celulă este o unitate fiziologică elementară ce conţine între 10^{12} şi 10^{14} atomi. Se consideră că fiecare celulă a oricărei varietăţi de materie vie conţine cel puţin o fibră moleculară lungă de ADN (acid desoxiribonucleic) sau ruda sa apropiată ARN (acid ribonucleic). Fibra de ADN din moleculă păstrează toate instrucţiunile chimice, sau informaţia genetică, necesară pentru a construi în întregime un om, o pasăre etc. Într-o moleculă de ADN, care poate fi compusă din 10^{8} pînă la 10^{10} atomi, aranjamentul precis al atomilor poate varia de la individ la individ; aranjamentul variază întotdeauna de la specie la specie[1].

Pe planeta noastră au fost descrise şi denumite mai mult de 10^{6} specii.

Materia anorganică apare de asemenea sub multe forme. Protonii, neutronii şi electronii se combină pentru a forma în jur de 100 elemente chimice diferite şi aproximativ 10^{3} izotopi identificaţi pînă azi. Elementele individuale s-au

---

[1] Termenul de specie se defineşte, aproximativ, prin aceea că două populaţii constituie specii diferite, dacă pot fi găsite între ele diferenţe morfologice şi dacă nu se încrucişează în stare naturală.

combinat în diferite proporții pentru a forma cei poate 10^6 sau mai mulți compuși chimici diferiți (identificați pînă acum), și la acest număr se poate adăuga încă un număr vast de lichide precum și de soluții solide și aliaje cu compoziții variate, avînd proprietăți fizice distincte.

Științele experimentale ne ajută să învățăm toate aceste fapte din lumea naturală, să clasificăm stelele și să estimăm masele, compozițiile, distanțele și vitezele; să clasificăm speciile vii și să dezvăluim relațiile lor genetice; să sintetizăm cristale anorganice, biochimice și noi elemente chimice; să măsurăm liniile de emisie spectrală ale atomilor și moleculelor în domeniul de frecvență de la 100 la 10^{20} Hz; să creăm în laborator noi particule fundamentale.

Aceste mari cuceriri ale științelor experimentale au fost realizate de către oameni foarte diferiți: răbdători sau perseverenți, cu intuiție sau inventivi, energici sau leneși sau norocoși sau cu vederi înguste sau cu mîini îndemînatice. Unii au preferat să folosească numai aparatură simplă; alții au inventat sau construit instrumente de mare rafinament, mărime sau complexitate. Cei mai mulți dintre aceștia au avut în comun numai cîteva lucruri: au fost onești și au efectuat realmente observațiile comunicate, publicînd rezultatele muncii lor într-o formă ce a permis și celorlalți să repete experimentul sau observația.

ROLUL TEORIEI

Descrierea pe care am făcut-o universului natural ca fiind imens și complex nu epuizează problema, pentru că înțelegerea teoretică face ca anumite părți ale imaginii despre lume să arate mult mai simplu. Avem o înțelegere remarcabilă asupra unor aspecte centrale și importante ale universului. Domeniile pe care credem că le înțelegem (rezumate mai jos), împreună cu teoria relativității și mecanica statistică, sînt printre marile realizări intelectuale ale umanității.

1. Legile mecanicii clasice și gravitației (volumul 1), care ne ajută să prezicem cu precizie remarcabilă mișcările diferitelor părți ale sistemului solar (inclusiv cometele și asteroizii), au condus la prezicerea și descoperirea de noi planete. Aceste legi sugerează mecanisme posibile pentru formarea de stele și galaxii și, împreună cu legile radiației, explică bine legătura observată între masa și luminozitatea unei stele. Aplicațiile astronomice ale legilor mecanicii clasice sînt printre cele mai frumoase dar nu și singurele care au avut succes. În mod constant, utilizăm aceste legi în viața de toate zilele precum și în științele inginerești. Aventurile noastre contemporane în spațiu, precum și utilizarea sateliților se bazează pe aplicarea rafinată a legilor mecanicii clasice și ale gravitației.

2. Legile mecanicii cuantice (volumul 4) dau o foarte bună descriere a fenomenelor atomice. Pentru atomii simpli, s-au făcut predicții care concordă cu experiența pînă la o parte în 10^5 și chiar mai bine. Cînd sînt aplicate evenimentelor la scară mare de pe pămînt sau din spațiu, legile mecanicii cuantice dau preziceri care nu se disting de cele obținute cu legile mecanicii clasice. Mecanica cuantică ne oferă, în principiu, o bază teoretică precisă pentru întreaga chimie și metalurgie

şi pentru o bună parte din fizică, dar, cel mai adesea, nu putem manevra ecuaţiile sale cu calculatoarele actuale sau chiar viitoare. În anumite domenii, aproape toate problemele par prea dificile pentru a putea fi atacate direct, teoretic, pe baza primelor principii.

3. Legile electrodinamicii clasice, care descriu excelent toate efectele electrice şi magnetice, cu excepţia celor la scară atomică, constituie baza electrotehnicii şi a industriei comunicaţiilor. Efectele electrice şi magnetice la scară atomică sînt descrise corect de teoria electrodinamicii cuantice. Electrodinamica clasică constituie subiectul volumelor 2 şi 3; anumite aspecte ale electrodinamicii cuantice sînt atinse în volumul 4, dar o discuţie completă a acestui domeniu trebuie amînată pentru un curs ulterior.

4. La alt nivel, mai restrîns, au fost înţelese principiile de operare ale codului genetic — în particular, mecanismul de stocare a informaţiei genetice. S-a aflat că capacitatea de stocare a informaţiei într-o celulă a unui organism simplu o depăşeşte pe cea a celor mai bune calculatoare aflate azi în comerţ. Pentru aproape toată viaţa de pe planeta noastră, codificarea completă a informaţiei genetice este făcută de molecula de ADN cu ajutorul unei secvenţe liniare duble (posedînd 10^6 pînă la 10^9 intrări, după organism) a numai patru grupuri moleculare diferite, avînd reguli specifice dar simple ce guvernează împerecherea în secvenţa dublă a membrilor opuşi (vezi fig. 1.1). Aceste lucruri constituie o parte din biologia moleculară.

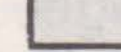


FIG. 1.1.(*a*) **Reprezentarea schematică a celor patru baze azotate care intră în alcătuirea moleculei de ADN.**

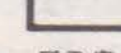


FIG. 1.1. (*b*) Bazele azotate sînt legate de grupările de zaharide S, prin legături fosfatice P formînd astfel un lanţ.

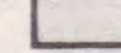


FIG. 1.1. (*c*) Molecula completă de ADN se compune dintr-un lanţ dublu în formă de elice. Cele două catene sînt legate prin punţi de hidrogen între grupurile de adenină şi timină şi respectiv între grupurile de guanină şi citozină.

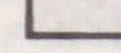


FIG. 1.1. (*d*) Întreaga informaţie genetică din celulă este conţinută în ordinea de apariţie a nucleotidelor.

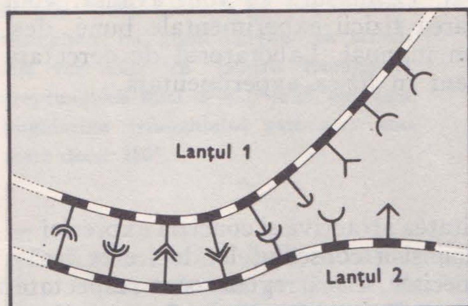


FIG. 1.1. (*e*) Cînd celula se reproduce, fiecare moleculă de ADN se desface în două lanţuri separate.

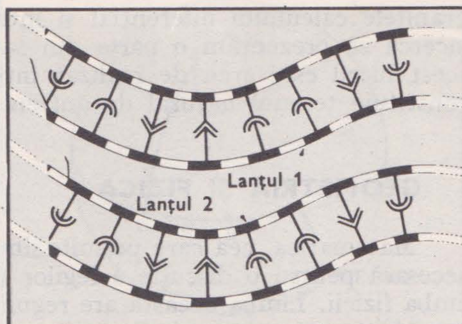


FIG. 1.1. (*f*) Fiecare lanţ îşi formează apoi complementul său din materialul celular existent, pentru a produce două noi molecule *identice* de ADN.

Legile fizicii şi înţelegerea teoretică, menţionate în rezumatul de mai sus, diferă ca formă de rezultatele directe ale observaţiilor experimentale. Legile, ce rezumă părţile esenţiale dintr-un număr mare de observaţii, ne ajută să facem cu succes anumite tipuri de preziceri, limitate în practică de complexitatea sistemului. Ele sugerează adesea tipuri noi şi neobişnuite de experienţe. Deşi legile pot fi puse, de obicei, într-o formă compactă[1], aplicarea lor cere uneori analiză şi calcul matematic laborios.

Există şi un alt aspect al legilor fundamentale ale fizicii. Acele legi ale fizicii pe care am reuşit să le înţelegem, au o frumuseţe şi o simplitate care ne atrag.[2] Aceasta nu înseamnă că lumea va trebui să nu mai facă experienţe numai fiindcă legile fizicii au fost, în general, descoperite după experimentări făcute cu ingeniozitate şi sacrificii. Afirmaţia spune că am fi doar puternic surprinşi ca viitoarele principii ale teoriei fizicii să aibă o formă neplăcută sau stîngace. Calitatea estetică a legilor fizicii descoperite pînă acum colorează speranţele noastre, pentru legile încă necunoscute. Tindem să denumim o ipoteză ca atractivă atunci cînd simplitatea şi eleganţa o singularizează dintr-un număr larg de teorii posibile.

În acest curs, vom face efortul să enunţăm unele dintre legile fizicii în aşa fel încît să fie scoase în evidenţă trăsături ca simplitatea şi eleganţa. Aceasta înseamnă că vom utiliza destul de mult formularea matematică, deşi la acest nivel al cursului utilizarea matematicii nu va depăşi în mod normal

---

[1] Prima frază dintr-o carte subţirică spune: „Aceste lecţii vor acoperi toată fizica" R. Feynman, „Teoria proceselor fundamentale" (Theory of Fundamental Processes) W. A Benjamin, Inc., New York, 1961.

[2] „Se pare că cel ce lucrează pentru obţinerea unor ecuaţii frumoase şi are o intuiţie sănătoasă, se va afla cu siguranţă pe linia progresului" P. A. M. Dirac, Scientific American, *208* (5): 45—53 (1963). Dar mulţi fizicieni consideră că lumea reală este prea subtilă pentru un atac atît de îndrăzneţ, exceptînd marile minţi ale timpului ca Einstein sau Dirac sau poate încă o duzină. În miinile altora o mie, această abordare a fost limitată de o distribuţie inegală printre oameni a „intuiţiei sănătoase".

granițele calculului diferențial și integral. Pe măsură ce vom avansa, vom încerca să prezentăm o parte din savoarea fizicii experimentale bune, deși acest lucru este greu de realizat într-un manual. Laboratorul de cercetare constituie terenul natural de antrenament în fizica experimentală.

GEOMETRIA ȘI FIZICA

Matematica, cea care permite simplitatea atractivă și concizia expresiei — necesară pentru o discuție a legilor fizicii și a consecințelor lor, este însăși limba fizicii. Limba aceasta are reguli speciale. Dacă regulile sînt respectate, atunci se pot face numai afirmații corecte: rădăcina pătrată din 2 este 1,414..., sau $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Trebuie să fim atenți să nu confundăm asemenea adevăruri cu afirmațiile exacte privind lumea fizică. Este o problemă de experiență, mai de grabă decît de contemplație, de a vedea dacă raportul dintre circumferința unui cerc real și diametrul său este într-adevăr 3,14159 ... Măsurătoarea geometrică este esențială pentru fizică, și trebuie să ne decidem asupra anumitor chestiuni, înaintea trecerii la utilizarea geometriei euclidiene ori a oricărei alte geometrii pentru descrierea naturii. Cu siguranță că există o întrebare privind universul: putem admite pentru măsurătorile fizice adevărul axiomelor și teoremelor lui Euclid?

Putem spune doar cîteva lucruri simple, despre proprietățile spațiului care rezultă din experiență, înainte de a intra în dificultăți matematice. Cea mai faimoasă teoremă existentă în toate matematicile este cea atribuită lui Pitagora: într-un triunghi dreptunghic pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor celor două catete (fig. 1.2). Acest adevăr matematic, care presupune validitatea geometriei euclidiene, este el de asemenea adevărat și în lumea fizică? Ar putea fi și altfel? Simpla contemplare a problemei nu este suficientă; trebuie să apelăm la experiență pentru a găsi răspunsul. Întrucît nu putem folosi aici matematica spațiului curb tridimensional, vom oferi argumente care sînt întrucîtva incomplete.

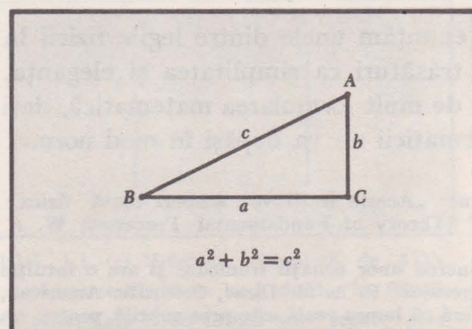


FIG. 1.2. Descriu axiomele geometriei euclidiene, din care derivă logic teorema lui Pitagora, cu precizie, lumea fizică? Numai experiența poate decide.

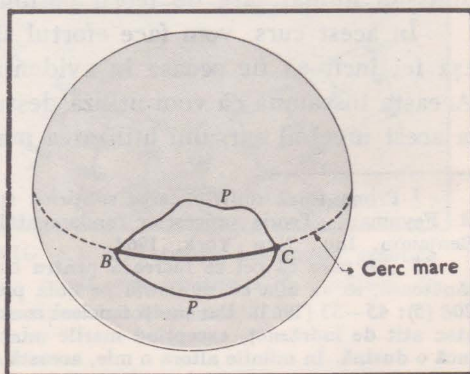
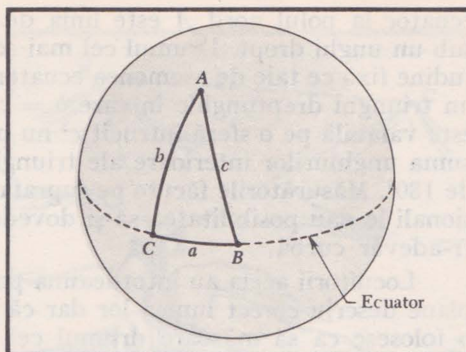


FIG. 1.3. Distanța cea mai scurtă, „linia dreaptă" dintre punctele B și C de pe o sferă, este de-a lungul unui cerc mare ce trece prin aceste puncte și nu de-a lungul oricărei alte traiectorii P.

FIG. 1.4. Fiind date trei puncte A,B,C, ființele bidimensionale își pot construi triunghiuri cu „linii drepte" ca laturi. Ele vor găsi că pentru triunghiuri dreptunghice mici $a^2 + b^2 \approx c^2$, iar suma unghiurilor triunghiului este ușor mai mare decît 180°.



Să considerăm întîi situația unor ființe bidimensionale ce trăiesc într-un univers așezat pe suprafața unei sfere. Matematicienii lor, le-au descris proprietățile spațiilor cu trei sau chiar cu mai multe dimensiuni, dar ei au tot atîtea dificultăți în formarea unei înțelegeri intuitive a acestor lucruri precum avem și noi în reprezentarea spațiului cu patru dimensiuni. Cum ar putea ei să determine dacă trăiesc sau nu pe o suprafață curbă? O cale ar fi aceea de a testa axiomele geometriei plane încercînd să confirme experimental cîteva dintre teoremele lui Euclid. Ei pot construi o linie dreaptă ca drumul cel mai scurt între două puncte B și C pe suprafața unei sfere; vom denumi acest drum un cerc mare, ca în figura 1.3. Ei pot continua cu construirea de triunghiuri și cu testarea teoremei lui Pitagora. Pentru un triunghi foarte mic, ale cărui laturi sînt toate mici în comparație cu raza sferei, teorema va fi verificată cu mare dar nu totală precizie; pentru triunghiuri mari vor apărea abateri importante (vezi fig. 1.4—1.6).

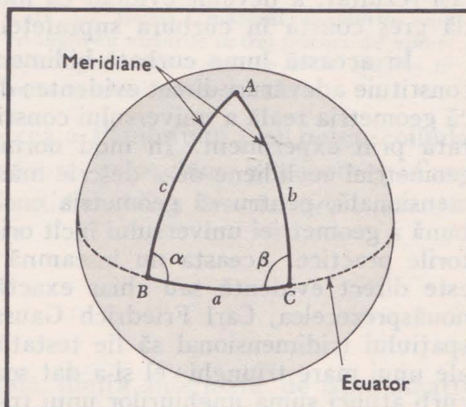


FIG. 1.5. Dacă ar folosi triunghiuri mai mari, suma unghiurilor ar deveni considerabil mai mare decît 180°. Aici, cu B și C pe ecuator, iar A la pol, α și β sînt amîndouă unghiuri drepte. Evident că $a^2 + b^2 \neq c^2$, deoarece b este egal cu c.

Dacă B și C sînt puncte de pe ecuatorul sferei, „linia dreaptă" care le unește este porțiunea BC din ecuator. Drumul cel mai scurt de la C de pe

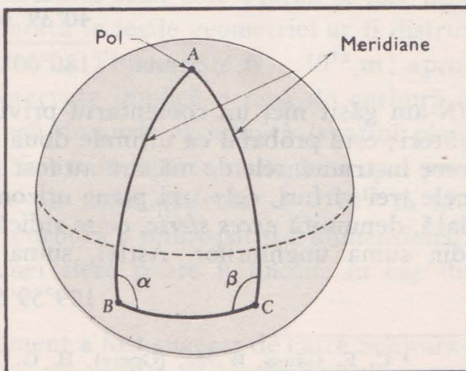


FIG. 1.6. Pentru acest triunghi cu B și C mai jos de ecuator $\alpha + \beta > 180°$, lucru care se poate întîmpla numai pentru că „spațiul" bidimensional al suprafeței sferice este curb. Un argument similar poate fi aplicat spațiului tridimensional. Raza de curbură a spațiului bidimensional prezentat aici este tocmai raza sferei.

ecuator la polul nord A este linia de longitudine fixă ce taie ecuatorul BC sub un unghi drept. Drumul cel mai scurt de la A la B este drumul de longitudine fixă ce taie de asemenea ecuatorul BC sub un unghi drept. Avem acum un triunghi dreptunghic în care $b = c$. Este clar că teorema lui Pitagora nu este valabilă pe o sferă întrucît c^2 nu poate fi acum egal cu $b^2 + a^2$; mai mult suma unghiurilor interioare ale triunghiului ABC este întotdeauna mai mare de 180°. Măsurătorile făcute pe suprafața curbă de către locuitorii săi bidimensionali le dau posibilitatea să-și dovedească pentru sine că suprafața este într-adevăr curbă.

Locuitorii aceia au întotdeauna posibilitatea să spună că legile geometriei plane descriu corect lumea lor dar că necazul ar proveni de la rigla pe care o folosesc ca să măsoare drumul cel mai scurt și să definească astfel linia dreaptă. Ei ar spune că rigla nu are o lungime constantă ci că s-ar lungi sau scurta după cum ar fi mutată în diferite locuri de pe suprafață. Numai după ce s-a văzut prin măsurători continue în diferite moduri că se ajunge la același rezultat, a devenit evident că motivul pentru care geometria euclidiană dă greș constă în curbura suprafeței.

În această lume curbată-bidimensională, axiomele geometriei plane nu constituie adevăruri direct evidente; de fapt ele nici nu sînt adevăruri. Vedem că geometria reală a universului constituie o ramură a fizicii ce trebuie explorată prin experiment. În mod normal, noi nu punem la îndoială dreptul geometriei euclidiene de a descrie măsurătorile făcute în lumea noastră tridimensională, pentru că geometria euclidiană constituie o aproximație atît de bună a geometriei universului încît orice abatere de la ea nu apare în măsurătorile practice. Aceasta nu înseamnă că aplicabilitatea geometriei euclidiene este direct evidentă sau chiar exactă. Marele matematician al secolului al nouăsprezecelea, Carl Friedrich Gauss, a sugerat ca netezimea euclidiană a spațiului tridimensional să fie testată prin măsurarea unghiurilor interioare ale unui mare triunghi; el și-a dat seama că dacă spațiul tridimensional este curb atunci suma unghiurilor unui triunghi suficient de mare ar trebui să fie în mod semnificativ diferită de 180°.

Gauss[1] a folosit echipament topometric (1821—1823) pentru a măsura cu exactitate triunghiul format în Germania de piscurile Brocken, Hohehagen și Inselberg (fig. 1.7). Latura cea mai lungă a triunghiului era de aproape 100 km. Unghiurile interioare măsurate erau

	86°13′58,366″
	53° 6′45,642″
	40°39′30,165″
Suma	180°00′14,173″

(N-am găsit nici un comentariu privind eroarea care a afectat aceste măsurători; este probabil ca ultimele două zecimale să nu fie semnificative.) Deoarece instrumentele de măsură au fost fixate la orizontala locului în fiecare din cele trei vîrfuri, cele trei plane orizontale nu erau paralele. O corecție calculată, denumită *exces sferic*, ce se ridică pînă la 14,853″ de arc, trebuie scăzută din suma unghiurilor. Astfel, suma corectă este,

179°59′59,320″

[1] C. F. Gauss, *Werke*, (Opere), B. G. Teubner, Leipzig, 1903; vezi în special paginile 299, 300, 314 și 319. Operele complete ale lui Gauss constituie un exemplu remarcabil a ceea ce poate realiza, un om înzestrat, în întreaga sa viață.

diferind doar cu 0,680'' de arc de 180°. Gauss a considerat că aceasta se încadrează în limita erorilor experimentale, și a tras concluzia că spațiul este euclidian în limita preciziei cu care au fost făcute aceste măsurători.

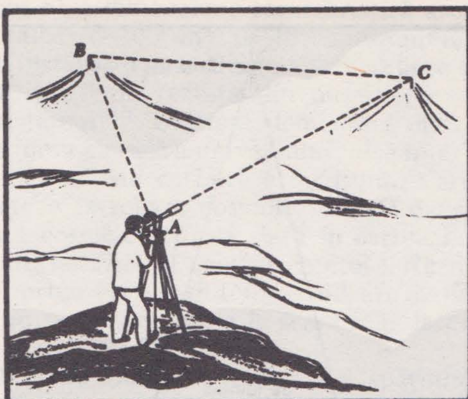


FIG. 1.7. Gauss a măsurat unghiurile unui triunghi cu vîrfurile în trei piscuri de munte și n-a găsit nici o abatere de la 180° în limita preciziei măsurătorilor.

Am văzut, în exemplul anterior, că geometria euclidiană descrie corect un mic triunghi de pe o sferă bidimensională dar deosebirile devin mai evidente pe măsură ce crește scara. Pentru a vedea dacă spațiul nostru este plat cu adevărat, trebuie să măsurăm triunghiuri foarte mari ale căror vîrfuri să fie formate de Pămînt și stele depărtate sau chiar galaxii. Dar apare o problemă: poziția noastră este fixată de cea a Pămîntului și nu putem colinda liber prin spațiu cu instrumentele de măsurat triunghiuri astronomice. Cum am putea oare testa dreptul geometriei euclidiene de a descrie corect măsurătorile făcute în spațiu?

Estimări ale curburii spațiului

Predicții asupra planetelor. O primă limită inferioară de aproximativ 5×10^{15} m, pentru raza de curbură a universului nostru, este implicată de corectitudinea observațiilor astronomice din cadrul sistemului solar. De exemplu, pozițiile planetelor Neptun și Pluton au fost obținute prin calcul, mai înainte de confirmările vizuale, prin observații cu telescopul. Descoperirea lui Neptun și a lui Pluton, foarte aproape de pozițiile calculate pentru ele, s-a făcut pe baza micilor perturbații ale orbitelor planetelor deja cunoscute. Cea mai îndepărtată planetă din sistemul solar este Pluton și este ușor de imaginat că doar o mică eroare strecurată în legile geometriei ar fi distrus această coincidență. Raza medie a orbitei lui Pluton este 6×10^{12} m; apropierea dintre pozițiile prezise și cele observate implică o rază de curbură a spațiului de cel puțin 5×10^{15} m. O rază de curbură infinită (spațiul plat) n-ar fi incompatibilă cu datele noastre. Ne-am îndepărta mult de scopul propus, dacă am discuta detaliile numerice ale estimării celor 5×10^{15} m sau dacă definim precis ce înseamnă raza de curbură a unui spațiu tridimensional. Analogul bidimensional al suprafeței unei sfere poate fi folosit, în caz de necesitate, ca un paliativ util.

Paralaxa trigonometrică. Un alt argument a fost sugerat de către Schwarzschild[1]. Între două observații făcute la un interval de timp de 6 luni, poziția

[1] K. Schwarzschild, *Vierteljahrsschrift der astronomischen* Ges., 35 :337 (1900).

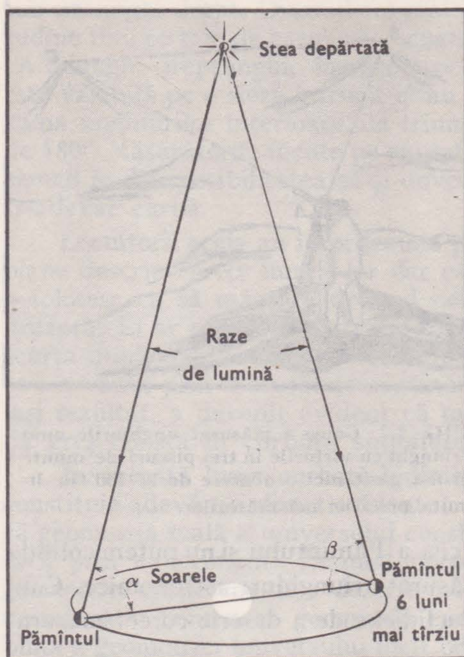


FIG. 1.8. Demonstrația lui Schwarzschild că pe o suprafață plană $\alpha + \beta < 180°$. *Paralaxa* unei stele este definită ca $\frac{1}{2}(180° - \alpha - \beta)$.

Pămîntului relativă la Soare s-a schimbat cu 3×10^{11} m — diametrul orbitei Pămîntului. Să presupunem că, în aceste două momente, observăm o stea și măsurăm unghiurile α și β așa ca în figura 1.8. (Aici α și β sînt literele grecești alfa și beta.) Dacă spațiul este plat, suma unghiurilor $\alpha + \beta$ este întotdeauna mai mică decît 180° dar se apropie de această valoare pe măsură ce distanța pînă la stea se apropie de infinit. Se numește *paralaxă*, jumătate din diferența dintre $\alpha + \beta$ și 180°. Dar într-un spațiu curb nu este cu necesitate adevărat ca $\alpha + \beta$ să fie întotdeauna mai mică decît 180°. Un astfel de exemplu este arătat în figura 1.6.

Să ne întoarcem la situația ipotetică a astronomilor bidimensionali care trăiesc pe suprafața unei sfere, pentru a vedea cum descoperă ei din măsurători ale lui $\alpha + \beta$ că spațiul lor este curb. Din discuția noastră anterioară asupra triunghiului *ABC*, vedem că atunci cînd steaua este la o depărtare de un sfert de circumferință suma $\alpha + \beta = 180°$; cînd steaua este mai apropiată $\alpha + \beta < 180°$; iar cînd steaua este mai îndepărtată, $\alpha + \beta > 180°$. Astronomul trebuie doar să privească stele din ce în ce mai îndepărtate și să urmărească momentul cînd suma începe să depășească 180°. Același argument este valabil și în cadrul spațiului nostru tridimensional.

Nu există pînă acum nici o evidență că suma $\alpha + \beta$ măsurată de astronomi ar fi fost mai mare de 180°, după ce au fost făcute corecțiile ce se impuneau pentru mișcarea Soarelui în raport cu centrul galaxiei noastre. Valori ale lui $\alpha + \beta$ mai mici de 180° sînt folosite pentru determinarea prin triangulație a distanțelor pînă la stelele apropiate. Valori mai mici de 180° pot fi observate pînă la aproape 3×10^{18} m[1], corespunzînd unghiului limită măsurabil cu telescoapele actuale. Din acest argument, nu se poate deduce direct că raza de curbură a spațiului trebuie să fie mai mare decît 3×10^{18} m; pentru anumite tipuri de spații curbe, este nevoie și de alte argumente. Răspunsul final este că raza de curbură (determinată prin triangulație) trebuie să fie mai mare de 6×10^{17} m.

[1] Se poate obiecta că măsurătorile de distanță, ele însele, presupun aplicarea geometriei euclidiene. Totuși, există și alte metode de măsurare a distanțelor și ele sînt prezentate în tratatele moderne de astronomie.

La începutul acestui capitol, am spus că o dimensiune caracteristică asociată universului se consideră a avea valoarea 10^{26} m sau 10^{10} ani-lumină. Acest număr corespunde, de exemplu, cu distanța pe care lumina ar parcurge-o într-un timp egal cu vîrsta universului, așa cum rezultă din observații ce ne-ar lua prea mult spațiu ca să le prezentăm aici[1]. Cea mai elementară interpretare a acestei mărimi este de a o considera ca rază a universului; altă interpretare posibilă este de a o considera ca rază de curbură a spațiului. Care dintre ele este cea corectă? Aceasta este o întrebare cosmologică. (O excelentă introducere în știința speculativă a cosmologiei este dată în cartea lui Bondi, citată la lecturile suplimentare de la sfîrșitul acestui capitol.) Rezumăm părerea noastră privind raza de curbură a spațiului, făcînd afirmația că ea nu este mai mică de 10^{26} m și că nu cunoaștem dacă la scară mai largă spațiul are sau nu curbură.

Observațiile precedente se referă la raza medie de curbură a spațiului și nu sînt sensibile la convexitățile ce se crede că ar exista în imediata vecinătate a stelelor și care ar produce denivelări locale ale spațiului plat sau ușor curbat. Date experimentale care să susțină această afirmație sînt foarte greu de găsit, chiar și în vecinătatea Soarelui nostru. Printr-o atentă și dificilă observație făcută, asupra stelelor vizibile la marginea Soarelui, în timpul eclipselor solare, s-a stabilit că razele de lumină sînt ușor curbate cînd trec pe lîngă marginea Soarelui și, prin extensie, prin apropierea oricărei alte stele

FIG. 1.9. O fotografie a coroanei solare în infraroșul apropiat, la 7 martie 1970; pe eclipsa de soare s-a înregistrat imaginea stelei *M* de magnitudine patru, ∅ Acquarii (un pic deasupra și la dreapta lui *S*), cam la 11 raze solare de soare. Semicercurile de sus și de jos sînt urmele plăcii de presare. În interiorul discului întunecat se află fotografia eclipsei făcută de Gordon Newkirk, care a fost folosită pentru orientarea acestei fotografii.

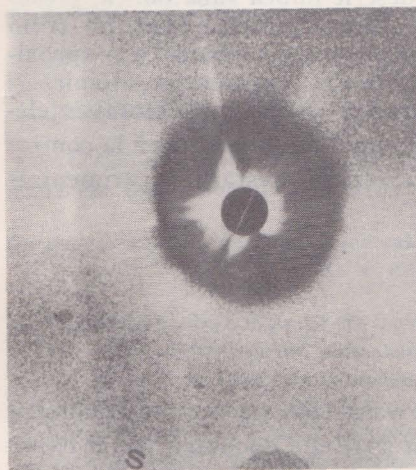
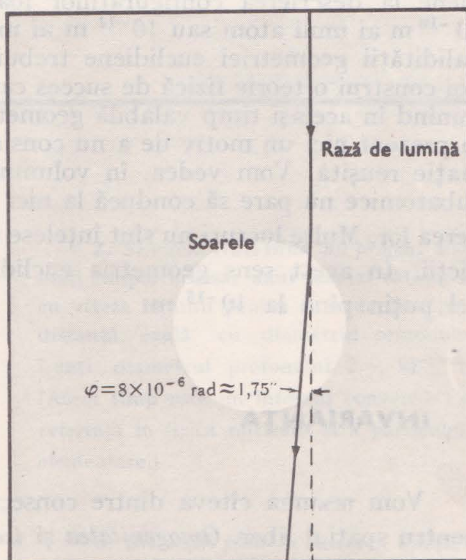


FIG. 1.10. Curbarea luminii de către soare a fost prezisă de Einstein în 1915 și verificată prin observație imediat după aceea.



[1] Un astfel de argument este prezentat în Capitolul 10 (pag. 340)

similare (vezi fig. 1.9 și 1.10). Pentru o rază tangentă, unghiul de îndoire este foarte mic, mergînd pînă la 1,75''. Astfel, pe măsură ce Soarele traversează bolta, dacă am putea să le vedem în timpul zilei, stelele aproape eclipsate, ar părea că se deplasează un pic de la pozițiile lor normale. Această observație spune doar că lumina se deplasează pe o traiectorie curbă în apropierea Soarelui; nu justifică prin ea însăși unica interpretare a spațiului curb din apropierea Soarelui. Numai prin măsurători precise făcute, din apropierea Soarelui, cu variate instrumente de măsură, am putea stabili direct dacă un spațiu curb reprezintă descrierea cea mai naturală și eficientă. Posibilitatea existenței spațiului curb este dată și de un alt tip de observații. Orbita lui Mercur, planeta cea mai apropiată de Soare diferă foarte puțin de cea prezisă prin aplicarea legilor lui Newton ale mișcării și gravitației universale. (vezi fig. 14.9). Ar putea fi această slabă abatere un efect al curbării spațiului din jurul Soarelui? Pentru a răspunde la această întrebare ar trebui să știm cum ar putea afecta o posibilă curbură ecuațiile de mișcare pentru Mercur. și acest lucru presupune mai mult decît simplă geometrie. [Aceste subiecte sînt discutate mai tîrziu (dar pe scurt) în capitolul 14.]

Într-o remarcabilă și frumoasă serie de lucrări, Einstein, [A. Einstein, Berl. Ber., 778, 799, 844 (1915); Ann.d. Phys. *49*: 769 (1916)] a descris o teorie a gravitației și geometriei, teoria generalizată a relativității, care a prezis, în concordanță cantitativă cu observațiile, tocmai cele două efecte descrise mai sus. Sînt încă puține confirmări ale prezicerilor geometrice ale teoriei. Totuși, în ciuda slabei evidențe, simplitatea esențială a teoriei generalizate a făcut-o să fie larg acceptată, deși în ultimii ani s-au făcut cercetări considerabile în acest domeniu (vezi cap. 14).

Geometria la scară mică. Din măsurătorile astronomice tragem concluzia că geometria euclidiană ne dă o extraordinar de bună descriere a măsurătorilor de lungimi, arii, unghiuri, cel puțin pînă ce atingem lungimi enorme de 10^{26} m. Dar pînă acum, nu s-a spus nimic despre folosirea geometriei euclidiene la descrierea configurațiilor foarte mici, comparabile în mărime cu 10^{-10} m ai unui atom sau 10^{-14} m ai unui nucleu. În cele din urmă, problema validității geometriei euclidiene trebuie formulată în felul următor: putem noi construi o teorie fizică de succes care să descrie lumea subatomică, presupunînd în același timp valabilă geometria euclidiană? Dacă putem, nu avem în prezent nici un motiv de a nu considera geometria euclidiană ca o aproximație reușită. Vom vedea, în volumul 4, că teoria fenomenelor atomice și subatomice nu pare să conducă la nici un paradox care să ne fi blocat înțelegerea lor. Multe lucruri nu sînt înțelese dar nici unul nu pare să ducă la contradicții. În acest sens geometria euclidiană a rezistat testării experimentale cel puțin pînă la 10^{-15} m.

INVARIANȚA

Vom rezuma cîteva dintre consecințele validității geometriei euclidiene pentru spațiul liber. *Omogenitatea* și *izotropia* spațiului euclidian pot fi exprimate prin două principii de invarianță, care, la rîndul lor, implică două principii fundamentale de conservare.

Invarianța la translații. Prin acest principiu înțelegem că spațiul este omogen, cu alte cuvinte că nu diferă de la un punct la altul. Dacă se mută o figură fără rotație dintr-un loc într-altul atunci nu apare nici o schimbare în mărimea sau proprietățile ei geometrice. De asemenea, vom presupune că proprietățile fizice ale unui obiect, cum ar fi inerția sa sau forțele dintre particulele sale constituente, nu se schimbă chiar dacă mutăm obiectul în altă regiune a spațiului. Astfel, frecvența naturală a unui diapazon sau spectrul caracteristic de linii al unui atom nu sînt schimbate într-o astfel de deplasare.

Invarianța la rotații. Din experiență se cunoaște cu mare precizie că spațiul este izotrop, astfel încît toate direcțiile sînt echivalente. Proprietățile geometrice și fizice nu se modifică, dacă reorientăm în direcție un obiect în spațiu. Se poate imagina un spațiu ce nu este izotrop; de exemplu, viteza luminii într-o direcție ar putea fi mai mare decît valoarea ei într-altă direcție perpendiculară pe prima. Nu există nici o evidență în spațiul liber pentru un efect de acest fel; cu toate acestea, într-un cristal se întîlnesc multe asemenea efecte anizotrope. În regiuni ale spațiului apropiate marilor stele și altor surse puternice de gravitație, pot fi observate efecte ce se pot interpreta ca o ușoară abatere de la omogenitatea și izotropia spațiului. (Am amintit două astfel de efecte în capitolul precedent, dar mai sînt și altele.)

Proprietățile de invarianță la translații conduc la *conservarea impulsului*; invarianța la rotații conduce la *conservarea momentului cinetic*. Aceste principii de conservare sînt dezvoltate în capitolele 4 și 6 iar conceptul de invarianță este dezvoltat în capitolele 2 și 4.

Lunga discuție de pînă acum, privind geometria și fizica, constituie un exemplu de ce fel de întrebări trebuie să-și pună fizicienii atunci cînd cercetează caracteristicile de bază ale universului nostru. Dar la nivelul cursului nostru nu vom trata mai în amănunt asemenea probleme.

PROBLEME

1. *Universul cunoscut.* Folosind informația din text, estimați următoarele:

(*a*) Masa totală în universul cunoscut.
R: $\approx 10^{53}$kg.

(*b*) Densitatea medie a materiei din univers.
R: $\sim 10^{-26}$ kg/m^3, echivalent cu 10 atomi de hidrogen/m^3.

(*c*) Raportul razei universului cunoscut la cea a protonului. Luați raza protonului 1×10^{-15} m iar masa protonului $1{,}7 \times 10^{-27}$ kg.

2. *Semnale traversînd un proton.* Estimați timpul necesar unui semnal călătorind cu viteza luminii pentru a se deplasa pe o distanță egală cu diametrul protonului. Luați diametrul protonului 2×10^{-15} m. (Acest timp este un interval convenabil de referință în fizica nucleară și a particulelor elementare.)

3. *Distanța pînă la Sirius.* Paralaxa unei stele este jumătate din unghiul subîntins de stea pînă la punctele extreme ale

orbitei Pămîntului în jurul Soarelui. Paralaxa lui Sirius este 0,371''. Găsiți distanța în metri, ani lumină și parseci. Un parsec este distanța pînă la o stea a cărei paralaxă este de 1'' (Vezi tabela cu valori de la paginile 435, 436, 437.)

R: $8,3 \times 10^{16}$ m; 8,8 ani lumină; 2,7 parseci.

4. *Dimensiunea atomilor*. Folosind valoarea numărului lui Avogadro dat in tabela de la paginile 435, 436, 437. și aprecierea dumneavoastră privind densitatea medie a solidelor normale, estimați cu aproximație diametrul unui atom mediu, adică, dimensiunea spațiului cubic umplut de atom.

5. *Unghiul subîntins de Lună*. Luați o scară milimetrică și, cînd sînt condiții de observare favorabile, încercați următoarea experiență: țineți scara milimetrică (o riglă) la o distanță egală cu lungimea brațului și măsurați diametrul Lunii; măsurați distanța de la riglă la ochiul dumneavoastră. (Raza orbitei Lunii este $3,8 \times 10^8$ m, iar raza Lunii însăși este $1,7 \times 10^6$ m.)

(*a*) Dacă ați fost in stare să faceți experiența care este rezultatul?

(*b*) Dacă n-ați putut face măsurătoarea, calculați din datele de mai sus unghiul subîntins de Lună la nivelul Pămîntului.

R: 9×10^{-3} radiani (rad).

(*c*) Care este unghiul subîntins de Pămînt la nivelul Lunii? (Vezi pag. 72, capitolul 2.)

R: $3,3 \times 10^{-2}$ rad.

6. *Vîrsta universului*. Presupunînd raza universului ca fiind cea dată la pagina 22, găsiți vîrsta universului făcînd ipoteza că o stea care este acum la extremitatea razei a călătorit de la început din centru spre înafară cu viteza de $0,6c = 1,8 \times 10^8$m/s (c viteza luminii în vid).

R: 2×10^{10} ani.

7. *Unghiurile într-un triunghi sferic*. Găsiți suma unghiurilor din triunghiul sferic din figura 1.5, presupunînd că A este situat la pol iar a = raza sferei. Pentru a afla unghiul din A, determinați care ar fi trebuit să fie valoarea lui a pentru ca unghiul să fie de 90°.

LECTURI SUPLIMENTARE

Primele două cărți recomandate sînt manuale de liceu in uz. Ele sînt excelente, pentru o revedere și clarificare a conceptelor din fizică. Celelalte conțin și mult material istoric și filozofic.

Fizica PSSC [Physical Science Study Committee (PSSC), "Physics"] capitolele 1–4, D. C. Heath & Co., Boston 1965. Ediția a doua.

F. G. Rutherford, G. Holton și F. J. Watson, *Curs de Fizică* („Project Physics Course"), Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1970. Un produs al lui Harvard Project Physics (HPP).

O. Struve, B. Lynds și H. Pillans, *Astronomie Elementară* („Elementary Astronomy"), Oxford University Press, New York, 1959. Scoate în relief principalele idei ale fizicii în legătură cu universul; o carte excelentă.

Enciclopedia de Astronomie Larousse („Larousse Encyclopedia of Astronomy"), Prometheus Press, New York, 1962. Aceasta este o carte frumoasă și plină de informații.

H. Bondi, *Cosmologia* („Cosmology"), ed. 2-a, Cambridge University Press, New York, 1960. O prezentare scurtă, clară, plină de autoritate, cu accent pe datele observate dar lipsindu-i mult din lucrările mai recente.

D. W. Sciama, *Cosmologia modernă* („Modern Cosmology"), Cambridge University Press, New York, 1971. Această carte include dezvoltările mai recente.

Robert H. Haynes și Philip C. Hanawalt, *Bazele moleculare ale vieții* („The Molecular Basis of Life"), W. H. Freeman & Co. San. Francisco, 1968. O colecție de articole din revista *Scientific American* plus un text de legătură.

Ghunter S. Stent, *Genetica Moleculară* („Molecular Genetics"), W. H. Freeman & Co., San Francisco, 1971. O lucrare introductivă.

Ann Roe, *Cum se formează un om de știință* („The Making of a Scientist"), Dodd, Mead & Co., New York, 1953; retipărit de Appolo, 1961. Aceasta constituie un excelent studiu sociologic al unui grup de oameni de știință americani de la sfîrșitul anilor 1940. Probabil că au avut loc importante schimbări în populația oamenilor de știință de cînd această carte a văzut pentru prima oară în 1953 lumina tiparului.

Bernice T. Eiduson, *Oamenii de știință; Lumea lor psihică* („Scientists: Their Psychological World"), Basic Books, Inc., Publishers, New York, 1962.

A. Einstein, note autobiografice in *Albert Einstein, Om de știință-filozof*, („Albert Einstein: Philosopher-Scientist"); editor P. A. Schilpp, Library of Living Philosophers, Evanston, 1949. O excelentă scurtă autobiografie. Este păcat că sînt atît de rare biografiile bune ale oamenilor de știință remarcabili cum este cea a lui Freud de Ernest Jones. Sînt puține altele comparabile în adîncime și onestitate cu marile biografii literare ca de pildă „James Joyce" de Richard Ellman. Autobiografia lui Charles Darwin constituie o excepție. Cei ce scriu despre oamenii de știință par a fi intimidați peste măsură de fraza lui Einstein: „Pentru că esențialul intr-un om ca mine constă tocmai în *ce* gîndește și *cum* gîndește iar nu în ce face sau suferă."

L. P. Wheeler, *Josiah Willard Gibbs, Istoria unei minți mari* („Josiah Willard Gibbs; The History of a Great Mind"), Yale University Press, New Haven, Conn. 1962.

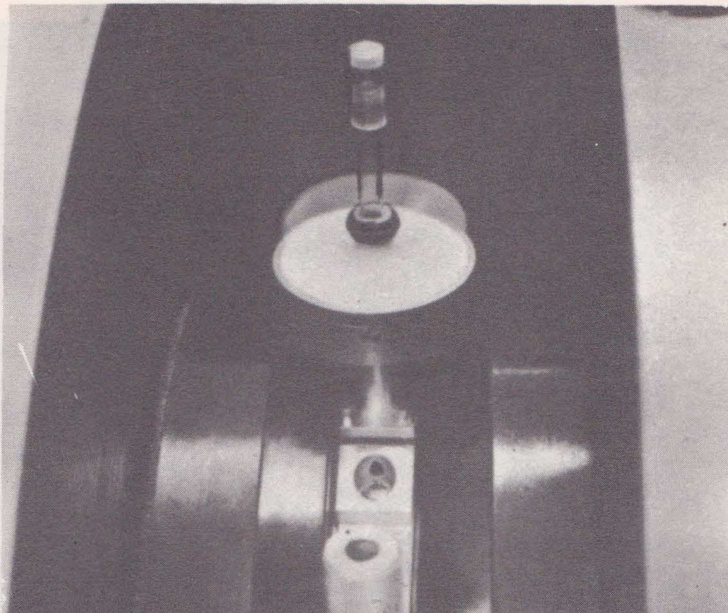
E. Segré, *Enrico Fermi, fizician* („Enrico Fermi, Physicist"), The University of Chicago Press, Chicago, 1971.

INSTRUMENTELE FIZICII EXPERIMENTALE. Fotografiile din pagina aceasta şi din următoarele vor arăta cîteva dintre instrumentele şi maşinile care contribuie la dezvoltarea ştiinţelor fizice.

Un laborator de rezonanţă magnetică nucleară pentru studii de structură chimică. *(ASUC Photography).*

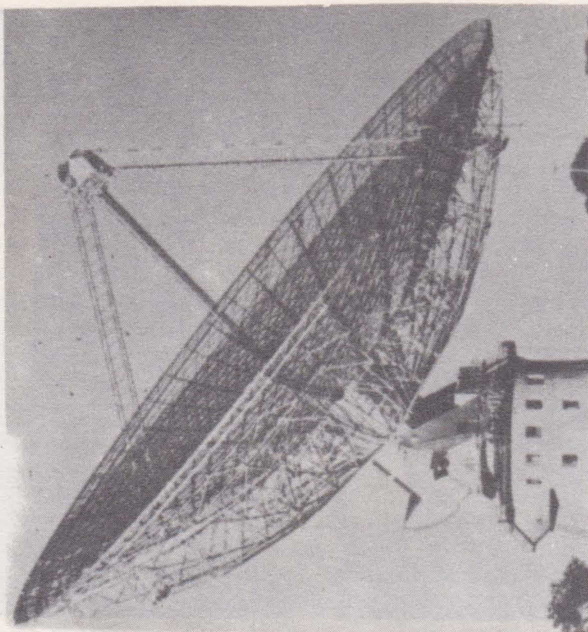


Studierea spectrelor de rezonanță magnetică nucleară: este arătată o probă învîrtindu-se rapid între piesele polare ale unui electromagnet pentru a media variațiile cîmpului magnetic *(Esso Research)*.



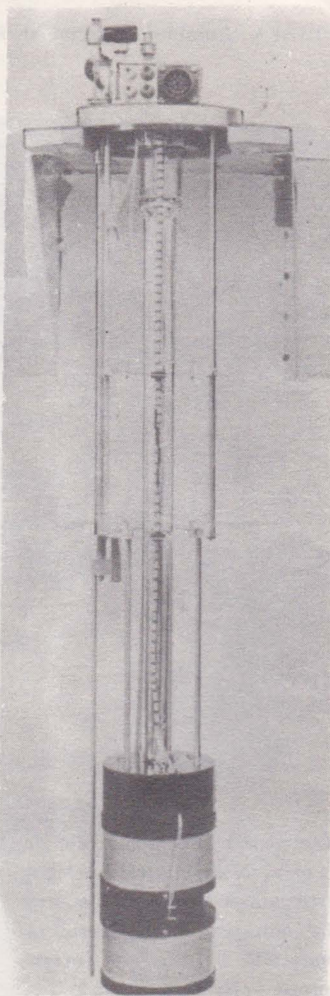


Operatorul din laboratorul de rezonanță magnetică nucleară este gata să plaseze o substanță în unitatea de temperatură variabilă în care se rotește proba. *(Esso Research.)*

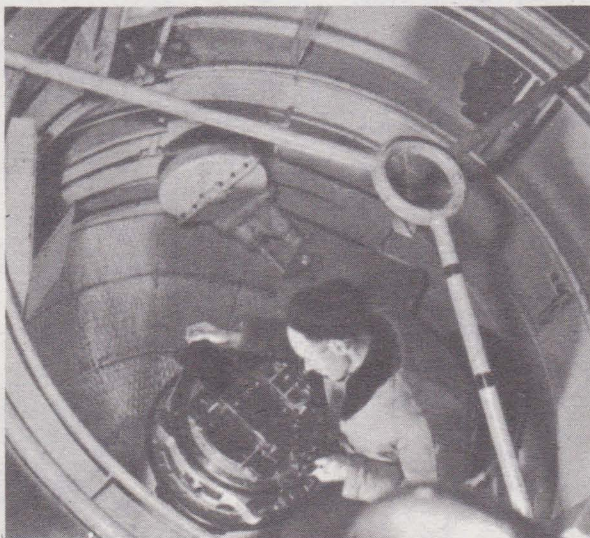


Marele radiotelescop din Australia. Oglinda are 64m în diametru și se află într-o vale liniștită la 320 km vest de Sydney, New South Wales. În această localitate îndepărtată există un minim de perturbații electrice. *(Australian News & Information Bureau.)*

Un magnet construit din sîrmă supraconductoare pentru a fi folosit la temperatură foarte joasă. Bobinele din figură pot produce un cîmp de 54 000 Gauss (5,4 Tesla în SI). Un asemenea instrument constituie inima unui laborator de temperaturi joase. *(Varian Associates.)*

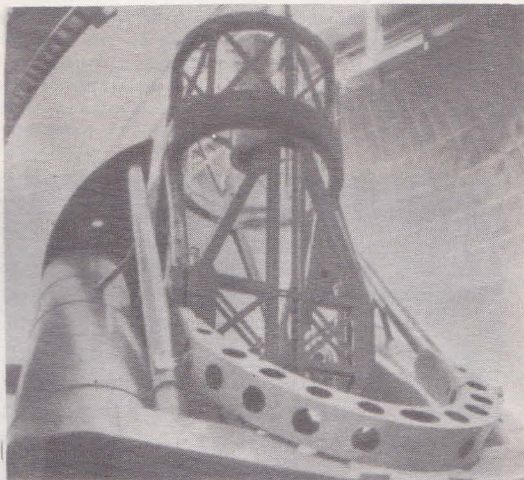


Observatorul aflat în cușca focarului schimbă filmul la telescopul de 200 de țoli de la Hale. *(Prin amabilitatea lui Hale Observatories.)*

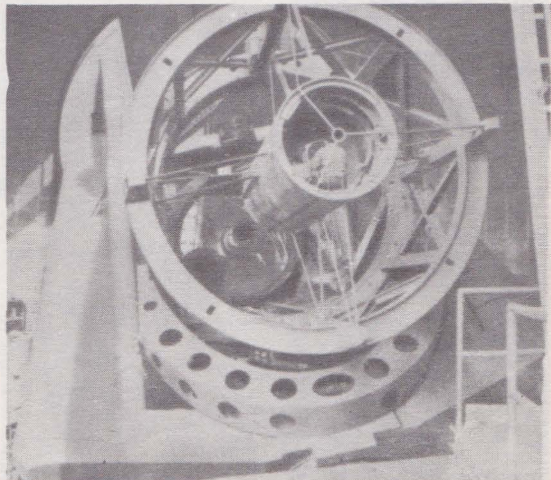


Un accelerator de particule de mare energie: bevatronul de la Berkeley. Protonii sînt injectați din dreapta jos. *(Lawrence Berkeley Laboratory.)* Pînă acum, acceleratoare de energii și mai mari sînt în funcțiune la laboratorul Brookhaven din Long Island, la laboratorul CERN din Geneva, la Serpukhov în URSS și la NAL lîngă Chicago.

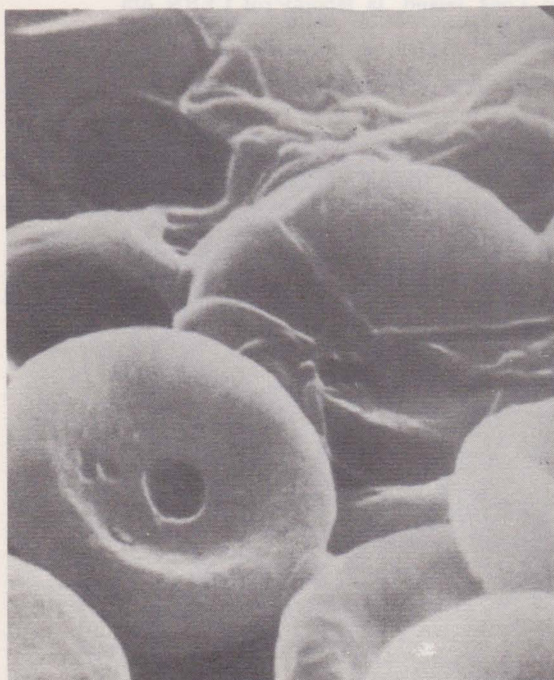
Telescopul de 200 de țoli (≈ 5m) de la Hale îndreptat spre zenit; vedere dinspre sud. *(Prin amabilitatea lui Hale Observatories.)*



Suprafața reflectătoare a oglinzii de 200 de țoli a telescopului de la Hale cu observatorul în cușca focarului. *(Prin amabilitatea lui Hale Observatories.)*



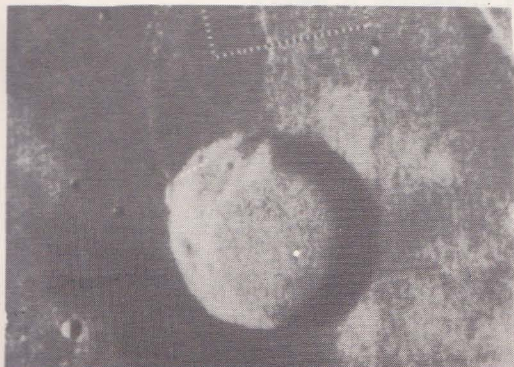
Galaxia spirală NGC 4594 din constelația Fecioarei văzută cu marginea în față; fotografie la telescopul de 200 de țoli. *(Prin amabilitatea lui Hale Observatories.)*



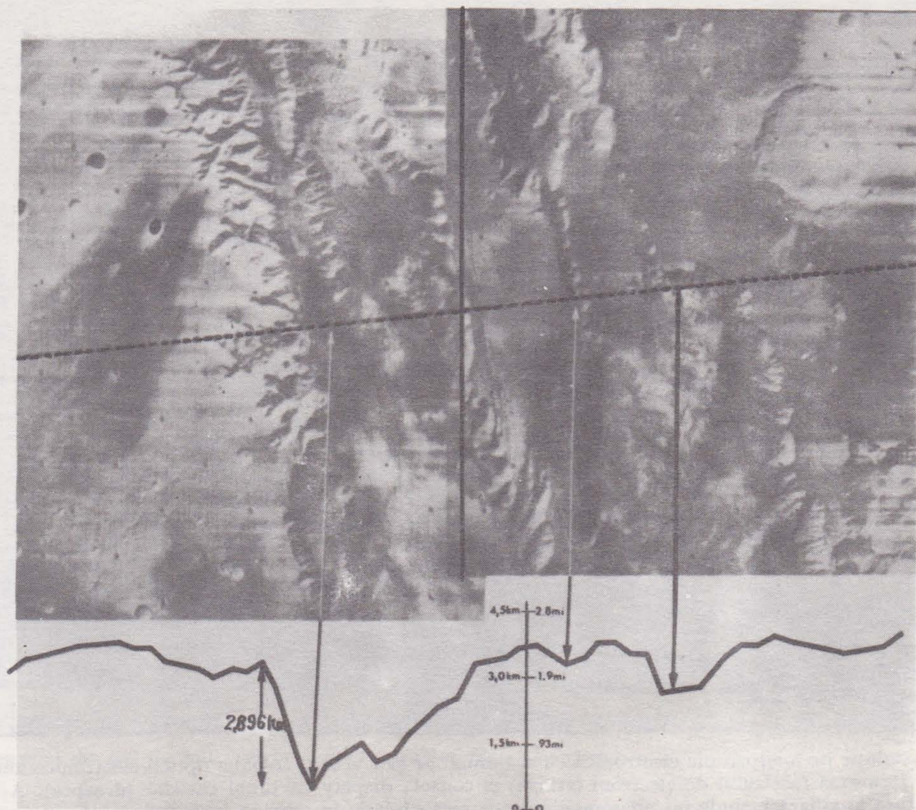
Globulele roșii ale sîngelui omenesc văzute la microscopul electronic cu scanning și mărite de 15 000 de ori. Obiectele în formă de disc sînt globulele roșii legate într-o plasă din fibre de fibrină. De notat caracterul realist, tridimensional al fotografiei. *(Prin amabilitatea lui Dr. Thomas L. Hayes, Donner Laboratory. Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, Berkeley.)*

Instalație de microscopie electronică cu scanning. Se pot vedea: coloana opticii electronice unde se formează fasciculul de electroni (stînga) și consola display cu tubul catodic (dreapta). Aparatura auxiliară include un micromanipulator piezoelectric în coloana instrumentului, un ecran de televiziune și un magnetoscop, un aparat de fotografiat Polaroid precum și un osciloscop monitor de semnale. *(Prin amabilitatea lui Dr. Thomas L. Hayes, Donner Laboratory, Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, Berkeley.)*

Un crater marțian de 70 km în diametru fotografiat de Mariner 9 la 16 decembrie 1971. Soarele bate din dreapta. Dreptunghiul cu linie albă punctată delimitează suprafața prezentată în fotografia de jos făcută cu camera de mare rezoluție a lui Mariner la 22 decembrie. Șanțurile, similare cu șanțurile lunare, se presupun a fi crăpături în scoarță pe unde a ieșit lava. Ambele fotografii au fost îmbunătățite prin prelucrare la calculator. *(Prin amabilitatea lui Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, N.A.S.A.)*







Acest mozaic, format din două fotografii ale regiunii Lacului Tithonius de pe Marte luate de către nava cosmică Mariner 9, prezintă un canion de două ori mai adînc decît Marele Canion din Arizona. Fotografiile au fost comparate cu măsurătorile de presiune făcute prin spectrometrie în ultraviolet la bordul navei spațiale. Săgețile unesc adîncimile deduse din măsurătorile de presiune făcute cu spectrometrul de ultraviolet și trăsăturile corespunzătoare din fotografie. Linia punctată arată traiectoria măturată de spectrometru. Fotografiile au fost luate de la înălțimea de 1 700 km și acoperă o suprafață cu lărgimea de 650 km. *(Prin amabilitatea lui Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, NASA.)*

2

Vectori

Cuprins

VECTORI: LIMBAJ ŞI CONCEPTE

Limbajul este o componentă esenţială a gîndirii abstracte. Este greu a gîndi clar şi uşor, despre concepte abstracte şi sofisticate, într-un limbaj ce nu are cuvinte potrivite unor asemenea concepte. Pentru a exprima noi concepte ştiinţifice, au fost inventate şi adăugate limbilor noi cuvinte; multe asemenea cuvinte au fost formate din rădăcinile existente în greaca sau latina clasică. Un cuvînt nou poate fi adoptat de multe limbi moderne dacă el satisface necesităţile comunităţii ştiinţifice. Astfel *vector* în engleză (şi română) este *vecteur* în franceză, *Vektor* în germană şi *ВЕКТОР* (pronunţat *vector*) în rusă.

Vector este un cuvînt ce defineşte o cantitate care are *direcţie*. sens şi *mărime* şi care se compune cu alţi vectori după o regulă specială.[1] În toată mecanica (ca şi în alte ramuri ale fizicii) vom întîlni cantităţi (viteză, forţă, cîmp electric, moment de dipol magnetic) care au atît mărime cît şi direcţie şi, în consecinţă, este important a dezvolta limbajul şi tehnicile pentru abordarea acestor mărimi. Deşi analiza vectorială este considerată adesea o ramură a matematicii, importanţa ei pentru fizică este atît de mare încît merită să includem aici o introducere.

Notaţia vectorială. Deoarece simbolurile sînt componentele limbajului matematic o parte importantă a analizei matematice constă în tehnica utilizării corecte a notaţiilor. Notaţia vectorială are două proprietăţi importante:

1. Formularea legilor fizicii în termeni vectoriali este independentă de alegerea axelor de coordonate. Notaţia vectorială oferă un limbaj în care enunţurile au un conţinut fizic fără să introducem vreodată un sistem de coordonate.

2. Notaţia vectorială este concisă. Multe legi fizice au forme simple şi uşor de intuit dar care sînt ascunse atunci cînd legile se scriu în termenii unui sistem particular de coordonate.

Deşi în rezolvarea problemelor vom dori să lucrăm într-un sistem particular de coordonate, vom enunţa legile fizicii în forma vectorială, ori de cîte ori va fi posibil. Unele legi mai complicate, ce nu pot fi exprimate în formă

[1] Înţelesul cuvîntului vector constituie o extindere naturală al unui sens mai vechi, acum demodat, din astronomie: o linie dreaptă imaginară ce uneşte o planetă în mişcarea sa pe elipsă cu un focar al elipsei.

Regula specială este dată la pagina 46.

vectorială, pot fi exprimate în formă tensorială. Un *tensor* este o generalizare a vectorului și include vectorul ca un caz particular. Analiza vectorială pe care o cunoaștem azi este în mare parte rezultatul muncii desfășurate la sfîrșitul secolului trecut de către Josiah Willard Gibbs și Oliver Heaviside.

Notația vectorială pe care o vom adopta este următoarea: pe tablă, mărimea vectorială *A* este scrisă punînd o linie ondulată sub *A* ori punînd o săgeată deasupra literei. În carte vectorii vor apărea întotdeauna cu litere **aldine**. Mărimea vectorului va fi tipărită cu litere latine: *A* este mărimea lui **A**; *A* se mai scrie și |**A**|. Un vector unitar este un vector de lungime unitate; un vector unitar în direcția lui **A** se scrie cu căciulă pusă deasupra astfel $\hat{\mathbf{A}}$ și se citește „A versor" sau „A căciulă". Recapitulăm această notație prin identitatea:

$$\mathbf{A} \equiv \hat{\mathbf{A}} A \equiv A \, \hat{\mathbf{A}}.$$

Figurile de la 2.1 la 2.4 prezintă: un vector, opusul acelui vector, vectorul înmulțit cu un scalar și vectorul unitar.

Utilitatea și aplicabilitatea vectorilor în problemele de fizică se bazează în cea mai mare măsură pe geometria euclidiană. Enunțarea unei legi în termeni vectoriali presupune de obicei acceptarea geometriei euclidiene. Dacă geometria n-ar fi euclidiană, adunarea a doi vectori într-o manieră simplă și clară n-ar mai fi posibilă. Pentru spațiul curb există un limbaj mai general, geometria diferențială metrică, care este limbajul teoriei generalizate a rela-

FIG. 2.1. Vectorul **r** reprezintă poziția punctului *P* relativ la alt punct *O* luat drept origine.

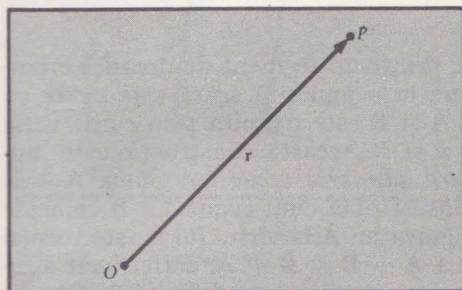


FIG. 2.2. Vectorul −**r** este egal în mărime cu **r** dar opus ca sens.

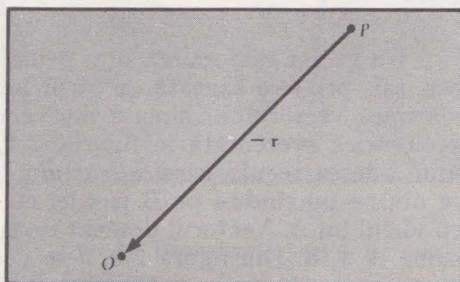


FIG. 2.3. Vectorul 0,6 **r** se află pe direcția lui **r** și are mărimea 0,6 *r*.

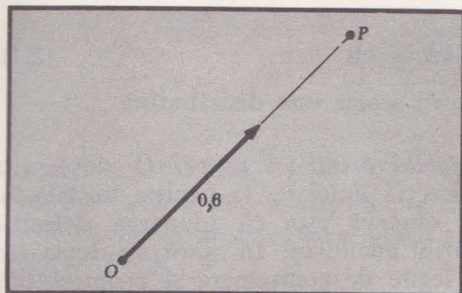
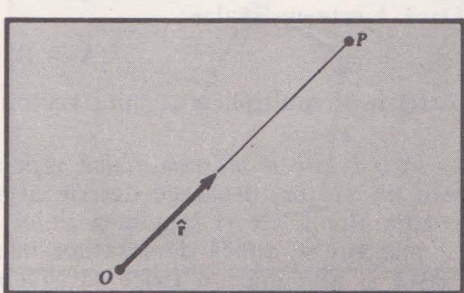


FIG. 2.4. Vectorul $\hat{\mathbf{r}}$ este vectorul unitate în direcția lui **r**. Notați că $\mathbf{r} = r\,\hat{\mathbf{r}}$.



tivității, domeniul fizicii în care geometria euclidiană nu mai este suficient de precisă.

Am considerat vectorul ca fiind o cantitate ce are atît direcție cît și mărime. Aceste proprietăți nu au absolut nici o legătură cu vreun sistem particular de coordonate, deși presupunem că direcția vectorului poate fi definită, de exemplu, în raport cu camera laboratorului, sau cu stelele fixe etc. Cu toate acestea, vom vedea că sînt și alte obiecte matematice care au mărime și direcție dar care nu sînt vectori ca, de pildă, rotațiile finite (pagina 48). O cantitate ce are o mărime dar *nu* și direcție este un *scalar*. Mărimea unui vector este un scalar. Temperatura și masa sînt tot scalari. Pe de altă parte viteza **v** este un vector și forța **F** este tot un vector.

Egalitatea vectorilor. După ce am stabilit notațiile, vom trece acum la cîteva operații vectoriale: adunarea, scăderea și înmulțirea. Doi vectori **A** și **B** ce descriu mărimi fizice similare (de exemplu forțe) sînt considerați egali cînd au aceeași mărime, aceeași direcție și același sens; acest lucru se scrie **A** = **B**. Un vector nu trebuie să aibă neapărat precizată și o poziție în spațiu, deși el ar putea să se refere la o mărime definită într-un anumit punct. Doi vectori pot fi comparați, chiar și atunci cînd ei măsoară mărimi fizice definite în diferite puncte din spațiu și la momente diferite. Dacă n-ar exista încrederea (bazată pe experiență) că putem considera spațiul ca nefiind curb, adică euclidian — cu excepția, poate, a distanțelor enorme — atunci n-am putea compara fără nici un echivoc doi vectori aflați în puncte diferite.

ADUNAREA VECTORILOR

Un vector este reprezentat geometric printr-un segment de dreaptă orientat, sau printr-o săgeată, a cărui lungime la o anumită scară este egală cu mărimea vectorului. Suma a doi vectori **A** și **B** este definită prin construcția geometrică prezentată în figurile 2.5, *a*, *b* și *c*. Această construcție este numită adesea regula *paralelogramului pentru adunarea vectorilor*. Suma **A** + **B** se obține purtîndu-l pe **B** paralel cu el însuși pînă cînd coada lui **B** coincide cu vîrful lui **A**. Vectorul desenat de la originea lui **A** la vîrful lui **B** este tocmai suma **A** + **B**. Din figura 2.5, *d* se vede că **A** + **B** = **B** + **A**, astfel încît adunarea vectorilor este comutativă. Scăderea vectorilor este definită în figurile 2.6, *a* și *b* cu **B** + (—**B**) = 0 definind vectorul negativ (opus).

Adunarea vectorilor satisface relația **A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C**, deci adunarea vectorilor este asociativă (vezi fig. 2.7). Suma unui număr finit de vectori este independentă de ordinea în care aceștia sînt adunați. Dacă **A** — **B** = **C**, atunci adunînd pe **B** la ambii membri obținem **A** = **B** + **C**. Dacă k este un scalar:

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} \tag{2.1}$$

astfel încît multiplicarea unui vector cu un scalar este distributivă.

Cînd este o mărime fizică reprezentabilă printr-un vector? O deplasare este un vector, deoarece descrie atît direcția liniei de la poziția inițială la poziția finală cît și lungimea liniei; se observă ușor că adunarea definită ca mai sus se aplică deplasărilor în spațiul euclidian. În afară de deplasări există și alte mărimi fizice satisfăcînd legile de compunere și proprietățile

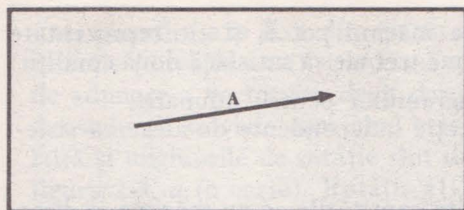


FIG. 2.5.(*a*) Vectorul **A**.

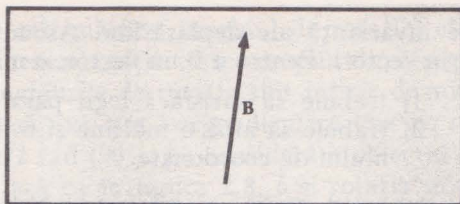


FIG. 2.5.(*b*) Vectorul **B**.

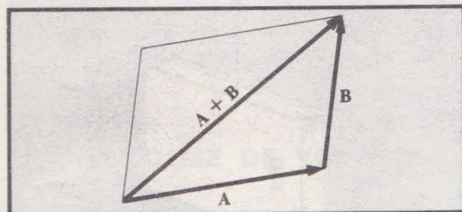


FIG. 2.5. (*c*) Vectorul sumă **A** + **B**.

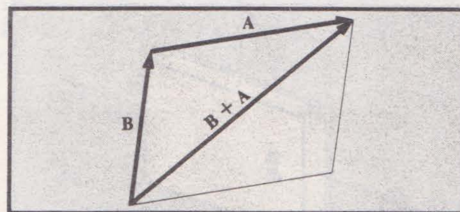


FIG. 2.5. (*d*) Vectorul sumă **B** + **A** este egal cu **A** + **B**.

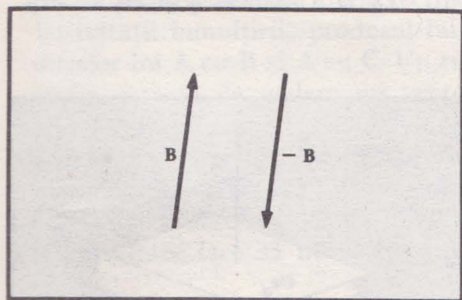


FIG. 2.6. (*a*) Vectorii **B** și – **B**.

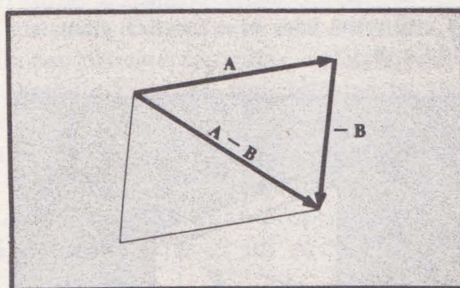


FIG. 2.6. (*b*) Formarea lui **A** – **B**; scăderea vectorilor.



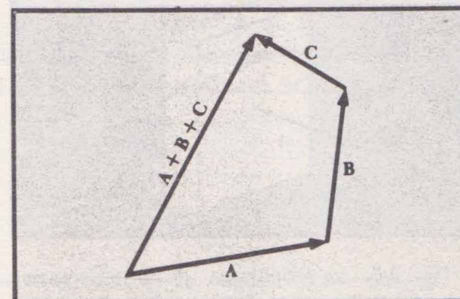


FIG. 2.7. Suma a trei vectori: **A** + **B** + **C**. Verificați dumneavoastră că suma aceasta este egală cu **B** + **A** + **C**.

de invarianță ale deplasărilor. Asemenea mărimi pot fi și ele reprezentate prin vectori. Pentru a fi un vector, o mărime trebuie să satisfacă două condiții:

1) trebuie să satisfacă legii paralelogramului pentru adunare;
2) trebuie să aibă o mărime și o direcție independente de alegerea sistemului de coordonate.

Rotațiile finite nu sînt vectori. Nu toate cantitățile ce au mărime și direcție sînt cu necesitate vectori. De exemplu, rotația unui corp rigid în jurul

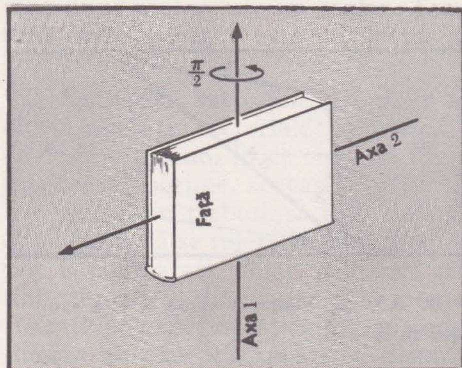


FIG. 2.8. (*a*) Orientarea originală a cărții. Ea este rotită apoi cu $\pi/2$ radiani (rad) în jurul axei 1.

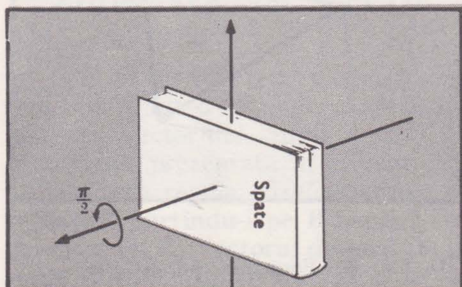


FIG. 2.8. (*b*) Orientarea după o rotație de $\pi/2$ rad. în jurul axei *1*.

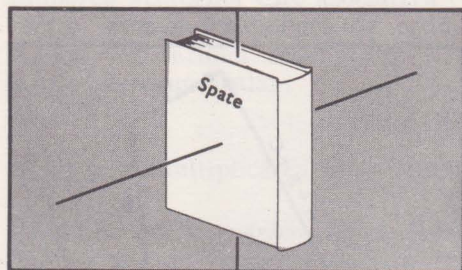


FIG. 2.8. (*c*) Orientarea după o rotație ulterioară de $\pi/2$ rad. în jurul axei 2.

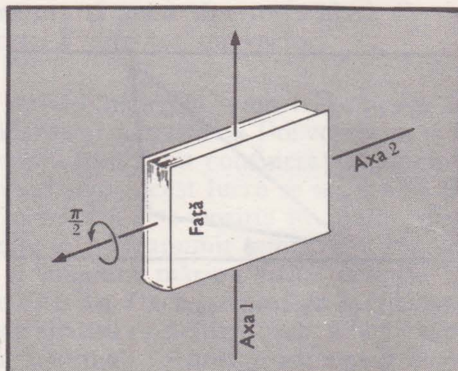


FIG. 2.8. (*d*) Orientarea originală a cărții.

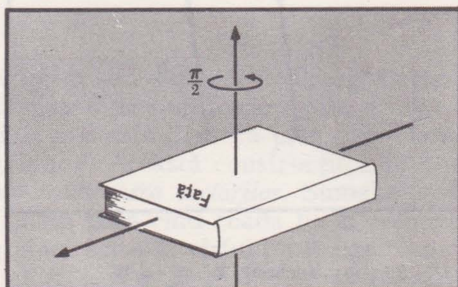


FIG. 2.8. (*e*) Orientarea după o rotație de $\pi/2$ rad. în jurul axei 2.

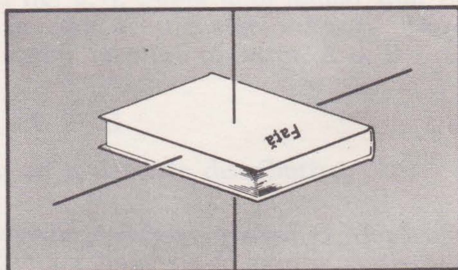


FIG. 2.8. (*f*) Orientarea după o rotație ulterioară de $\pi/2$ rad. în jurul axei 1.

unei anumite axe fixe din spațiu are atît mărime (unghiul de rotație) cît și direcție (direcția axei). Dar două asemenea rotații nu se compun după regula de adunare a vectorilor, decît dacă unghiurile de rotație sînt infinit de mici[1]. Acest lucru se vede ușor cînd cele două axe sînt perpendiculare una-pe cealaltă și unghiurile de rotație sînt de $\pi/2$ rad (90°). Să considerăm obiectul din figura 2.8, *a* (o carte). Rotația (1) o lasă ca în figura 2.8, *b* și rotația următoare (2) în jurul unei alte axe o lasă ca în figura 2.8, *c*. Dar dacă obiectului orientat ca la început (fig. 2.8, *d*), îi aplicăm întîi rotația (2), (fig. 2.8, *e*) și apoi rotația (1) în final el ajunge ca în poziția din figura 2.8, *f*. Orientarea din figura a șasea nu este aceeași ca cea din figura a treia. Este evident, că aceste rotații nu satisfac legea comutativității adunării vectorilor. În ciuda faptului că au o mărime și o direcție, rotațiile finite nu pot fi reprezentate prin vectori.

PRODUSE DE VECTORI

Deși nu avem nici un motiv să ne întrebăm dacă suma a doi vectori este un scalar sau un vector, o astfel de întrebare este importantă atunci cînd ne referim la produsul a doi vectori. Există două moduri foarte utile în care se poate defini produsul a doi vectori. Amîndouă produsele satisfac legea distributivității înmulțirii: produsul lui **A** cu suma $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ este egal cu suma produselor lui **A** cu **B** și **A** cu **C**. Un tip de produs este un scalar, celălalt este din multe puncte de vedere un vector. Ambele produse sînt folosite în fizică. Există și alte definiții de produse ce nu sînt folositoare: de ce AB nu este o definiție folositoare pentru produsul a doi vectori? Prin AB înțelegem produsul obișnuit $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ al mărimilor lui **A** și lui **B**. Observăm că dacă $\mathbf{D} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ atunci, în general, $AD \neq AB + AC$. Absența proprietății de distributivitate face să nu se folosească AB ca produs al lui **A** cu **B**.

Produsul scalar. Produs scalar al lui **A** și **B** se definește ca fiind acel număr obținut înmulțind mărimea lui **A** cu mărimea lui **B** și cu cosinusul unghiului dintre ele (vezi fig. 2.9 de la *a* la *c*). Produsul scalar este un scalar. Pentru produsul scalar există simbolul:

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv AB \cos (\mathbf{A}, \mathbf{B})} \tag{2.2}$$

Aici cos (**A**, **B**) înseamnă cosinusul unghiului dintre **A** și **B**. Vedem că în definiția dată produsului scalar nu intervine nici un sistem de coordonate. Observăm că $\cos (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \cos (\mathbf{B}, \mathbf{A})$ astfel încît produsul scalar este comutativ:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \tag{2.3}$$

Vom citi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ca „**A** punct **B**".

[1] Vitezele unghiulare sînt vectori, chiar dacă rotațiile de unghiuri finite nu sînt.

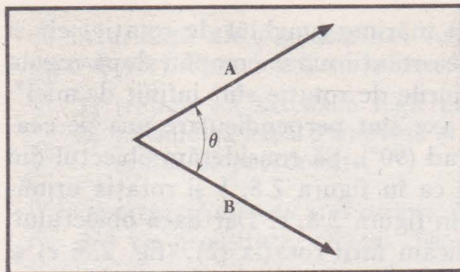


FIG. 2.9. (*a*) Pentru a-l forma pe **A · B** aduceți vectorii **A** și **B** într-o origine comună.

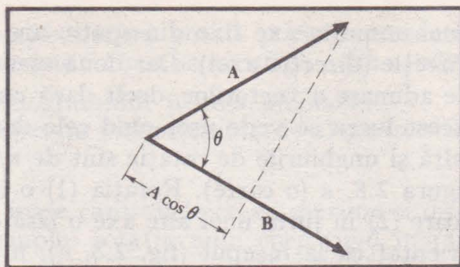


FIG. 2.9. (*b*) $B(A\ \cos\theta) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.

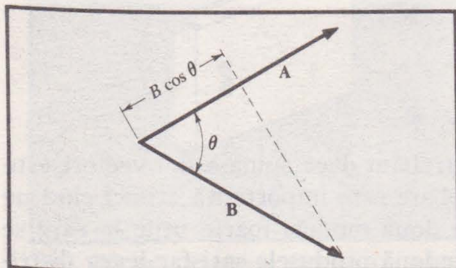


FIG. 2.9. (*c*) $A(B\cos\theta) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. Aici θ, litera greacă theta, reprezintă unghiul dintre **A** și **B**.

Dacă unghiul dintre **A** și **B** se află între $\pi/2$ și $3\pi/2$, atunci cos (**A**, **B**) și **A** · **B** vor fi numere negative. Dacă **A** = **B**, atunci cos (**A**, **B**) = 1 și:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A^2 = |\mathbf{A}|^2.$$

Dacă $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ și $A \neq 0$, $B \neq 0$, vom spune că **A** este ortogonal pe **B** sau perpendicular pe **B**. De notat că $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}}$, astfel încît produsul scalar a doi vectori unitari este tocmai cosinusul unghiului dintre ei. Mărimea proiecției lui **B** pe direcția lui **A** este:

$$B\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = B\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{A}}$$

unde $\hat{\mathbf{A}}$ este vectorul unitar în direcția lui **A**. Proiecția lui **A** pe direcția lui **B** este:

$$A\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{B}}.$$

Produsul scalar nu are invers: dacă $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = b$ atunci nu există soluție unică pentru **X**. Împărțirea cu un vector este o operație fără sens, nu este definită.

Componente, mărimi și cosinuși directori. Fie $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ trei vectori unitari ortogonali[1] ce definesc un sistem cartezian de coordonate ca în figura 2.10, *a*. Un vector arbitrar **A** se poate scrie:

$$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{x}} + A_y\,\hat{\mathbf{y}} + A_z\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (2.4)$$

[1] Ortogonali, în sensul de aici, înseamnă reciproc perpendiculari.

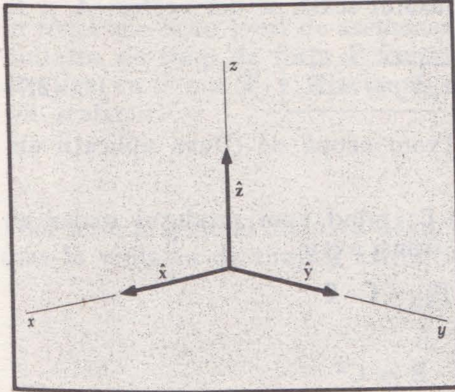


FIG. 2.10. (a) Vectorii unitari cartezieni ortogonali $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$

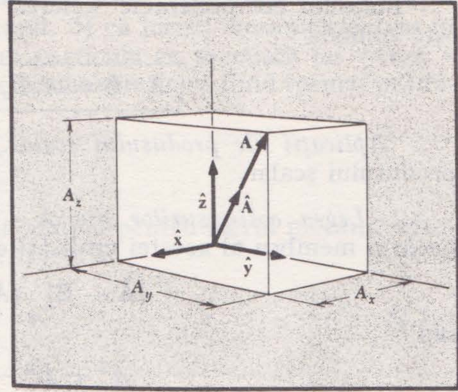


FIG. 2.10. (b) $\mathbf{A} = \hat{x} A_x + \hat{y} A_y + \hat{z} A_z$

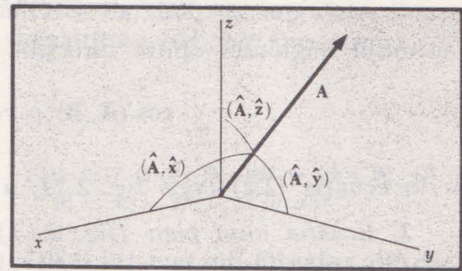


FIG. 2.11. Cosinușii directori referitori la unghiurile indicate.

unde A_x, A_y și A_z se numesc *componentele* lui $\mathbf{A}$, așa cum se vede în figura 2.10, *b*. Se vede imediat că $A_x = \mathbf{A} \cdot \hat{x}$ deoarece:

$$\mathbf{A} \cdot \hat{x} = A_x \hat{x} \cdot \hat{x} + A_y \hat{y} \cdot \hat{x} + A_z \hat{z} \cdot \hat{x} = A_x$$

și

$$\hat{y} \cdot \hat{x} = 0 = \hat{z} \cdot \hat{x}$$
$$\hat{x} \cdot \hat{x} = 1.$$

În funcție de componentele A_x, A_y, A_z mărimea lui A este:

$$A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{(A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \cdot (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z})} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (2.5)$$

Dacă vrem să scriem o expresie pentru vectorul unitar $\hat{\mathbf{A}}$ (vezi de asemenea fig. 2.10, *b*) vedem că:

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{x} \frac{\hat{x} \cdot \mathbf{A}}{A} + \hat{y} \frac{\hat{y} \cdot \mathbf{A}}{A} + \hat{z} \frac{\hat{z} \cdot \mathbf{A}}{A} = \hat{x} \frac{A_x}{A} + \hat{y} \frac{A_y}{A} + \hat{z} \frac{A_z}{A} \quad (2.6)$$

este tocmai o astfel de expresie. Din figura 2.11 și ecuația (2.6) deducem că unghiurile pe care le face $\mathbf{A}$ cu axele x, y, și z au cosinușii A_x/A, A_y/A și A_z/A sau $\hat{x} \cdot \hat{\mathbf{A}}$, $\hat{y} \cdot \hat{\mathbf{A}}$ și $\hat{z} \cdot \hat{\mathbf{A}}$. Aceștia se numesc *cosinuși directori* și au proprietatea că suma pătratelor a trei cosinuși directori este egală cu unu, după cum se poate vedea cu ajutorul ecuației (2.5).

Folosind componentele scrierea produsului scalar a doi vectori **A** și **B** este comodă

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z} \tag{2.7}$$

Aplicații ale produsului scalar. Ne vom ocupa de cîteva aplicații ale produsului scalar.

1. *Legea cosinusurilor.* Fie $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C}$; luînd apoi produsul scalar al fiecărui membru al acestei egalități cu el însuși avem:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})\cdot(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}$$

sau

$$A^2 + B^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = C^2$$

care este tocmai faimoasa relație trigonometrică:

$$A^2 + B^2 - 2AB\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = C^2. \tag{2.8}$$

Cosinusul unghiului dintre direcțiile a doi vectori este dat de:

$$\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \cos\theta_{AB} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}$$

ca în ecuația (2.2) (vezi fig. 2.12, *a* și *b*).

2. *Ecuația unui plan (fig. 2.13).* Fie **N** normala la planul considerat, care este coborîtă din punctul O situat în afara planului. Fie **r** un vector arbitrar cu originea în O și cu extremitatea în orice punct P din plan. Proiecția lui **r** pe **N** trebuie să fie egală în mărime cu N. Astfel planul este descris de ecuația:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{N} = N^2. \tag{2.9}$$

Pentru a stabili identitatea acestei relații compacte cu expresia cunoscută din geometria analitică pentru ecuația planului:

$$ax + by + cz = 1$$

să scriem pe **N** și **r** în funcție de componentele N_x, N_y și N_z precum și de x, y, z. Ecuația (2.9) ia acum forma:

$$(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})\cdot(N_x\hat{\mathbf{x}} + N_y\hat{\mathbf{y}} + N_z\hat{\mathbf{z}}) = N^2$$

care se reduce la:

$$x\frac{N_x}{N^2} + y\frac{N_y}{N^2} + z\frac{N_z}{N^2} = 1.$$

3. *Vectorii electric și magnetic într-o undă electromagnetică.* Fie $\hat{\mathbf{k}}$ vectorul unitate în direcția de propagare a unei unde electromagnetice plane în vid (vezi fig. 2.14), atunci (după cum vom vedea în volumele 2 și 3) vectorii intensitate electrică și inducție magnetică **E** și **B** trebuie să se afle în planul normal la $\hat{\mathbf{k}}$ și să fie perpendiculari unul pe celălalt. Vom exprima această condiție geometrică prin relațiile:

$$\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{E} = 0, \qquad \hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0.$$

4. *Lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp (puterea).* S-a învăţat în fizica din liceu (vezi de asemenea şi capit. 5) că lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp de forţa **F** asupra unei particule ce se mişcă cu viteza **v** este egal cu $Fv \cos(\mathbf{F}, \mathbf{v})$. Recunoaştem această expresie ca fiind tocmai produsul scalar:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Vom scrie în general derivata $\mathrm{d}L/\mathrm{d}t$ ca un simbol pentru lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp şi astfel (fig. 2.15):

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \tag{2.10}$$

5. *Debitul.* Fie **S** un vector perpendicular pe o suprafaţă plană şi de mărime egală cu aria acelei suprafeţe şi fie **v** viteza cu care se deplasează suprafaţa. Atunci volumul parcurs în unitatea de timp de suprafaţa S este un cilindru avînd ca bază suprafaţa S şi înălţimea oblică v (vezi fig. 2.16), sau $\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$.

FIG. 2.12. (*a*) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = C^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = A^2 + B^2 - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^2 + B^2 - 2AB \cos\theta$.

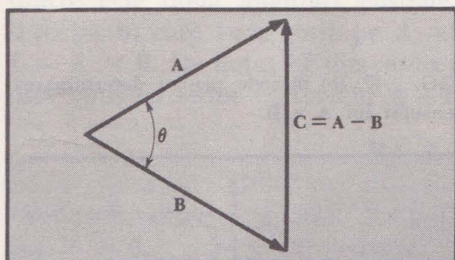


FIG. 2.12. (*b*) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = D^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = A^2 + B^2 + 2AB \cos\theta$.

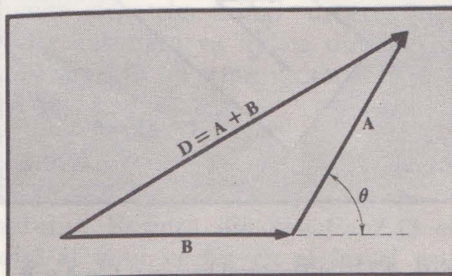


FIG. 2.13. Ecuaţia unui plan. **N** este normala la plan dusă din originea O. Ecuaţia planului este $\mathbf{N} \cdot \mathbf{r} = \mathrm{N}^2$.

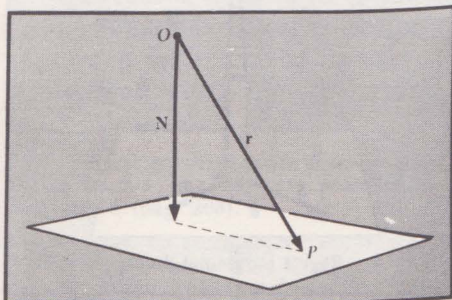
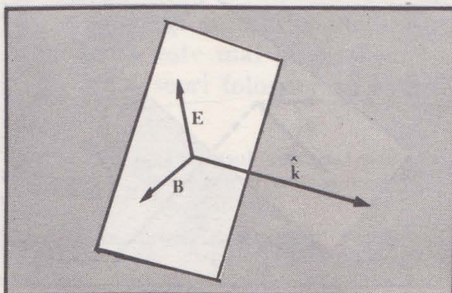


FIG. 2.14. Cîmpurile electric şi magnetic într-o undă electromagnetică plană în vid sînt perpendiculare pe direcţia de propagare $\hat{\mathbf{k}}$. Astfel $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0$; $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$.



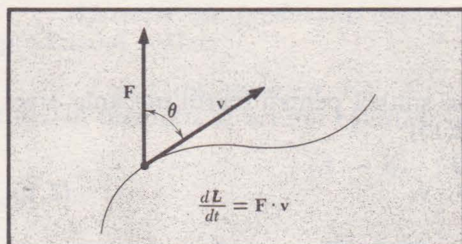


FIG. 2.15. Lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp de forța **F** asupra unei particule ce se mișcă cu viteza **v**.

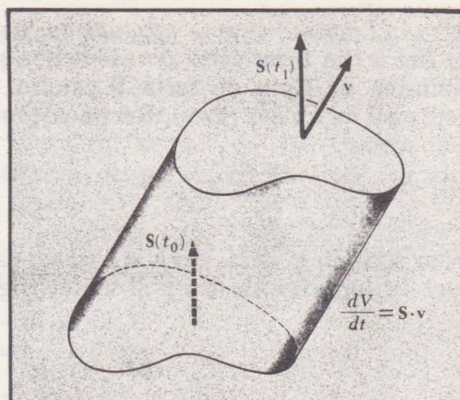


FIG. 2.16. Volumul măturat în unitatea de timp de suprafața S în deplasare cu viteza **v**.

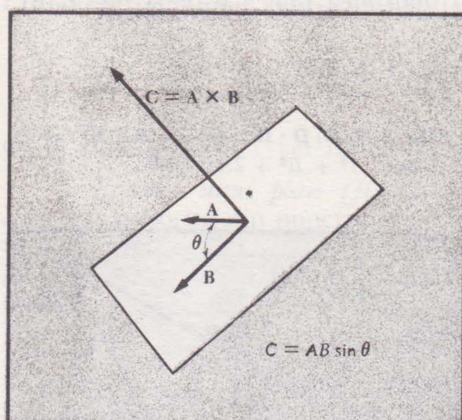


FIG. 2.17. (*a*) Produsul vectorial **C** = **A** × **B**.

FIG. 2.17. (*b*) Metode pentru determinarea sensului lui **A** × **B**.

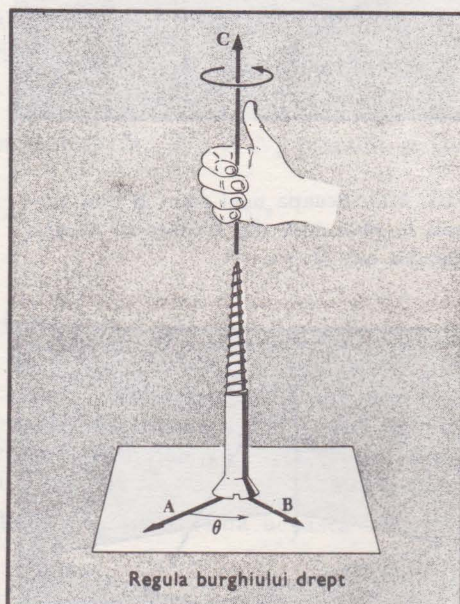
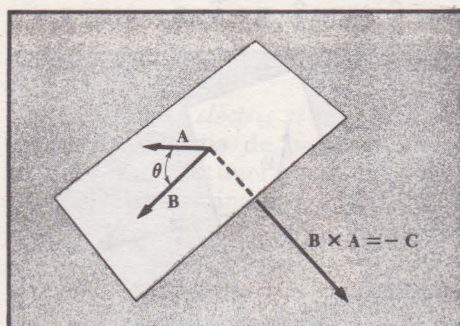


FIG. 2.17. (*c*) Produsul vectorial **B** × **A** are sens opus lui **A** × **B**.



Debitul este atunci:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}. \tag{2.11}$$

Produsul vectorial[1]. În fizică este utilizat pe scară mare și un alt produs de doi vectori. Acest produs este mai degrabă un vector decît un scalar, dar este un vector într-un sens mai restrîns. Produsul vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ se definește ca fiind vectorul normal pe planul ce trece prin **A** și **B** avînd mărimea $AB\,|\sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})|$ ca în figura 2.17,*a*:

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{C}}\,AB\,|\sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})|} \tag{2.12}$$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ se citește: „**A** produs vectorial cu **B**" sau (atunci cînd nu există posibilitatea de confuzie cu produsul scalar) „**A** ori **B**". Sensul lui **C** se determină printr-o convenție fixată de *regula burghiului drept:* vectorul **A**, primul factor al produsului este rotit cu unghiul cel mai mic pînă cînd coincide cu direcția lui **B**. Sensul lui **C** este sensul de înaintare al unui burghiu normal cu filet pe dreapta (burghiul standard și în România) atunci cînd burghiul este rotit în același sens ca și vectorul **A**, după cum se vede și în figura 2.17,*b*.

Să formulăm într-alt fel regula ce dă direcția lui **C**: în primul rînd, să facem ca cei doi vectori **A** și **B** să aibă aceeași origine; ei vor defini un plan. Vectorul **C** este perpendicular pe acest plan, adică produsul vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ este perpendicular atît pe **A** cît și pe **B**. Rotim pe **A** peste **B** cu cel mai mic dintre cele două unghiuri posibile — îndoim degetele mîinii drepte după direcția în care l-am rotit pe **A**, atunci degetul mare va indica direcția lui $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. De notat că din cauza acestei convenții de semn vectorul $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ este opus ca semn vectorului $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (vezi fig. 2.17, *c*):

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}. \tag{2.13}$$

Produsul vectorial nu este, astfel, comutativ. Rezultă din ecuația 2.13 că $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$, astfel încît produsul vectorial al unui vector cu el însuși este zero. Produsul vectorial este distributiv:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}.$$

Demonstrația (ceva mai complicată) poate fi găsită în orice carte de analiză vectorială[2].

Produsul vectorial în coordonate carteziene. Așa cum am găsit în relația (2.6) cosinușii directori ai vectorului **A**, putem găsi și sinusurile unghiurilor pe care **A** le face cu axele carteziene. Acest lucru este mai greoi și sinusul poate fi aflat mai ușor din cosinus. Totuși, este deseori folositor să avem o

---

[1] Acest paragraf poate fi acum omis (pag. 55 pînă la 59). Produsul vectorial este folosit în capitolul 3 (pag. 89) care poate fi de asemenea omis; el este necesar numai începînd cu capitolul 6 (pag. 208).

[2] Vezi, de exemplu, C. E. Weatherburn, „Analiză vectorială elementară" (Elementary Vector Analysis) pag. 57, G. Bell & Sons, Ltd., London, 1928; J. G. Goffin, „Analiză vectorială" (Vector Analysis), pag. 35, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1911.

formulă pentru exprimarea produsului vectorial a doi vectori în funcție de componentele lor:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_x\,\hat{\mathbf{x}}+A_y\,\hat{\mathbf{y}}+A_z\,\hat{\mathbf{z}})\times(B_x\,\hat{\mathbf{x}}+B_y\,\hat{\mathbf{y}}+B_z\,\hat{\mathbf{z}})=$$

$$=(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}})\,A_xB_y+(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}})A_xB_z+(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}})A_yB_z+(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{x}})\,A_yB_x+$$

$$+(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}})\,A_zB_x+(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}})\,A_zB_y$$

unde am folosit rezultatele: $\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{z}}=0$.

Se ridică acum o problemă: cît este $\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}}$? Este $\hat{\mathbf{z}}$ sau $-\hat{\mathbf{z}}$? Vom face următoarea alegere $\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}}=+\hat{\mathbf{z}}$ și vom construi axele de coordonate în concordanță cu această alegere. Această convenție, folosită mult în fizică, definește un sistem de coordonate drept [1]. Convenim să lucrăm numai în sisteme de coordonate drepte ca acelea din figurile 2.10 *a* și *b*.

Acum avem $\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}}=-\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}}=\hat{\mathbf{x}}$ și așa mai departe și vedem că:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\hat{\mathbf{x}}(A_yB_z-A_zB_y)+\hat{\mathbf{y}}(A_zB_x-A_xB_z)+\hat{\mathbf{z}}(A_xB_y-A_yB_x). \quad (2.14)$$

De notat că dacă indicii sînt ciclici în raport cu *xyz*, termenii din produsul vectorial sînt pozitivi, în caz contrar ei sînt negativi. Cine este familiarizat cu determinanții poate vedea imediat că reprezentarea:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \quad (2.15)$$

este echivalentă cu ecuația (2.14) și se ține minte ușor.

Aplicații ale produsului vectorial. În următoarele paragrafe vom trata cîteva aplicații ale produsului vectorial.

1. *Aria unui paralelogram.* Mărimea:

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=AB|\sin(\mathbf{A},\mathbf{B})|$$

este aria paralelogramului cu laturile **A** și **B** (sau de două ori aria triunghiului cu laturile **A** și **B**) (vezi fig. 2.18, *a*). Direcția lui $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ este normală la planul paralelogramului; putem astfel considera $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ca vectorul arie al paralelogramului. Deoarece am dat semne laturilor **A** și **B** vectorul arie apare înzes-

[1] Cum am putea comunica unei alte ființe dintr-un alt sistem solar al galaxiei noastre, definiția dată de noi sistemului drept de coordonate? Am putea face acest lucru utilizînd unde radio polarizate circular. Semnalul poartă un mesaj care îi va spune observatorului îndepărtat în ce sens am definit polarizarea undelor. Observatorul îndepărtat va fi construit două aparate de recepție, care, în termenii intensității semnalului, vor avea, unul, sensul corect iar celălalt sensul incorect. Orice metodă de măsură are nevoie de o analiză foarte atentă: în lucrarea originală privind efectul Zeeman din spectroscopie, descoperitorul lui a asociat în mod incorect semnul plus sarcinilor oscilante din atom, deoarece a interpretat greșit sensul radiației circular polarizate. [Vezi P. Zeeman, Philosophical Magazine, (5) *43*:55 și 226 (1897). În mod asemănător, prima transmisie prin intermediul satelitului Telstar din ziua de 11 iulie 1962 a fost destul de prost recepționată în Marea Britanie din cauza: „inversării unei mici piese din antenă care a provenit dintr-o ambiguitate în definirea sensului de rotație a undelor radio" Times (London), July 13, 1962, pag. 11.]

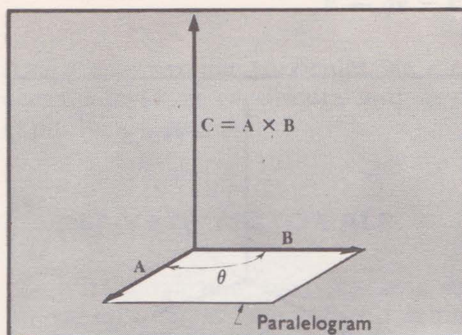


FIG. 2.18. (*a*) Vectorul arie a unui paralelogram este $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB|\sin\theta|\hat{\mathbf{C}}$.

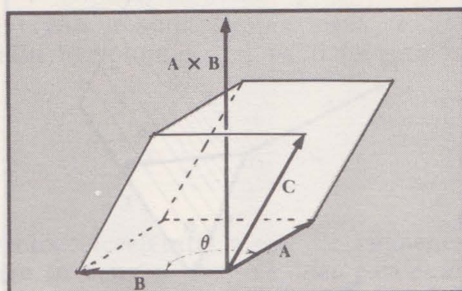


FIG. 2.18. (*b*) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ = aria bazei × înălțimea = volumul paralelipipedului.

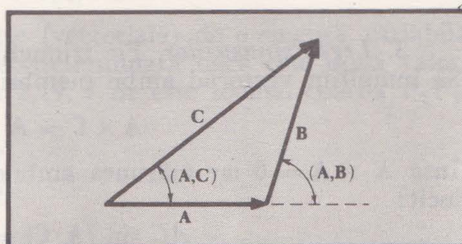


FIG. 2.18. (*c*) Legea sinusurilor într-un triunghi.
Notați că: $\sin(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sin[\pi - (\mathbf{A},\mathbf{B})]$.

trat cu o direcție. Sînt aplicații fizice cînd este util să dăm ariei o direcție [Vezi ecuația (2.11).]

2. *Volumul unui paralelipiped*. Scalarul:

$$|(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}| = V$$

este volumul paralelipipedului cu aria bazei $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ iar $\mathbf{C}$ este muchia sau înălțimea oblică (fig. 2.18, *b*). Dacă cei trei vectori **A**, **B** și **C** sînt în același plan, volumul va fi zero; astfel trei vectori sînt coplanari dacă și numai dacă $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = 0$.

Se vede din figură că:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

astfel încît *se poate schimba în produsul mixt punctul cu semnul „ori" fără să se modifice valoarea produsului*. Totuși,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}).$$

Produsul mixt nu se modifică la o permutare circulară a ordinii vectorilor dar își schimbă semnul dacă ordinea ciclică s-a schimbat. (Permutări ciclice ale lui *ABC* sînt *BCA* și *CAB*; permutări neciclice ale lui *ABC* sînt *BAC*, *ACB* și *CBA*.)

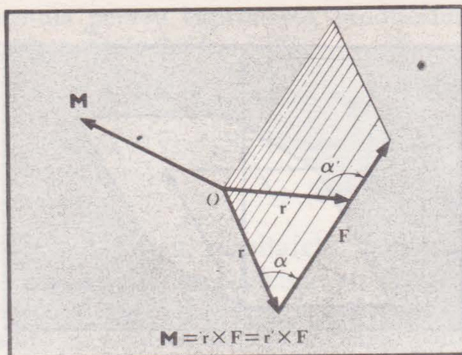


FIG. 2.18. (*d*) Momentul forței ca produs vectorial.

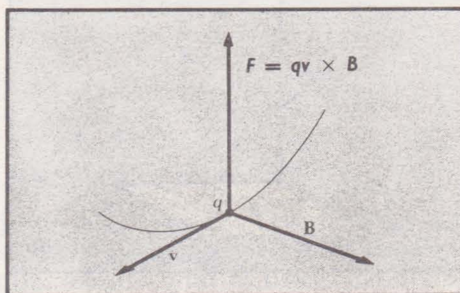


FIG. 2.18. (*e*) Forța exercitată asupra unei sarcini pozitive în mișcare într-un cîmp magnetic.

3. *Legea sinusurilor.* Fie triunghiul definit prin $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ (fig. 2.18,*c*). Să înmulțim vectorial ambii membri ai acestei ecuații cu **A**:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

Însă $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$ iar mărimea ambilor membri trebuie să fie aceeași, astfel încît:

$$AC \sin (\mathbf{A}, \mathbf{C}) = AB \sin (\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

sau:

$$\frac{\sin (\mathbf{A}, \mathbf{C})}{B} = \frac{\sin (\mathbf{A}, \mathbf{B})}{C}. \qquad (2.16)$$

Această relație este tocmai *legea sinusurilor într-un triunghi.*

4. *Momentul.* Ideea de moment ne este familiară din multe cursuri de introducere în fizică. El este important pentru mișcarea corpurilor rigide discutată în capitolul 8. Momentul se referă la un punct și în termeni vectoriali are o expresie convenabilă:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (2.17)$$

unde **r** este vectorul de la punctul de referință pînă la vectorul **F**. Din figura 2.18, *d* se vede că momentul are o direcție perpendiculară atît pe **r** cît și pe **F**. De notat că mărimea lui **M** este $rF \sin \alpha$ și $r\sin \alpha$ este mărimea perpendicularei de la punct (*O* în figură) la **F**. Din figură se vede că $r\sin \alpha = r' \sin \alpha'$. Rezultă că momentul este independent atît în mărime cît și în direcție de punctul de pe direcția lui **F** pînă la care se desenează **r**.

5. *Forța ce acționează asupra unei particule în mișcare într-un cîmp magnetic.* Forța ce se exercită asupra unei sarcini electrice punctiforme ce se mișcă cu viteza **v** în cîmpul magnetic **B** este proporțională cu v înmulțit cu componenta perpendiculară a lui B pe v. În termenii produsului vectorial (vezi fig. 2.18, *e*):

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ (unități Gauss)} \qquad (2.18)$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{(unități SI)}.$$

Aici q este sarcina particulei iar c este viteza luminii. Despre legea ce dă această forță se va discuta mai în detaliu în volumul 2 și va fi folosită în capitolul 3 (pag. 89).

DERIVATE VECTORIALE

Viteza $\mathbf{v}$ a unei particule este un vector; accelerația $\mathbf{a}$ este de asemenea un vector. *Viteza* este rata de schimbare în timp a poziției unei particule. Poziția unei particule la orice moment de timp t poate fi specificată de vectorul $\mathbf{r}(t)$ desenat dintr-un punct fix O pînă la particulă, ca în figura 2.19, *a*. Pe măsură ce trece timpul, particula se mișcă și vectorul de poziție își schimbă direcția și mărimea (fig. 2.19, *b*). Diferența $\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$ este vectorul din figura 2.19, *c*:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1).$$

Dacă vectorul $\mathbf{r}$ este privit ca o funcție (vectorială) de o singură variabilă scalară t, valoarea lui $\Delta\mathbf{r}$ va fi complet determinată dacă cele două valori t_1 și t_2 sînt cunoscute. Astfel, în figura 2.19, *d* $\Delta\mathbf{r}$ este tocmai coarda P_1P_2. Raportul:

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

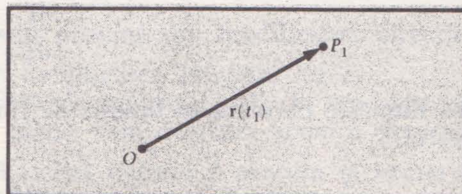


FIG. 2.19. (*a*) Poziția P_1 a unei particule la timpul t_1 este descrisă prin vectorul $\mathbf{r}(t_1)$ relativ la originea fixă din punctul O.

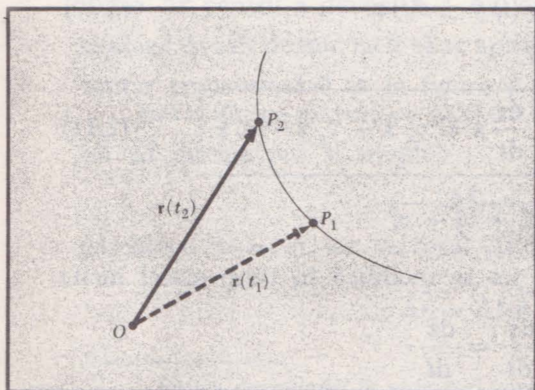


FIG. 2.19. (*b*) La timpul t_2 particula a avansat în P_2.

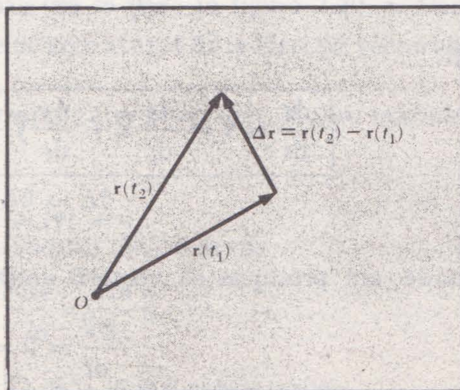


FIG. 2.19. (*c*) Vectorul $\Delta\mathbf{r}$ este diferența dintre $\mathbf{r}(t_2)$ și $\mathbf{r}(t_1)$.

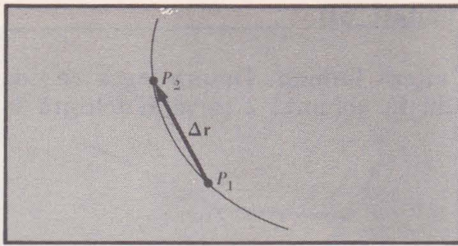


FIG. 2.19. (*d*) $\Delta \mathbf{r}$ este coarda dintre punctele P_1 și P_2 de pe traiectoria particulei.

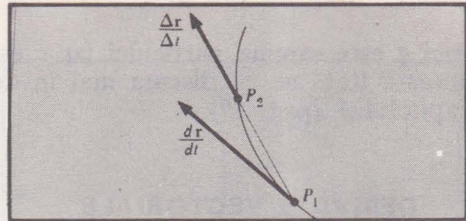


FIG. 2.19. (*e*) Pe măsură ce $\Delta t = t_2 - t_1 \to 0$, vectorul $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ coliniar cu coarda se apropie de vectorul $d\mathbf{r}/dt$ coliniar cu tangenta la traiectorie în punctul P_1.

este un vector coliniar cu coarda P_1P_2 dar mărit cu raportul $1/\Delta t$. Pe măsură ce Δt tinde spre zero, P_2 se apropie de P_1 și coarda P_1P_2 se apropie de tangenta în P_1. Atunci vectorul:

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \text{ se apropie de } \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

care este un vector tangent la curbă în P_1 și îndreptat în sensul în care variabila t crește de-a lungul curbei (fig. 2.19, *e*).

Viteza. Vectorul

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

se numește derivata în funcție de timp a lui **r**. Prin definiție vectorul viteză este:

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.19}$$

Mărimea $v = |\mathbf{v}|$ a vectorului viteză este un scalar. În termenii componentelor putem scrie:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{x}} + y(t)\,\hat{\mathbf{y}} + z(t)\,\hat{\mathbf{z}} \tag{2.20}$$

și:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{z}} = v_x\,\hat{\mathbf{x}} + v_y\,\hat{\mathbf{y}} + v_z\,\hat{\mathbf{z}}} \tag{2.21}$$

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

unde am presupus că vectorii unitari nu se modifică în timp astfel încît:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{y}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{z}}}{\mathrm{d}t}.$$

Putem scrie, în general, ecuația (2.20) fără să-l exprimăm pe **r** în componente:

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\,\hat{\mathbf{r}}(t)$$

unde scalarul $r(t)$ este lungimea vectorului iar $\hat{\mathbf{r}}(t)$ este vectorul de lungime unitate în direcția lui **r**. Derivata lui $\mathbf{r}(t)$ poate fi definită ca:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[r(t)\,\hat{\mathbf{r}}(t)] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t)\,\hat{\mathbf{r}}(t+\Delta t) - r(t)\,\hat{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t}. \tag{2.22}$$

Putem retranscrie numărătorul [1], reținînd numai primii doi termeni din dezvoltările în serie ale lui $r(t+\Delta t)$ și $\hat{\mathbf{r}}(t+\Delta t)$:

$$\left[r(t) + \frac{dr}{dt}\Delta t\right]\left[\hat{\mathbf{r}}(t) + \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\Delta t\right] - r(t)\hat{\mathbf{r}}(t) = \Delta t\left(\frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right) + (\Delta t)^2\left(\frac{dr}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right).$$

Cînd rezultatul de mai sus este plasat în ecuația (2.22), termenul al doilea al raportului tinde la 0 cînd $\Delta t \to 0$ și avem:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}. \tag{2.23}$$

Aici $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ reprezintă viteza de variație a direcției vectorului unitar $\hat{\mathbf{r}}$. Relația de mai sus reprezintă o exemplificare a regulii generale de derivare a produsului unui scalar $a(t)$ cu un vector $\mathbf{b}(t)$:

$$\frac{d}{dt}a\mathbf{b} = \frac{da}{dt}\mathbf{b} + a\frac{d\mathbf{b}}{dt}. \tag{2.24}$$

În ecuația (2.23) o contribuție la viteză provine din modificarea direcției lui $\hat{\mathbf{r}}$; cealaltă contribuție provine din modificarea lungimii lui r.

Deoarece vom folosi forma lui **v** dată de ecuația (2.23) (în mod special în capitolul 9, pentru mișcarea într-un plan), vom dezvolta acum o expresie similară pentru $d\mathbf{r}/dt$ folosind vectorul radial unitate $\hat{\mathbf{r}}$ precum și vectorul unitate perpendicular pe el și pe care îl vom denumi $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Pentru a înțelege mai bine cine sînt acești vectori unitari și derivatele lor în timp, să considerăm mișcarea unui punct pe o traiectorie circulară; în acest caz vectorul unitar $\hat{\mathbf{r}}$ se va modifica în intervalul de timp Δt cu mărimea $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ pentru a deveni $\hat{\mathbf{r}} + \Delta\hat{\mathbf{r}}$, după cum se vede în figura 2.20, *a*. Dacă se alege Δt atît de mic încît să se apropie de zero atunci $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ ia direcția vectorului unitar transversal $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ca în figura 2.20, *b*.

Mai mult, pe măsură ce Δt și $\Delta\theta$ corespunzător se apropie de zero mărimea lui $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ devine pur și simplu:

$$|\Delta\hat{\mathbf{r}}| = |\hat{\mathbf{r}}|\Delta\theta = \Delta\theta$$

(deoarece $|\hat{\mathbf{r}}| = 1$), iar vectorul $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ și raportul $\Delta\hat{\mathbf{r}}/\Delta t$ devin

$$\Delta\hat{r} = \Delta\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}; \quad \frac{\Delta\hat{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

[1] Pentru dezvoltarea în serie vezi pagina 73 de la sfîrșitul acestui capitol.

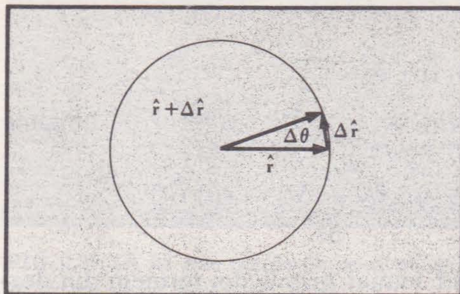


FIG. 2.20. (*a*) $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ este variația vectorului unitar $\hat{\mathbf{r}}$.

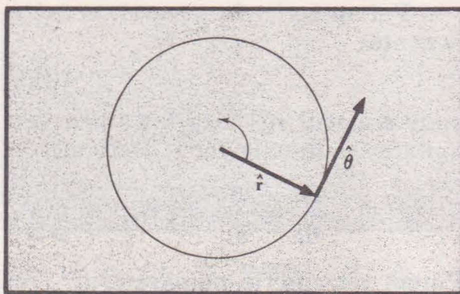


FIG. 2.20. (*b*) Vectorul unitar $\hat{\theta}$ este perpendicular pe $\hat{\mathbf{r}}$ și are sensul în sensul creșterii lui θ.

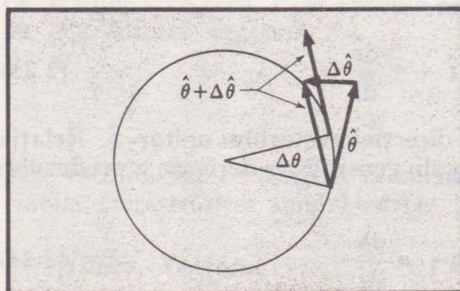


FIG. 2.20. (*c*) $\Delta\hat{\theta}$ este modificarea vectorului unitar $\hat{\theta}$.

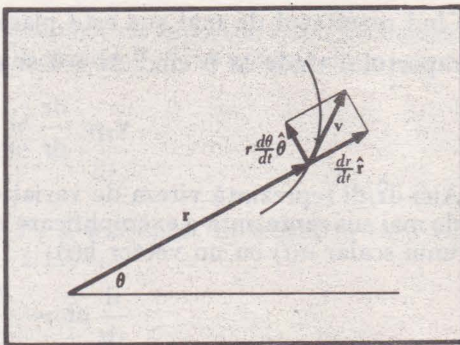


FIG. 2.21. Componentele vectorului viteză în funcție de $\hat{\mathbf{r}}$ și $\hat{\theta}$.

Cînd facem limita $\Delta t \to 0$, obținem derivata în timp a vectorului unitar:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{2.25}$$

Cu argumente similare, utilizînd figura 2.20, *c* se vede imediat că derivata în timp a lui $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ este

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{r}}. \tag{2.26}$$

Dacă vom considera acum un punct ce se mișcă într-un plan pe o direcție oarecare, ca în figura 2.21, recunoaștem că vectorul viteză **v** este compus la orice moment de timp din vectorul componentă radială $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t\ \hat{\mathbf{r}}$ și din vectorul componentă transversală $r\ \mathrm{d}\hat{\mathbf{r}}/\mathrm{d}t = r\hat{\boldsymbol{\theta}}\ \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$. Pentru ultimul vector am utilizat ecuația (2.25). Atunci expresia lui **v** în forma din ecuația (2.23) este:

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}} \tag{2.27}$$

Accelerația. Accelerația este tot un vector; el este legat de **v** în același mod în care **v** este legat de **r**. Vom defini accelerația ca fiind:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{2.28}$$

Utilizînd ecuația (2.21) obținem, în componente carteziene,

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{y}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{z}}} \tag{2.29}$$

În viitor, (cap. 9), vom avea nevoie de **a** și în funcție de r și de θ; din ecuația (2.27):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt}.$$

Făcînd apel la relațiile (2.25) și (2.26) pentru $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ și $d\hat{\boldsymbol{\theta}}/dt$, aducem expresia de mai sus în forma următoare:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dr}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{\mathbf{r}}.$$

Apoi după strîngerea termenilor și o mică rearanjare, se poate scrie în modul următor:

$$\boxed{\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}} \tag{2.30}$$

Această expresie va fi folosită în exemplul privind mișcarea pe un cerc (de mai jos) precum și în mod particular în studiul mișcării unei particule în jurul unui centru de forțe (în cap. 9).

EXEMPLU

Mișcarea circulară. Acest exemplu (prezentat în fig. 2.22) este foarte important din cauza numeroaselor cazuri de mișcare circulară întîlnite în fizică și în astronomie. Dorim să obținem expresii explicite, pentru vectorii viteză și accelerație ai unei particule ce se mișcă cu viteză constantă pe o orbită circulară de rază fixă r. O orbită circulară poate fi descrisă de:

$$\mathbf{r}(t) = r\,\hat{\mathbf{r}}(t) \tag{2.31}$$

unde r este constant și vectorul $\hat{\mathbf{r}}$ se rotește cu o viteză constantă.

Putem trata această problemă în oricare din următoarele două moduri: fie folosind expresiile din ecuațiile (2.27) pînă la (2.30) în funcție de r și de θ fie folosind axele $\hat{\mathbf{x}}$ și $\hat{\mathbf{y}}$ fixe în spațiu și ecuațiile (2.21) și (2.29).

Metoda 1. Deoarece r este constant, ecuația (2.27) ne dă pur și simplu $v = r\, d\theta/dt\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$. De obicei, viteza unghiulară $d\theta/dt$ se notează prin litera grecească ω. Ea se măsoară în radiani[1]

[1] Vezi pag. 72 de la sfîrșitul acestui capitol pentru explicarea radianilor.

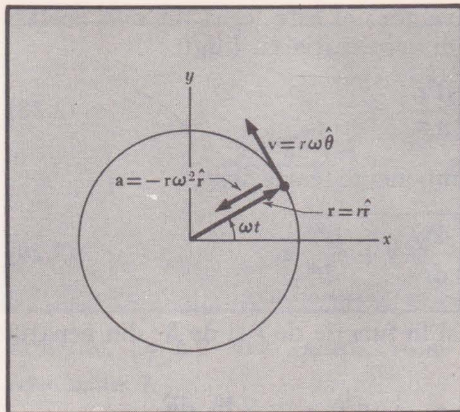


FIG. 2.22. O particulă în mişcare cu viteză constantă pe un cerc de rază r. Viteza unghiulară constantă este ω. Sînt arătate viteza şi acceleraţia particulei aşa cum rezultă din relaţiile (2.31) pînă la (2.38).

pe secundă (rad/s) şi în cazul de faţă este constantă. Astfel $\mathbf{v} = r\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$ iar viteza constantă a particulei este:

$$v = \omega r. \tag{2.32}$$

Pentru acceleraţie vom utiliza ecuaţia (2.30) care cu r constant şi $d\theta/dt = \omega$ constantă ne va da:

$$\boxed{\mathbf{a} = -r\omega^2\,\hat{\mathbf{r}}} \tag{2.33}$$

Acceleraţia este, astfel, constantă în mărime şi îndreptată înspre centrul traiectoriei circulare.

Metoda 2. În funcţie de componentele carteziene, vom scrie vectorul de poziţie al particulei în mişcare circulară la orice moment de timp t, în forma dată de ecuaţia (2.20):

$$\mathbf{r}(t) = r\cos\omega t\cdot\hat{\mathbf{x}} + r\sin\omega t\cdot\hat{\mathbf{y}}. \tag{2.34}$$

Atunci, vectorul viteză, dat de ecuaţia (2.21), cu r constant, este:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega r\sin\omega t\,\hat{\mathbf{x}} + \omega r\cos\omega t\,\hat{\mathbf{y}}. \tag{2.35}$$

Mărimea vectorului viteză este:

$$v = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \omega r\sqrt{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t} = \omega r \tag{2.36}$$

în concordanţă cu ecuaţia (2.29). Se poate vedea că vectorul $\mathbf{v}$ este perpendicular pe $\mathbf{r}$ prin faptul că produsul scalar al acestor vectori este zero.

În acord cu ecuaţia (2.29) găsim vectorul acceleraţie ca derivata în funcţie de timp a lui $\mathbf{v}$. Diferenţierea ecuaţiei (2.35) ne dă:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 r\cos\omega t\,\hat{\mathbf{x}} - \omega^2 r\sin\omega t\,\hat{\mathbf{y}} = -\omega^2(r\cos\omega t\,\hat{\mathbf{x}} + r\sin\omega t\,\hat{\mathbf{y}}) =$$
$$= -\omega^2\,\mathbf{r} = -\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}}. \tag{2.37}$$

Rezultatul acesta este identic cu cel obţinut în ecuaţia (2.33) prin metoda 1. Acceleraţia are mărimea constantă $a = \omega^2 r$ şi este îndreptată spre centru în acord cu $-\hat{\mathbf{r}}$. Folosind $v = \omega r$ din ecuaţia (2.36) sau din (2.32) se poate scrie mărimea acceleraţiei ca fiind:

$$a = \frac{v^2}{r}\cdot \tag{2.38}$$

Ea se numește accelerație *centripetă* (îndreptată spre centru) și vă este, poate, familiară din liceu.

Viteza unghiulară ω are o legătură simplă cu frecvența obișnuită f. În unitatea de timp, vectorul **r** din ecuația (2.34) mătură (parcurge) ω radiani astfel încît ω reprezintă numărul de radiani parcurși în unitatea de timp. Dar frecvența obișnuită f este definită ca numărul de cicluri complete parcurse în unitatea de timp. Deoarece sînt 2π radiani într-un cerc trebuie să avem:

$$2\pi f = \omega.$$

Perioada T a mișcării este definită ca timpul necesar pentru parcurgerea unui cerc (ciclu) complet. Vedem din ecuația (2.34) că un ciclu este parcurs în timpul T astfel încît $\omega T = 2\pi$, sau:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}.$$

Ca exemplu numeric, fie frecvența f de 50 de revoluții sau cicluri pe secundă (50 Hz). Atunci perioada:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0{,}02 \text{ s}$$

iar frecvența unghiulară este:

$$\omega = 2\pi f \approx 314 \text{ rad/s}.$$

Dacă raza orbitei circulare este de 10 cm, atunci viteza este:

$$v = \omega r = (314) \cdot (10) \approx 3{,}14 \times 10^3 \text{ cm/s} = 31{,}4 \text{ m/s}.$$

Accelerația în orice punct al orbitei este:

$$a = \omega^2 r = (314)^2\,(10) \approx 0{,}98 \times 10^6 \text{ cm/s}^2 = 9{,}8 \times 10^3 \text{ m/s}^2.$$

În capitolul 4 vom prezenta un exemplu numeric din care se va vedea că accelerația unui punct fixat pe suprafața pămîntului la ecuator datorată mișcării pămîntului în jurul axei sale este de $3{,}4$ cm/s^2.

INVARIANȚI

Am menționat (pag. 44), că independența în alegerea axelor de coordonate constituie un aspect important al legilor fizicii precum și un motiv puternic pentru folosirea notației vectoriale. Să considerăm valoarea mărimii unui vector în două sisteme de coordonate diferite care au originea comună dar care sînt rotite unul în raport cu celălalt ca în figura 2.23. În cele două sisteme de coordonate:

$$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{x}} + A_y\,\hat{\mathbf{y}} + A_z\,\hat{\mathbf{z}}$$

și

$$\mathbf{A} = A'_x\,\hat{\mathbf{x}}' + A'_y\,\hat{\mathbf{y}}' + A'_z\,\hat{\mathbf{z}}' \quad \text{(vezi fig. 2.23)}.$$

Deoarece **A** nu s-a modificat, A^2 trebuie să fie același și astfel:

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_{x'}'^2 + A_{y'}'^2 + A_{z'}'^2.$$

Cu alte cuvinte mărimea unui vector este aceeași în orice sistem de coordonate ce diferă unul de altul printr-o rotație rigidă a axelor de coordonate; se spune despre această mărime că are o *formă invariantă* (sau mai pe scurt

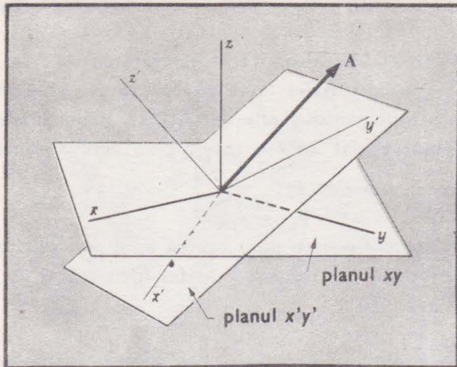


FIG. 2.23. Vectorul **A** poate fi descris în coordonatele x,y,z sau în coordonatele x',y',z' obţinute din x,y,z printr-o rotaţie arbitrară. Spunem că A^2 este o formă invariantă în raport cu rotaţia. Aceasta înseamnă $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_{x'}^2 + A_{y'}^2 + A_{z'}^2$.

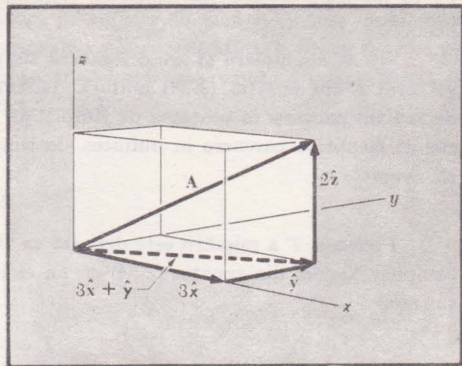


FIG. 2.24. Vectorul $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$ şi proiecţia sa în planul xy.

că este un invariant). Problema 20 (de la sfîrşitul acestui capitol) ne oferă o metodă pentru verificarea acestei invarianţe. Se vede clar, din definiţia sa, că produsul scalar din ecuaţia (2.7) are o formă invariantă şi că mărimea produsului vectorial este un alt invariant. Presupunem că nu există nici o modificare de scară; de exemplu, lungimea ce reprezintă o unitate rămîne neschimbată la o rotaţie.

Vorbim cîteodată despre o funcţie scalară de poziţie, cum ar fi temperatura $T(x, y, z)$ în punctul (x, y, z), ca despre un *cîmp scalar*. În mod similar, un vector a cărui valoare este o funcţie de poziţie, cum este viteza $\mathbf{v}(x, y, z)$ a unei particule în punctul (x, y, z), se zice că este un *cîmp vectorial*. O bună parte din obiectul analizei vectoriale se referă la cîmpurile scalare şi vectoriale precum şi la operaţiile diferenţiale cu vectori, subiecte ce vor fi tratate in extenso în volumul 2.

Exemple de diferite operaţii elementare cu vectori.

Vom considera vectorul (fig. 2.24):

$$\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}.$$

(1) Să se afle lungimea lui **A**. Formăm pe A^2:

$$A^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14$$

astfel încît $A = \sqrt{14}$ este mărimea lui **A**.

(2) Care este lungimea proiecţiei lui **A** pe planul xy? Vectorul ce reprezintă proiecţia lui **A** pe planul xy este $3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$; pătratul lungimii acestui vector este $3^2 + 1^2 = 10$.

(3) Construiţi un vector situat în planul xy şi perpendicular pe **A**.

Dorim un vector de forma:

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}}$$

cu proprietatea $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, sau:

$$(3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}) \cdot (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}}) = 0.$$

Efectuînd produsul scalar găsim:

$$3B_x + B_y = 0$$

sau:

$$\frac{B_y}{B_x} = -3.$$

Cu datele din problemă nu se poate determina și lungimea vectorului **B** (vezi fig. 2.25).

(4) Construiți vectorul unitate $\hat{\mathbf{B}}$. Trebuie să avem $\hat{B}_x^2 + \hat{B}_y^2 = 1$ sau:

$$\hat{B}_x^2(1^2 + 3^2) = 10\hat{B}_x^2 = 1.$$

Astfel:

$$\hat{\mathbf{B}} = \sqrt{1/10}\,\hat{\mathbf{x}} - \sqrt{9/10}\,\hat{\mathbf{y}} = \frac{\hat{\mathbf{x}} - 3\,\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{10}}.$$

(5) Găsiți produsul scalar al vectorului **A** cu vectorul $\mathbf{C} = 2\hat{\mathbf{x}}$ (vezi fig. 2.26). Se vede direct că el este $2 \times 3 = 6$.

(6) Găsiți expresiile lui **A** și **C**, într-un sistem de coordonate obținut din vechiul sistem de coordonate printr-o rotație de unghi $\pi/2$ în sensul acelor de ceas privind de-a lungul direcției pozitive a axei z (fig. 2.27). Noii vectori unitari $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$, $\hat{\mathbf{z}}'$ sînt legați de cei vechi prin:

$$\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{y}} \qquad \hat{\mathbf{y}}' = -\hat{\mathbf{x}} \qquad \hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{z}}.$$

FIG. 2.25. Vectorul **B** se află în planul xy și este perpendicular pe **A**.

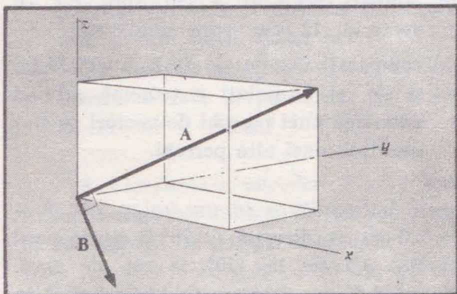


FIG. 2.26. Proiecția pe **A** a vectorului $\mathbf{C} = 2\hat{\mathbf{x}}$; $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} =$ (proiecția lui **C** pe **A**) înmulțit cu A.

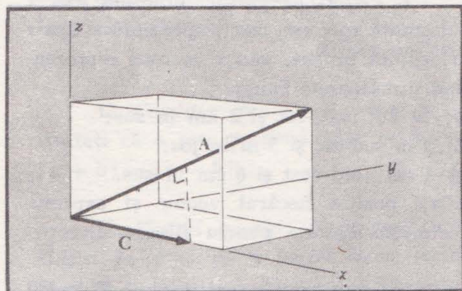


FIG. 2.27. Sistemul de referință accentuat x', y', z' se obține din sistemul neaccentuat x, y, z printr-o rotație de $+\pi/2$ în jurul axei z.

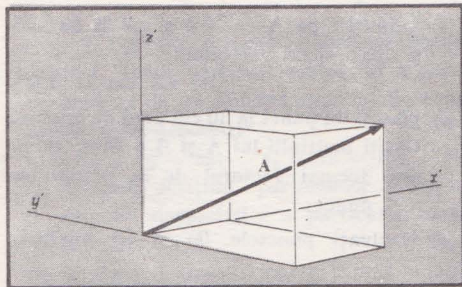
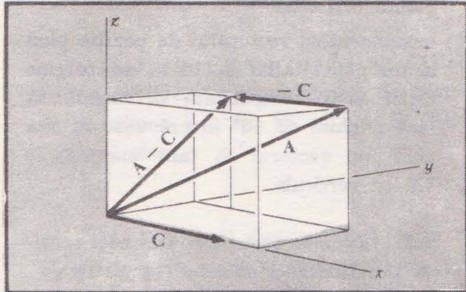


FIG. 2.28. Vectorul **A** − **C**.



Unde apărea $\hat{x}$ avem acum $-\hat{y}'$ și unde apărea $\hat{y}$ avem acum $\hat{x}'$ astfel încît:

$$\mathbf{A} = \hat{x}' - 3\hat{y}' + 2\hat{z}'; \quad \mathbf{C} = -2\hat{y}'.$$

(7) Găsiți produsul scalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ în sistemul $x'y'z'$. Cu ajutorul rezultatului din (6) avem $(-3)(-2) = 6$ exact ca în sistemul xyz.

(8) Aflați produsul vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$. În sistemul xyz acesta este:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\hat{y} - 2\hat{z}.$$

Formînd produsele scalare se poate confirma că acest vector este perpendicular atît pe **A** cît și pe **C**.

(9) Aflați vectorul $\mathbf{A} - \mathbf{C}$. Avem (vezi fig. 2.28)

$$\mathbf{A} - \mathbf{C} = (3-2)\,\hat{x} + \hat{y} + 2\,\hat{z} = \hat{x} + \hat{y} + 2\,\hat{z}.$$

PROBLEME

1. *Vectori de poziție.* Folosind axa x îndreptată spre est, axa y spre nord și axa z îndreptată în sus, găsiți vectorii reprezentînd următoarele puncte:
(*a*) 10 km nord-est și 2 km în sus;
(*b*) 5 m sud-est și 5 m în jos;
(*c*) 1 cm nord-vest și 6 cm în sus.
Aflați poziția fiecărui vector și expresia vectorului unitate pentru fiecare direcție.

2. *Componentele vectorului.* Folosind axele din problema 1 aflați următoarele:
(*a*) componentele vectorului de poziție de lungime 5 cm din origine și pînă la punctul situat pe direcția sud-est în planul orizontal.
(*b*) componentele vectorului de poziție pînă la un punct aflat la 15 m de origine astfel încît componenta orizontală să facă unghiul de 60° înspre vest cu axa nord iar vectorul să facă unghiul de 45° cu verticala.

3. *Adunarea vectorilor.* Desenați rezultatele următoarelor adunări vectoriale:
(*a*) adunați vectorul 2 cm spre est cu vectorul 3 cm spre nord-vest;
(*b*) adunați vectorul 8 cm spre est cu vectorul 12 cm spre nord-vest;
(*c*) comparați rezultatele de la punctele (*a*) și (*b*), și formulați o teoremă privind adunarea unei perechi de vectori ce sînt multiplii unei alte perechi.

4. *Înmulțirea cu un scalar.* Fie $\mathbf{A} = 2{,}0$ cm cu direcția de 70° la est de nord și $\mathbf{B} = 3{,}5$ cm la 130° la est de nord. Folosind fie un raportor fie hîrtie liniată în coordonate polare:
(*a*) desenați vectorii descriși mai sus precum și alți doi de 2,5 ori mai lungi decît primii;
(*b*) înmulțiți pe **A** cu -2 și pe **B** cu $+3$ și aflați suma vectorială;
R: 9,2 cm la 152°.
(*c*) plasați un punct la 10 cm nord de origine. Găsiți multiplii lui **A** și **B** a căror sumă este tocmai vectorul de la origine la acel punct;
(*d*) rezolvați punctele (*b*) și (*c*) analitic.

5. *Produse scalare și vectoriale a doi vectori.* Fiind dați vectorii $\mathbf{a} = 3\hat{x} + 4\hat{y} -$

$-5\hat{z}$ și $\mathbf{b} = -\hat{x} + 2\hat{y} + 6\hat{z}$, calculați cu ajutorul metodelor vectoriale:

(*a*) lungimea fiecăruia; **R**: $a = \sqrt{50}$; $b = \sqrt{41}$.

(*b*) produsul scalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; **R**: -25.

(*c*) unghiul dintre ei; **R**: $123{,}5°$.

(*d*) cosinușii directori ai fiecăruia;

(*e*) suma și diferența vectorială $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ și $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

R: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\hat{x} + 6\hat{y} + \hat{z}$.

(*f*) produsul vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

R: $34\hat{x} - 13\hat{y} + 10\hat{z}$.

6, *Algebra vectorială*. Fiind dați doi vectori astfel încît $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 11\hat{x} - \hat{y} + 5\hat{z}$ și $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -5\hat{x} + 11\hat{y} + 9\hat{z}$:

(*a*) aflați $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$;

(*b*) găsiți unghiul dintre $\mathbf{a}$ și $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ folosind metode vectoriale.

7. *Adunarea vectorială a vitezelor*. Pe o apă liniștită un om poate vîsli o barcă cu 8 km pe oră.

(*a*) Dacă el vîslește exact perpendicular pe direcția unui curent ce curge cu 3 km pe oră, care va fi direcția traiectoriei sale și care va fi viteza sa?

(*b*) În ce direcție ar trebui să vîslească el, pentru a trece perpendicular pe curent și care ar fi viteza?

8. *Compunerea vitezelor*. Pilotul unui avion dorește să ajungă într-un loc situat la 200 km est de poziția sa actuală. Vîntul bate din spre nord-vest cu 30 km pe oră. Calculați vectorul viteză, în raport cu masa de aer în mișcare dacă orarul îi cere pilotului să ajungă la destinație în 40 de minute.

R: $\mathbf{v} = 279\hat{x} + 21\hat{y}$ km/h; $\hat{x}$ = est; $\hat{y}$ = nord.

9. *Operații vectoriale; vectorul poziție relativă*. Două particule emise de o sursă comună au la un anumit moment de timp următoarele deplasări:

$\mathbf{r}_1 = 4\hat{x} + 3\hat{y} + 8\hat{z}$; $\mathbf{r}_2 = 2\hat{x} + 10\hat{y} + 5\hat{z}$.

(*a*) Schițați pozițiile particulelor și scrieți expresia deplasării $\mathbf{r}$ a particulei *2* față de particula *1*.

(*b*) Utilizați produsul scalar pentru a afla mărimea fiecărui vector.

R: $r_1 = 9{,}4$; $r_2 = 11{,}4$; $r = 7{,}9$.

(*c*) Calculați unghiurile dintre toate perechile posibile de vectori.

(*d*) Calculați proiecția lui $\mathbf{r}$ pe $\mathbf{r}_1$. **R**: $-1{,}2$.

(*e*) Calculați produsul vectorial $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$.

R: $-65\hat{x} - 4\hat{y} + 34\hat{z}$.

10. *Apropierea cea mai mare dintre două particule*. Două particule, *1* și *2*, se deplasează de-a lungul axelor x și y cu vitezele $\mathbf{v}_1 = 2\hat{x}$ cm/s, respectiv $\mathbf{v}_2 = 3\hat{y}$ cm/s. La $t = 0$ ele se găsesc în pozițiile: $x_1 = -3$ cm, $y_1 = 0$; $x_2 = 0$, $y_2 = -3$ cm.

(*a*) Aflați vectorul $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ care reprezintă poziția lui *2* în raport cu *1* în funcție de timp.

R: $\mathbf{r} = (3 - 2t)\,\hat{x} + (3t - 3)\,\hat{y}$ cm.

(*b*) Cînd și unde este apropierea dintre aceste două particule cea mai mare?

R: $t = 1{,}15$ s.

11. *Diagonala mare a unui cub*. Care este unghiul dintre două diagonale mari ale unui cub ce se intersectează?

(*O diagonală mare* unește două vîrfuri și trece prin interiorul cubului. *O diagonală mică* unește două vîrfuri și este conținută într-o față a cubului.)

R. arc cos (1/3).

12. *Condiția pentru a avea* $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Arătați că $\mathbf{a}$ este perpendicular pe $\mathbf{b}$ dacă $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

13. *Vectori paraleli și perpendiculari*. Găsiți pe x și pe y astfel încît vectorii $\mathbf{B} = x\hat{x} + 3\hat{y}$ și $\mathbf{C} = 2\hat{x} + y\hat{y}$ să fie fiecare perpendicular pe $\mathbf{A} = 5\hat{x} + 6\hat{y}$. Arătați acum că $\mathbf{B}$ și $\mathbf{C}$ sînt paraleli. Mai este adevărat, în trei dimensiuni, că doi vectori perpendiculari pe un al treilea sînt cu necesitate paraleli între ei?

14. *Volumul unui paralelipiped*. Paralelipipedul are muchiile descrise de vectorii de la origine $\hat{x} + 2\hat{y}$, $4\hat{y}$, și $\hat{y} + 3\hat{z}$. Aflați volumul său.

R. 12

15. *Echilibrul forțelor*. Trei forțe $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ și $\mathbf{F}_3$ acționează simultan asupra unei particule punctiforme. Forța rezultantă $\mathbf{F}_R$ este pur și simplu suma vectorială a forțelor.

Se zice că particula se află în echilibru dacă $\mathbf{F}_R = 0$.

(a) Arătați că dacă $\mathbf{F}_R = 0$ atunci vectorii reprezentînd cele trei forțe formează un triunghi.

(b) Dacă $\mathbf{F}_R = 0$, ca mai sus, este posibil ca unul dintre vectori să se afle în afara planului determinat de ceilalți doi?

(c) O particulă supusă unei forțe verticale de sus în jos de 10 newtoni (N) și suspendată de un fir (tensiunea 15 N) făcînd un unghi de 0,1 radiani cu verticala, nu poate fi în echilibru. Care este a treia forță necesară pentru a produce echilibrul?

16. *Lucrul mecanic efectuat de forțe.* Forțele constante $\mathbf{F}_1 = \hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}$ (N) și $\mathbf{F}_2 = 4\hat{\mathbf{x}} - 5\hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}}$ (N) acționează împreună asupra unei particule în timpul deplasării din punctul A (20, 15, 0) (m) în punctul B (0, 0, 7) (m).

(a) Care este lucrul mecanic efectuat asupra particulei (în J)? Lucrul mecanic efectuat (capitolul 5) este dat de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$, unde $\mathbf{F}$ este forța rezultantă (aici $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$) iar $\mathbf{r}$ este deplasarea.

R: -48 J.

(b) Calculați separat lucrul mecanic efectuat de forțele $\mathbf{F}_1$ și $\mathbf{F}_2$.

(c) Să presupunem că ar acționa aceleași forțe dar deplasarea s-ar face de la B la A. Care este lucrul mecanic efectuat asupra particulei în acest caz?

17. *Momentul forței față de un punct.* Momentul $\mathbf{M}$ al forței față de un punct este dat de $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, unde $\mathbf{r}$ este vectorul îndreptat de la punctul dat spre punctul de aplicație al lui $\mathbf{F}$. Să considerăm forța $\mathbf{F} = -3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$ (N) acționînd în punctul $7\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$ (m). Să ne amintim că $\mathbf{F} \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

(a) Care este momentul, în Nm, față de origine? (Exprimați, doar, rezultatul ca o combinație liniară de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, și $\hat{\mathbf{z}}$.)

R. $14\hat{\mathbf{x}} - 38\hat{\mathbf{y}} + 16\hat{\mathbf{z}}$.

(b) Care este momentul față de punctul (0, 10, 0)?

R: $-36\hat{\mathbf{x}} - 38\hat{\mathbf{y}} - 14\hat{\mathbf{z}}$.

18. *Viteza și accelerația: derivarea unui vector.* Aflați viteza și accelerația punctelor descrise de următorii vectori de poziție (t = timpul în secunde):

(a) $\mathbf{r} = 16t\hat{\mathbf{x}} + 25t^2\hat{\mathbf{y}} + 33\hat{\mathbf{z}}$ m.

(b) $\mathbf{r} = 10 \sin 15t\hat{\mathbf{x}} + 35t\hat{\mathbf{y}} + e^{6t}\,\hat{\mathbf{z}}$ m.

(Pentru derivate vezi notele matematice de la sfîrșitul acestui capitol.)

19. *Zboruri la întîmplare.* O particulă urmează în spațiu, o traiectorie ce constă din N pași egali, fiecare dintre ei de lungime s. Direcția în spațiu a fiecărui pas este complet întîmplătoare fără nici o relație sau corelație între oricare doi pași. Deplasarea totală este:

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{s}_i.$$

Arătați că media pătratului distanței dintre pozițiile inițiale și finale este $\langle S^2 \rangle = Ns^2$, unde $\langle\ \rangle$ înseamnă valoarea medie. [Indicație: faptul că direcția unui pas este independentă de direcția oricărui alt pas conduce la $\langle \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \rangle = 0$ pentru toți i și j cu excepția $i = j$.]

20. *Invarianță.* Să considerăm un vector $\mathbf{A}$, într-un sistem de coordonate carteziene cu vectorii unitari $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ și $\hat{\mathbf{z}}$. Vom roti acum acest sistem cu unghiul θ în jurul axei $\hat{\mathbf{z}}$.

(a) Exprimați noii vectori unitari $\hat{\mathbf{x}}'$ și $\hat{\mathbf{y}}'$ în funcție de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ și θ; $\hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{z}}$.

(b) Exprimați pe $\mathbf{A}$ în funcție de $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$ și $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$, $\hat{\mathbf{z}}'$; treceți la $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ și $\hat{\mathbf{z}}$ și aflați astfel relațiile dintre $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$ și A_x, A_y, A_z.

(c) Arătați că $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A'^2_{x'} + A'^2_{y'} + A'^2_{z'}$. (Această problemă, transpusă pentru o rotație arbitrară în trei dimensiuni, este complicată. O metodă ar fi să utilizăm cei nouă cosinuși directori între care există șase relații, trei din ortogonalitatea lui $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$ și $\hat{\mathbf{z}}'$ și trei din faptul că suma pătratelor cosinușilor directori este unu.)

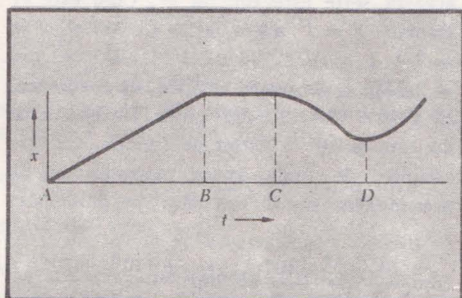
NOTE MATEMATICE

Derivate în raport cu timpul, viteza şi accelerația. Dinamica presupune mişcarea particulelor şi a obiectelor şi în consecință evoluția lor în timp; cu alte cuvinte, anumite mărimi ce descriu particulele sau obiectele, se modifică în timp. Foarte adesea, pentru descrierea sistemului fizic vom utiliza coordonatele x, y, şi z. La sfîrşitul acestui paragraf, vom introduce alte două tipuri importante de sisteme de coordonate: cilindrice şi sferice.

Descrierea cinematică se face cu ajutorul coordonatelor x, y şi z ca funcții de timp. O astfel de descriere este dată în figura 2.29 unde x este reprezentat în funcție de timpul t. Pentru a înțelege cum se modifică x, panta acestei curbe constituie o caracteristică importantă. Între A şi B, x creşte uniform şi panta, care este tangenta unghiului format de curbă şi axa t, este constantă. Între B şi C curba este paralelă cu axa t şi panta este zero. De notat că x nu se modifică şi astfel panta este o reflectare a componentei x a vitezei. Între C şi D panta devine negativă, tangenta unghiului este de asemenea negativă, şi x descreşte. În D panta devine zero iar pe urmă creşte. În relația (2.21) am definit pe dx/dt ca viteza în direcția x şi aceasta este, bineînțeles, şi definiția pantei. Este important să ne reamintim că viteza în orice direcție particulară are o mărime ce poate fi sau pozitivă sau negativă.

S-ar pierde prea mult timp şi s-ar consuma prea multă hîrtie, dacă ar trebui

FIG. 2.29. Graficul lui x în funcție de t.



să facem un grafic de fiecare dată cînd vrem să descriem o anumită mişcare. În locul graficului se dă de obicei o relație funcțională între coordonatele x, y sau z şi timpul t. O astfel de relație este $x = vt$. Deoarece $dx/dt = v$, vedem că viteza este o constantă v. Alt exemplu este $x = \frac{1}{2}at^2$; în acest caz $dx/dt = at = v$. Putem acum să facem graficul lui v în funcție de t. Cine ar fi panta acestei curbe? Am discutat deja (vezi relația (2.28)) acest lucru şi ştim că ea este tocmai accelerația pe direcția x; astfel $d^2x/dt^2 = dv/dt = a$. În următoarele capitole ne vom referi la accelerație şi o vom folosi foarte des.

Merită să notăm aici că unitățile de viteză se află împărțind unitatea de *lungime* la unitatea de *timp*. Sînt desigur multe unități pentru lungime şi multe unități pentru timp. După cum am menționat în capitolul 1, vom folosi de obicei metrul pentru lungime şi secunda pentru timp astfel încît unitatea noastră pentru viteză este metrul pe secundă (m/s). Cu toate acestea, mile pe oră (mi/h), țoli pe secol sau kilometri pe microsecundă (km/µs) ar fi unități tot atît de bune. (În CGS unitatea de măsură este cm/s.)

La derivare este util să ne reamintim, regula privind derivarea unui produs de funcții. Derivata produsului este egală cu derivata primului factor înmulțită cu toți ceilalți plus derivata celui de-al doilea factor înmulțită cu toți ceilalți plus derivata celui de-al treilea factor înmulțită cu toți ceilalți etc.

Aflați viteza şi accelerația pe direcțiile x, y şi z dacă:

$$x = 35\ t$$

$$y = \frac{1}{2}At^2$$

$$z = \frac{1}{2}Ct^4 + \frac{1}{4}Dt^3$$

$$x = 5 \cos 8t$$

$$y^2 = 25\ t$$

$$z = 7e^{-t}$$

$$x = t^2 \sin 6t$$
$$y = t^{1/2} \operatorname{tg} 5t$$
$$z = A \ln t.$$

Dacă nu sînteți familiarizați cu derivata sinusului sau a cosinusului iată mai jos deducerea formulei:

$$\frac{d}{dt} \sin t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(t + \Delta t) - \sin t}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin t \cos \Delta t + \cos t \sin \Delta t - \sin t}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin t + \cos t \, \Delta t - \sin t}{\Delta t} = \cos t. \quad (2.39)$$

Vezi relațiile (2.44) și (2.45) pentru $\sin \Delta t$ și $\cos \Delta t$. Asemănător

$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t. \quad (2.40)$$

Dacă vrem să derivăm pe $\sin \omega t$, înlocuim $\omega t = z$. Atunci

$$\frac{d}{dt} \sin \omega t = \frac{d}{dz} \sin z \frac{dz}{dt} = \omega \cos z = \omega \cos \omega t. \quad (2.41)$$

Putem arăta acum că

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tg} t = \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos t}{\cos t} + \frac{\sin t \sin t}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t.$$

Unghiuri. În descrierea poziției unei particule, așa cum a fost cazul în mișcarea circulară (pagina 63), unghiurile sînt folosite adesea ca element util al acestei descrieri. Viteza unghiulară este derivata unghiului în raport cu timpul avînd vectorul orientat paralel cu axa de rotație. Peste tot, în fizică, se folosește o mărime naturală de măsură a unghiului și ea se numește radian (rad.) Un radian este unghiul subîntins de un arc de cerc a cărui lungime este egală tocmai cu raza cercului din care face parte. Deoarece circumferința este de 2π ori raza, unghiul cercului complet, notat adesea prin 360°, este 2π rad. Împărțind 360 prin 2π obținem 57,3°, care este tocmai valoarea în grade a unui radian. Viteza unghiulară va fi măsurată în radiani pe secundă. Știind viteza unghiulară, putem obține ușor viteza liniară, dacă raza este constantă, doar prin înmulțire cu raza [vezi relația (2.32)]. De notat că radianii nu au dimensiuni; cu alte cuvinte ei sînt lungime împărțită la lungime, arc împărțit la rază.

Iată mai jos cîteva probleme privind măsura unghiurilor:

1. Aflați în radiani unghiurile de 90°, 240° și 315°.

2. Dacă $\theta = \frac{1}{5} t$, aflați viteza unghiulară.

Considerîndu-l pe θ dat în radiani, aflați viteza unghiulară în grade pe secundă (°/s).

3. O particulă se mișcă, pe un cerc de rază 15 m, cu viteza de 5 m/s. Aflați viteza unghiulară.

Funcția e^x. O întrebare interesantă din punct de vedere matematic este: ce funcție are o derivată egală cu însăși funcția? Dacă ne imaginăm că această funcție ar putea fi reprezentată printr-o serie infinită atunci s-ar putea ghici următoarea serie:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Dacă o derivăm în raport cu x, vedem că primul termen dă zero, dar următorul dă 1, următorul x, următorul $x^2/2!$ și așa mai departe, astfel încît avem tocmai seria de la care am plecat. Prin definiție această serie este funcția e^x. Cine este e? Punînd $x = 1$ avem $e^1 = e$. Astfel $e = 1 + 1 + 1/2 + 1/3! + 1/4! + 1/5! + \dots = 2{,}7183 \dots$ Se poate verifica, de asemenea, că $e^{x+y} = e^x e^y$. Ne-am putea întreba de ce nu este și 10^x o astfel de funcție. Cu alte cuvinte, de unde apare mărimea e? Să presupunem că îl calculăm pe $d(10^x)/dx$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{x+\Delta x} - 10^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^x 10^{\Delta x} - 10^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^x(10^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 10^x \times 2,30 \ldots =$$

$$= 2,30 \ldots \times 10^x.$$[1]

Din acest punct de vedere se observă că e este tocmai acea mărime pentru care:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x. \qquad (2.42)$$

Unul dintre motivele importanței unei asemenea mărimi pentru fizică este și faptul că ne întîlnim adesea cu o ecuație de forma $dy/dx = ky$ sau derivata lui y este egală cu o constantă înmulțită cu y. Vedem că putem scrie $dy/kdx = y$; și dacă îl considerăm pe kx ca o variabilă independentă z, atunci $dy/dz = y$. Amintindu-ne relația (2.42) vedem că $y = e^z = e^{kx}$ este tocmai funcția ce satisface ecuația noastră. Astfel, am „găsit o soluție" ecuației $dy/dx = ky$.

Dăm aici cîteva proprietăți ale lui e^x : $e^0 = 1$; $e^{-\infty} = 0$; $e^1 = e$ și $e^\alpha \approx 1 + \alpha$, unde α este foarte mic. Notăm aici că seria lui e^x arată asemănător cu seriile lui $\sin x$ și $\cos x$ cu excepția faptului că în ultimele două serii semnele termenilor alternează și au doar puteri impare, respectiv, pare în x. Cei cu experiență în matematici știu că $\sqrt{-1} = i$ își alternează semnul cînd este ridicat la puteri crescătoare. Să vedem cum ar arăta $e^{i\theta}$:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} +$$

$$+ \frac{(i\theta)^5}{5!} \ldots = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + i\theta -$$

$$- \frac{i\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} \ldots \qquad (2.43)$$

---

[1] Factorul 2,30 ... ... este logaritmul natural al lui 10. Fie $10^{\Delta x} = 1 + \alpha$ unde atît Δx cît și α sînt mărimi mici

$$\log_e 10^{\Delta x} = 2,30 \ldots \log_{10} 10^{\Delta x} = 2,30 \ldots \Delta x$$

$$\log_e(1 + \alpha) = \alpha.$$

Deci $\alpha = (2,30 \ldots)\Delta x$. Puteți verifica acest rezultat folosind o tabelă de logaritmi.

adică tocmai $\cos\theta + i\sin\theta$. Relația:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

se numește *teorema lui De Moivre*, și vom avea ocazia să o folosim în capitolul 7 (la notele matematice).

Cînd am dedus relația (2.39) am folosit $\sin(\theta + \Delta\theta) = \sin\theta\cos\Delta\theta + \cos\theta\sin\Delta\theta \approx \approx \sin\theta + \cos\theta\Delta\theta$, unde $\Delta\theta$ este o cantitate mică. Cu alte cuvinte, $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$ și $\cos\Delta\theta \approx 1$, unde $\Delta\theta$ este un unghi mic. De reținut că unghiul este măsurat în radiani. Cititorul poate să-și caute în tabele valorile sinusului și ale cosinusului și să verifice el însuși cele de mai sus. Aproximațiile de mai sus reprezintă chiar primii termeni din dezvoltarea în serie a sinusului și a cosinusului:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} \ldots \qquad (2.44)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \ldots \qquad (2.45)$$

De notat că dacă θ este mic, de exemplu 0,10, atunci termenul al doilea din seria sinusului este $\theta^3/6 = 1/6\,000$ sau $1/600$ din primul termen. Facem astfel o eroare mică omițînd al doilea termen, și, la limită, cînd θ tinde la zero, aproximația este strict corectă.

Dezvoltarea în serie. În fizică este, adesea, de mare importanță să putem calcula valoarea unei funcții într-un punct cînd cunoaștem valoarea ei într-un punct învecinat. Pentru acest lucru se folosește dezvoltarea în *serie Taylor*. În vecinătatea punctului x_0, valoarea funcției $f(x)$ este dată de

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x = x_0} +$$

$$+ \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x = x_0} + \ldots \qquad (2.46)$$

Raportul termenului al treilea către al doilea este:

$$\frac{\frac{1}{2}(x - x_0)^2\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x = x_0}}{(x - x_0)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x = x_0}} \approx (x - x_0)$$

exceptînd cazurile cînd derivatele au o comportare neobişnuită. Astfel, dacă $x - x_0$ este mic în comparaţie cu 1, cu o mică eroare (care cel puţin poate fi calculată) putem aproxima pe $f(x)$ prin formula:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0} \quad (2.47)$$

Să presupunem, de exemplu, că $y = Ax^5$ şi că îl cunoaştem pe $y_0 = Ax_0^5$ şi dorim să îl calculăm pe y în punctul $x = x_0 + \Delta x$. Atunci:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} = 5Ax_0^4; \ (x - x_0)\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} = \Delta x\, 5Ax_0^4$$

şi astfel:

$$y = Ax_0^5 + 5Ax_0^4\Delta x \ldots \quad (2.48)$$

Să scriem următoarea relaţie:

$$(a + bx)^n = a^n\left(1 + \frac{bx}{a}\right)^n$$

şi folosind dezvoltarea binomială obţinem

$$a^n\left(1 + \frac{bx}{a}\right)^n = a^n\left[1 + n\left(\frac{bx}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{bx}{a}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots + \ldots\right]. \quad (2.49)$$

Dacă bx/a este mic în comparaţie cu 1, obţinem o bună aproximaţie renunţînd la toţi termenii de după $n(bx/a)$. Aplicînd această relaţie problemei anterioare putem scrie:

$$y = A(x_0 + \Delta x)^5 = Ax_0^5\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^5 = Ax_0^5\left(1 + 5\frac{\Delta x}{x_0} \ldots\right) = Ax_0^5 + 5Ax_0^4\,\Delta x \ldots$$

care concordă cu relaţia (2.48).

Dacă x este mic în raport cu 1, demonstraţi următoarele aproximaţii:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x \ldots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x \ldots$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x \ldots$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x \ldots$$

Vectori şi coordonate sferice. Poziţia unei particule este dată în coordonate sferice prin r, θ, φ. Aici r este mărimea vectorului $\mathbf{r}$ de la origine la particulă; θ este unghiul dintre $\mathbf{r}$ şi axa polară z; iar φ este unghiul dintre axa x şi proiecţia lui $\mathbf{r}$ pe planul ecuatorial xy. Luăm $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Proiecţia lui $\mathbf{r}$ pe planul xy are mărimea $r\sin\theta$. Notaţi că poziţia în coordonate carteziene este dată prin:

$x = r\sin\theta\cos\varphi$; $\quad y = r\sin\theta\sin\varphi$;
$z = r\cos\theta$ ca în figura 2.30. (2.50)

1. Fie prima particulă la $\mathbf{r}_1 \equiv (r_1, \theta_1, \varphi_1)$ şi o a doua particulă la $\mathbf{r}_2 \equiv (r_2, \theta_2, \varphi_2)$. Fie θ_{12} unghiul dintre $\mathbf{r}_1$ şi $\mathbf{r}_2$. Exprimînd produsul scalar $\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2 = \cos\theta_{12}$ în funcţie de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ arătaţi că

$$\cos\theta_{12} = \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2 \quad (2.51)$$

unde am folosit identitatea trigonometrică:

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2. \quad (2.52)$$

Iată un bun exemplu al puterii metodelor vectoriale. Încercaţi să aflaţi rezultatul (2.51) pe altă cale!

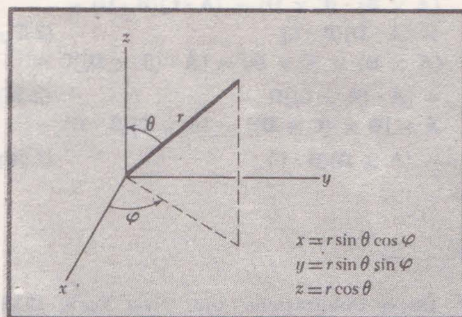


FIG. 2.30. Coordonate sferice.

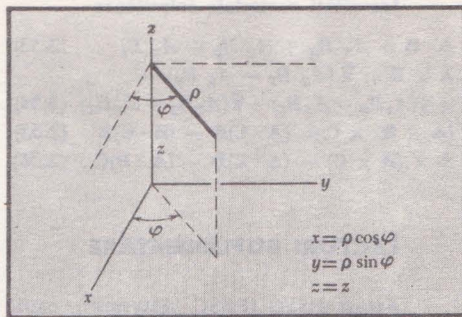


FIG. 2.31. Coordonate cilindrice.

2. În mod asemănător, formînd $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, aflați o relație pentru $\sin\theta_{12}$.

Coordonatele cilindrice ρ, φ, z reprezintă un set de coordonate ortogonale definite de $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ și $z = z$, ca în figura 2.31. Cînd le utilizăm în două dimensiuni coordonatele de mai sus se reduc la ρ și φ. Cu toate acestea, vom folosi adesea pe r și θ în loc de ρ și φ. (Vezi, de exemplu, formulele de mai jos.)

Formule de geometrie analitică

Dreapta în planul xy	$ax + by = 1$
Dreapta în planul xy trecînd prin origine	$y = ax$
Planul	$ax + by + cz = 1$
Planul prin origine	$ax + by + cz = 0$

Coordonate carteziene		*Coordonate polare*
	Cercul, centrul în origine	
$x^2 + y^2 = r_0^2$		$r = r_0$
	Elipsa	
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$		$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1 - e\cos\theta}{a}$
centrul în origine		$e < 1$; originea într-un focar
	Parabola	
$y^2 = mx$		$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1 - \cos\theta}{a}$
vîrful în origine		originea în focar
	Hiperbola	
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$		$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1 - e\cos\theta}{a}$
centrul în origine		$e > 1$; originea în focar

Identități vectoriale folositoare

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (2.53)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} (A_y B_z - A_z B_y) + \hat{\mathbf{y}}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{\mathbf{z}}(A_x B_y - A_y B_x) \quad (2.54)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (2.56)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (2.57)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})]\mathbf{C} - [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]\mathbf{D} \quad (2.58)$$

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] = (\mathbf{A} \times \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \times \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (2.59)$$

LECTURI SUPLIMENTARE

Fizica PSSC (PSSC „Physics"), capitolul 6, D. C. Heath & Co., Boston, 1965 (Tradusă în limba română sub titlul „Fizica PSSC", N.T.)

Banesh Hoffman, *Despre vectori* („About Vectors"), Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1966. Nu este un manual, dar îi îndeamnă la lectură pe cei cu anumite cunoștințe despre vectori.

G. E. Hay, *Analiză vectorială și tensorială* („Vector and Tensor Analysis"), Dover Publications, Inc., New York, 1953.

D. E. Rutherford, *Metode vectoriale* („Vector Methods"), Oliver & Boyd Ltd., Edinburgh, sau Interscience Publishers, Inc., New York, 1949.

H. B. Phillips, *Analiză vectorială* („Vector Analysis"), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1933. Aceasta este o carte veche, mult folosită de o generație întreagă de studenți.

3

Legile Newtoniene ale mişcării

Cuprins

LEGILE NEWTONIENE ALE MIȘCĂRII

Acest capitol se va ocupa în principal de legile newtoniene ale mișcării. Vom enunța la început legile în forma lor tradițională și apoi vom prezenta cîteva aplicații pentru a-l ajuta pe student să capete siguranță atunci cînd le va folosi.

Cîteva probleme privind alegerea sistemelor de coordonate și transformarea lui Galilei vor fi tratate în capitolul 4. Deși materialul din capitolul 4 ar putea fi parcurs înaintea celui din prezentul capitol, cîștigarea unei experiențe cu anumite aplicații imediate ale legilor, va îmbunătăți înțelegerea aspectelor mai subtile din capitolul 4.

Prima lege a lui Newton: un corp rămîne în starea de repaus sau de mișcare uniformă (accelerație nulă) dacă asupra sa nu acționează nici o forță; adică,

$$\mathbf{a} = 0 \text{ cînd } \mathbf{F} = 0.$$

(Nu vom trata aici probleme filozofice privind conținutul legii întîi, de exemplu, dacă ea este conținută în întregime în legea a doua [1].)

Legea a doua a lui Newton: viteza de variație a impulsului unui corp este proporțională cu forța ce acționează asupra corpului. Definim impulsul ca $M\mathbf{v}$, unde M este masa și $\mathbf{v}$ este vectorul viteză, astfel încît:

$$\mathbf{F} = K \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\mathbf{v}) = KM \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = KM\mathbf{a}$$

unde s-a presupus că în termenii trei și patru M este constant. Vom alege unitățile astfel încît $K = 1$. În SI dacă M este măsurat în kilograme (kg) și $\mathbf{a}$ în metri pe secundă la pătrat (m/s^2) atunci $\mathbf{F}$ este măsurat în newtoni (N). Un newton este forța care acționînd asupra unui corp cu masa de un kilogram îi imprimă o accelerație de un metru pe secundă la pătrat. În CGS, M este măsurat în grame (g), $\mathbf{a}$ în centimetri pe secundă la pătrat (cm/s^2) și atunci $\mathbf{F}$ este măsurat în dyne (dyn). O dynă este astfel forța care aplicată unui corp cu masa de un gram îi imprimă o accelerație de un centimetru pe secundă la pătrat.

$$1\text{N} = 10^3\text{g} \times 100 \text{ cm/s}^2 = 10^5 \text{ dyn}.$$

[1] Vezi, de exemplu, E. Mach, *Știința mecanicii*, („The Science of Mechanics") ed. 6, pg 302, The Open Court Publ. Co., La Salle Ill., 1960.

Atunci putem scrie:

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d}{dt} M\mathbf{v}} \tag{3.1}$$

şi dacă $dM/dt = 0$

$$\boxed{\mathbf{F} = M\mathbf{a}} \tag{3.2}$$

Presupunerea că M este constant ne restrînge automat numai la problemele nerelativiste cu $v \ll c$. Noi tratăm teoria specială a relativităţii în capitolele 10 pînă la 14, iar variaţia masei cu v în capitolul 12. Nu vom putea trata, de asemenea, alte cîteva probleme interesante cum ar fi rachetele şi lanţurile care cad. (Vom trata cîteva dintre subiectele acestea în capitolul 6.) Cu toate acestea, vom avea la îndemînă o bogată varietate de probleme în care M este constant.

Legea a treia a lui Newton: ori de cîte ori interacţionează două corpuri forţa $\mathbf{F}_{21}$ [1] pe care corpul 1 o exercită asupra corpului 2 este egală şi de sens contrar cu forţa $\mathbf{F}_{12}$ pe care corpul 2 o exercită asupra corpului 1.

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}} \tag{3.3}$$

Vom vedea că pe această lege se bazează conservarea impulsului. Viteza finită de propagare a forţelor (ca în relativitatea restrînsă) introduce dificultăţi în aplicarea acestei legi, dificultăţi pe care le vom menţiona în capitolul 4.

Merită să subliniem aici că cele două forţe $\mathbf{F}_{12}$ şi $\mathbf{F}_{21}$ acţionează asupra unor corpuri diferite, şi la aplicarea legii a doua a lui Newton unui anumit corp, numai forţa care acţionează asupra acelui corp trebuie luată în considerare. Forţa egală şi opusă influenţează numai mişcarea celuilalt corp. (Vezi problema 1 de la sfîrşitul acestui capitol.)

Prezentăm acum un număr de exemple de aplicare a legilor lui Newton. Cei ce nu sînt familiarizaţi cu soluţiile ecuaţiilor diferenţiale vor trebui să citească notele matematice de la sfîrşitul acestui capitol care au legătură cu materialul ce urmează.

Mişcarea în cazul $\mathbf{F} = 0$. Acest caz simplu este tocmai acela al primei legi a lui Newton. Scriind:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = 0 \tag{3.4}$$

vedem imediat că $\mathbf{v}$ trebuie să fie o constantă. Aici caracterul vectorial al lui $\mathbf{v}$ este important deoarece atît mărimea cît şi direcţia lui $\mathbf{v}$ trebuie să fie constante. De exemplu, corpul ce se mişcă cu viteză constantă pe un cerc are un vector viteză ce îşi modifică continuu direcţia şi astfel nu s-ar putea mişca pe o asemenea traiectorie dacă $\mathbf{F} = 0$.

Dacă viteza constantă $\mathbf{v}$ este zero, corpul de masă M rămîne în repaus. Dacă nu este zero, dar

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0 \tag{3.5}$$

[1] Vom adopta aici convenţia că F_{ij} este forţa exercitată asupra corpului i din partea corpului j.

putem integra această ecuaţie pentru a obţine:

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \tag{3.6}$$

unde $\mathbf{r}_0$ este valoarea lui $\mathbf{r}$ la $t = 0$. Aceste ecuaţii pot fi, desigur, scrise şi în formă carteziană.

FORŢE ŞI ECUAŢII DE MIŞCARE

Mult mai importante, totuşi, sînt cazurile cînd **F** nu este egal cu zero. Sub influenţa forţei **F**, o particulă de masă constantă suferă o acceleraţie în concordanţă cu legea a doua a lui Newton:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a} = M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{3.7}$$

Această expresie matematică este aşa-numita *ecuaţie de mişcare*. Prin aceasta înţelegem că prin integrarea succesivă a acestei ecuaţii diferenţiale vom obţine expresii pentru viteza şi poziţia particulei ca funcţie de timp.

Pentru a rezolva o astfel de ecuaţie trebuie să cunoaştem forţa **F**, dependenţa ei de poziţia şi de viteza particulei precum şi dependenţa de timp dacă ea variază explicit cu timpul. Desigur, rezolvarea unei ecuaţii de mişcare poate fi o problemă foarte dificilă dacă dependenţa forţei de aceste variabile este complicată; dar, din fericire în multe cazuri importante şi instructive apar forţe constante în timp şi de asemenea independente de viteză.

În fizică sînt cunoscute cîteva tipuri importante de forţe: forţa gravitaţională, forţa electrostatică, forţa magnetică, şi, printre altele, forţele nucleare tari dar cu rază scurtă de acţiune. Prin astfel de forţe, particulele pot interacţiona unele cu altele chiar dacă sînt separate în vid. Dacă o particulă suferă acţiunea unei forţe rezultante datorată interacţiunii gravitaţionale cu alte particule sau corpuri, putem spune că particula se află în *cîmpul gravitaţional* produs de acele particule. Cînd o particulă încărcată electric suferă acţiunea unei forţe rezultante datorată distribuţiei de sarcini electrice aflate pe alte particule sau corpuri aşezate în vecinătatea ei, vom considera că particula se află într-un *cîmp electric*.

În multe aplicaţii şi probleme de mecanică vom vorbi despre *forţele de contact*, cum ar fi tensiunea din arcul ce suportă greutatea pendulului sau presiunea exercitată pe un plan de un obiect ce stă pe el. Cel mai adesea sînt prezente atît forţele de cîmp cît şi forţele de contact, cum se întîmplă la balansarea în cîmpul gravitaţional a masei pendulului suportată de către tensiunea în fir. În ultimă analiză, toate forţele de contact sînt forţe de cîmp deoarece ele provin din interacţiile electromagnetice dintre particulele atomice. Cu toate acestea, este adesea mai convenabil pentru scopurile pe care ni le-am propus să considerăm numai forţele de contact sau forţa de contact. Cînd se tratează despre mecanica particulelor atomice sîntem preocupaţi de regulă numai cu forţe de cîmp; *contactul* nu mai poate fi înţeles în sensul său simplu, în cadrul domeniului atomic.

Unităţi. În acest paragraf ne vom abate pentru scurt timp de la subiectul legilor lui Newton pentru a discuta problema unităţilor. Spre sfîrşitul capi-

tolului cînd se vor introduce forțele magnetice și electrice vom discuta unitățile folosite pentru sarcina electrică precum și pentru cîmpurile electrice și magnetice. Aici ne vom ocupa numai de unitățile mecanice.

Pentru a comunica informații despre mișcări, sînt cu siguranță necesare etaloane de timp și de distanță. Din fericire există un acord unanim în ceea ce privește etalonul de timp: secunda (s). La început a fost definită ca o parte dintr-un an, anul fiind definit în termenii observațiilor astronomice. Totuși, în folosirea acestei definiții, apar dificultăți practice, astfel încît, acum, secunda este definită în termenii numărului de oscilații caracteristice ale unui sistem atomic, și anume cel al atomului de cesiu. Definiția exactă spune că o secundă este timpul în care au loc 9 192 631 770 oscilații ale atomului de cesiu. Lăsînd la o parte procedeul experimental, este exact același lucru cu a lua ceasornicul bunicului și a spune că secunda este timpul necesar pentru atîtea oscilații complete ale pendulei.

În ceea ce privește unitatea de lungime nu mai există un acord unanim, întrucît țările de limbă engleză folosesc un sistem iar restul lumii alt sistem. Oamenii de știință au găsit că sistemul de unități folosit de restul lumii este mai simplu și mai ușor de utilizat decît sistemul britanic și, în consecință, l-au adoptat; se speră că și țările de limbă engleză vor adopta în curînd acest sistem. Sistemul presupune un etalon, centimetrul sau metrul cu multiplii (sau submultiplii) zecimali ai etalonului. Etalonul original consta în distanța dintre două trăsături aflate pe o bară păstrată la Paris, distanța fiind exact 100 cm sau 1 m. Sînt și dificultăți practice în ceea ce privește folosirea acestui etalon, cum ar fi, de exemplu, lățimea zgîrieturilor. Astfel, noi folosim astăzi un etalon mai bun, lungimea de undă a radiației roșii a ^{86}Kr; un metru este 1 650 763,73 lungimi de undă. Întrebarea dacă metrul sau centimetrul este unitatea fundamentală de lungime este întrucîtva academică, deoarece factorul de conversie este exact 100. În această carte vom utiliza metrul deși vom face referiri la folosirea centimetrului, multe alte cărți folosesc centimetrul ca unitate de lungime. În sistemul Britanic, dificultățile sînt cauzate de faptul că diferitele unități de lungime nu sînt legate simplu unele de celelalte: de exemplu, piciorul are 12 țoli, iardul are 3 picioare iar mila are 1 760 de iarzi.

Legea a doua a lui Newton mai presupune două mărimi: masa și forța. Avem nevoie de etaloane pentru ambele mărimi? Răspunsul, după cum s-a menționat mai sus, este nu. Putem stabili un etalon pentru una dintre ele și apoi să folosim legea a doua a lui Newton pentru a-l defini pe celălalt. Din punct de vedere istoric masa a fost considerată ca fundamentală iar forța ca derivată. Unitatea de masă este gramul sau kilogramul, care este exact 1 000 de grame. Și kilogramul etalon este ținut la Paris. Compararea maselor este un lucru ușor astfel că nu a mai fost necesară adoptarea ca etalon a masei unui anumit atom.

Sistemul britanic este, iarăși, complicat deoarece uncia, livra și tona anglosaxonă nu sînt legate între ele într-un mod mai simplu. Vom adopta astfel metrul, secunda și kilogramul, ca unități fundamentale de lungime, timp și, respectiv, masă, și vom utiliza unități derivate din acestea pentru forță, impuls, energie, putere etc. Acesta este sistemul SI (provenit din MKS). Este folosit, de asemenea, în mod obișnuit și *sistemul CGS* utilizînd centimetrul și gramul în locul metrului și kilogramului. În legătură cu unitățile, apar probleme mai deosebite odată cu discutarea fenomenelor electrice și magnetice în volumul 2, intervenind și viteza luminii ce se poate găsi și în acest capitol în paragraful privind cîmpurile magnetice.

Dimensiuni. Cînd lucrăm la un calcul complicat, este foarte important să fim siguri că unitățile dintr-o parte a ecuației rezultante sînt aceleași cu unitățile din partea cealaltă. De exemplu, calculînd distanța parcursă de un obiect, este sigur că s-a strecurat vreo greșeală dacă răspunsul apare în kilograme. O analiză de acest tip poartă, de obicei, numele de *analiză dimensională*. Nu este nevoie să specificăm unitățile folosite ci numai dimensiunile masei, lungimii și timpului, după cum se va vedea mai jos.

Care sînt dimensiunile forței? Folosind relația (3.7) vedem că forța este masa înmulțită cu accelerația, accelerația este viteza împărțită la timp iar viteza este distanța împărțită la timp; astfel încît, utilizînd M, L și T pentru a denumi masa, lungimea și timpul, vom obține:

$$\text{Forța} = [M]\,[\text{accel}] = [M]\,[L]\,[T]^{-2}.$$

$$\text{Accelerația} = \frac{[L]}{[T]\,[T]} = [L][T]^{-2}.$$

$$\text{Viteza} = \frac{[L]}{[T]} = [L][T]^{-1}.$$

Ca exemplu de analiză dimensională să presupunem că ajungem la o relație de tipul: forța $= \frac{3}{5}\,\rho v^2$ unde ρ este masa pe unitatea de volum, sau densitatea, iar v este viteza. Analiza dimensională nu ne va spune niciodată dacă factorul 3/5 este corect deoarece el este fără dimensiuni, adică un număr pur. Să ne uităm totuși la $\rho\, v^2$.

$$\rho = [M]\,[L]^{-3}; \quad v^2 = [L]^2\,[T]^{-2}.$$

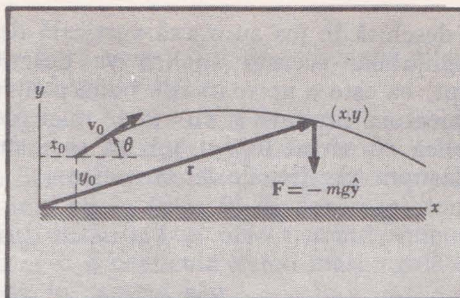
Atunci $\rho v^2 = [M]\,[L]^{-3}\,[L]^2\,[T]^{-2} = [M]\,[L]^{-1}\,[T]^{-2}$ pe cînd forța, după cum am văzut, este $[M][L][T]^{-2}$. Am făcut astfel o greșeală în deducerea ecuației. Cei ce sînt familiari cu conceptul de *presiune*, care este forța pe unitatea de suprafață, pot vedea că $\rho\, v^2$ are dimensiunile unei presiuni.

MIȘCAREA UNEI PARTICULE ÎNTR-UN CÎMP GRAVITAȚIONAL UNIFORM

Vom trece acum la cîteva aplicații ale legii a doua a lui Newton. Dacă ne restrîngem considerațiile doar la regiunea laboratorului ale cărei dimensiuni sînt mici în raport cu dimensiunea Pămîntului, atunci putem considera într-o bună aproximație că forța gravitațională exercitată asupra unei particule este peste tot îndreptată *în jos* și constantă. Accelerația datorată acestei forțe, îndreptată și ea în jos, are tocmai valoarea locală a accelerației gravitației g [1], și astfel mărimea forței ce acționează asupra particulei este tocmai mg. Ca vector această forță poate fi scrisă $\mathbf{F} = -mg\,\hat{\mathbf{y}}$, unde x și y sînt axele de coordonate alese ca în figura 3.1.

[1] g se consideră de obicei egal cu 980 cm/s^2 = 9,80 m/s^2. În tabelul 4.1 sînt date valorile lui g la suprafața pămîntului.

FIG. 3.1. Mişcarea unei particule libere sub influenţa unui cîmp gravitaţional uniform; proiectată iniţial din punctul (x_0, y_0) cu viteza v_0 sub unghiul θ faţă de orizontală. Vectorul de poziţie la momentul surprins pe figură $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y$. Vectorul acceleraţie: $d^2\mathbf{r}/dt^2 = (d^2x/dt^2)\hat{\mathbf{x}} + (d^2y/dt^2)\hat{\mathbf{y}} = -g\hat{\mathbf{y}}$.



Dacă putem omite alte forţe, ca, de pildă, frecarea, ecuaţia de mişcare rezultînd din legea a doua a lui Newton [relaţia (3.7)] este:

$$m\left[\hat{\mathbf{x}}\frac{d^2x}{dt^2} + \hat{\mathbf{y}}\frac{d^2y}{dt^2}\right] = -mg\hat{\mathbf{y}}.$$

Deoarece direcţiile componente sînt ortogonale, vom separa această ecuaţie în două ecuaţii componente şi astfel nu mai este nevoie să reţinem versorii. Astfel:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0. \tag{3.8}$$

Integrarea acestor ecuaţii pentru obţinerea lui x şi y ca funcţii de t o găsiţi în notele matematice de la sfîrşitul acestui capitol. Cu condiţiile iniţiale arătate în figura 3.1 unde componentele vitezei iniţiale sînt $v_0 \cos\theta$ şi $v_0 \sin\theta$ pentru direcţiile x şi respectiv y, soluţiile sînt

$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta)\,t$$
$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta)\,t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{3.9}$$

Diferite cazuri speciale, cum ar fi căderea unei particule de la înălţimea h din repaus, pot fi explorate prin alegerea condiţiilor iniţiale pentru poziţie şi viteză şi vor duce la rezultate familiare. Anumite cazuri sînt prezentate în problemele de la 2 pînă la 4.

Studentul familiarizat cu geometria analitică va recunoaşte relaţiile (3.9) ca forma parametrică a unei parabole, parametrul fiind t. Acest lucru se poate vedea mai clar eliminîndu-l pe t din cele două ecuaţii pentru a obţine

$$y - \left(y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}\right) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left[x - \left(x_0 + \frac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}\right)\right]^2$$

Aceasta este forma canonică a unei parabole cu vîrful în

$$x_1 = x_0 + \frac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g},$$

şi deschisă în jos cu o axă verticală de simetrie. Dacă rezistenţa aerului este neglijabilă, această analiză va descrie corect mişcarea unui proiectil. În fapt, ea este o aproximaţie bună pentru obiecte cu masă mare ce se mişcă pe traiectorii limitate şi cu viteze mici (vezi problema 20). Reprezentarea parabolică cu vîrful în (x_1, y_1), ca mai sus, ne dezvăluie că înălţimea maximă deasupra poziţiei de lansare este:

$$h = y_1 - y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}.$$

Bătaia orizontală, adică distanţa pînă în punctul unde proiectilul a revenit la înălţimea de lansare, este dată de:

$$R = 2(x_1 - x_0) = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}. \tag{3.10}$$

EXEMPLU

Bătaia maximă. Cu ce unghi trebuie proiectat un obiect astfel încît R să fie maxim? Înainte de a face calculul, putem vedea uşor că $R(\theta)$ are un maxim; dacă θ este prea mic, proiectilul nu va sta în zbor suficient de mult timp pentru a ajunge departe, dacă θ este prea mare proiectilul va merge în sus şi în jos şi nu prea mult pe orizontală. Pentru a rezolva analitic problema vom folosi pur şi simplu faptul că atunci cînd R este maxim $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta = 0$. Folosind relaţia (3.10)

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v_0^2}{g} 2 \cos 2\theta = 0$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2}\ ;\ \theta = \frac{\pi}{4} = 45°.$$

LEGEA NEWTONIANĂ A GRAVITAŢIEI UNIVERSALE

În paragraful precedent am tratat cazul cîmpului gravitaţional constant. Ce se întîmplă cînd distanţa dintre obiectele aflate în interacţie gravitaţională este mare în comparaţie cu mărimea lor? Legea lui Newton a gravitaţiei spune:

o particulă de masă M_1 atrage orice altă particulă din univers de masă M_2 cu o forţă:

$$\boxed{\mathbf{F} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}} \tag{3.11}$$

unde $\hat{\mathbf{r}}$ este vectorul unitar de la M_1 la M_2 şi G este o constantă avînd valoarea determinată experimental de:

$$6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}\ \text{sau}\ 6{,}67 \times 10^{-8}\ \mathrm{dyn \cdot cm^2/g^2}.$$

De notat că aceasta este forţa exercitată asupra lui M_2. Semnul minus indică o forţă atractivă; ea tinde să-l micşoreze pe r.

Forţa gravitaţională este o forţă *centrală:* forţa este orientată de-a lungul liniei ce uneşte cele două corpuri punctiforme. Modul de determinare a valorii lui G este tratat de obicei în textele de liceu. Experienţa clasică este cea a lui Cavendish. Vom vedea, de asemenea, mai tîrziu (cap. 9) că deoarece forţa depinde invers proporţional de pătratul distanţei, un obiect avînd simetrie sferică va intra în interacţie ca şi cînd ar fi o particulă avînd masa egală cu întreaga masă a obiectului şi localizată în centrul său.

Newton, însuşi, nu a cunoscut valoarea lui G. Cu toate acestea el a ştiut — de fapt, a descoperit — că legea forţei este o lege a inversei proporţionalităţi cu pătratul distanţei, şi a mai ştiut că la suprafaţa Pămîntului (deoarece Pămîntul este esenţialmente sferic):

$$mg = \frac{GmM_p}{R_p^2} \tag{3.12}$$

unde M_p este masa pămîntului şi R_p este raza sa. El a putut, astfel, afla pe GM_p şi mai departe a putut afla forţa exercitată la orice distanţă r:

$$F = \frac{GmM_p}{r^2} = \frac{GmM_p}{R_p^2} \cdot \frac{R_p^2}{r^2} = mg\left(\frac{R_p}{r}\right)^2.$$

De asemenea, el a ştiut cu un înalt grad de precizie că masele gravitaţională şi inerţială ale unui corp sînt egale. (Acest lucru va fi discutat în capitolul 14.) Ceea ce vrem să spunem este că valoarea masei m ce trebuie folosită în expresia de mai înainte a forţei gravitaţionale este egală cu valoarea masei aceluiaşi corp folosită în legea a doua a lui Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Masa din legea gravitaţională se numeşte *masă gravitaţională* iar masa din legea a doua a lui Newton se numeşte *masă inerţială*. Experienţele clasice privind egalitatea celor două mase au fost făcute de Eötvös; experienţe mai recente şi mai precise sînt descrise de R. H. Dicke [1] şi de P. G. Roll, R. Krotkov şi R. H. Dicke [2]. Experienţa lui Eötvös este descrisă în capitolul 14. În relaţia (3.12) am presupus că există această egalitate.

EXEMPLU

Satelitul pe o orbită circulară. Să considerăm un satelit pe o orbită circulară concentrică şi coplanară cu ecuatorul terestru. La ce rază r a orbitei, satelitul va părea că rămîne staţionar în raport cu un observator fix de pe Pămînt? Vom presupune că sensul rotaţiei satelitului pe orbită este acelaşi cu sensul rotaţiei Pământului.

Pe o orbită circulară atracţia gravitaţională este egală cu masa înmulţită cu acceleraţia centripetă:

$$\frac{GM_pM_s}{r^2} = M_s\omega^2 r \tag{3.13}$$

[1] Scientific American, *205*: 84 (1961)
[2] Ann. Phys. (N.Y.), *26*: 442 (1964)

unde M_s este masa satelitului. Vom rearanja expresia (3.13) astfel:

$$r^3 = \frac{GM_p}{\omega^2} = \frac{GM_pT^2}{(2\pi)^2} \tag{3.14}$$

unde T este perioada. Vrem ca viteza unghiulară ω a satelitului pe orbită să fie egală cu viteza unghiulară ω_p a rotației Pămîntului în jurul axei sale, astfel încît satelitul să apară staționar. Viteza unghiulară a Pămîntului este:

$$\omega_p = \frac{2\pi}{\text{o zi}} = \frac{2\pi}{8{,}64\times 10^4} = 7{,}3\times 10^{-5}\ s^{-1}$$

și relația (3.14) devine, cu $\omega = \omega_p$:

$$r^3 \approx \frac{(6{,}67\times 10^{-11})\ (5{,}98\times 10^{24})}{(7{,}3\times 10^{-5})^2} \approx 75\times 10^{21}$$

sau

$$r \approx 4{,}2\times 10^7\ \text{m}.$$

Raza Pămîntului este $6{,}38 \times 10^6$ m. Distanța este astfel aproximativ o zecime din distanța pînă la Lună și aproape de 6,6 ori mai mare decît raza Pămîntului.

ACȚIUNEA FORȚELOR ELECTRICE ȘI MAGNETICE ASUPRA UNOR PARTICULE ÎNCĂRCATE; UNITĂȚI

În acest paragraf, dorim să considerăm probleme cu forțe electrice și magnetice ce acționează asupra unor particule încărcate. La lucrările de laborator, studenții vor observa și măsura efectele unor astfel de forțe asupra mișcării particulelor, iar subiectul va fi tratat pe larg în volumul 2. Acum, vom introduce pe scurt definițiile unităților mărimilor electrice și magnetice astfel încît să putem trata forțele ce apar în această importantă ramură a mecanicii.

Vă reamintiți că sarcinile electrice se resping cu forțe orientate de-a lungul liniei care le unește. Tăria repulsiei depinde invers proporțional de distanța care separă sarcinile și este direct proporțională cu produsul sarcinilor electrice. Aceasta este legea lui Coulomb; ea poate fi exprimată prin relația:

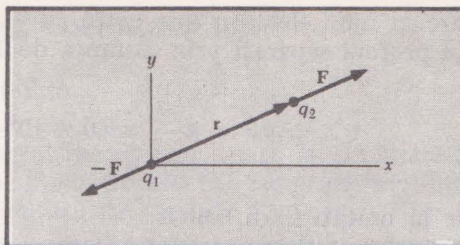
$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{q_1q_2}{r^3}\mathbf{r} = \frac{q_1q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}} \tag{3.15}$$

unde $\mathbf{r}$ este vectorul ce separă sarcina punctiformă q_2, asupra căreia se exercită forța $\mathbf{F}$, de sarcina punctiformă q_1 luată în origine. Vectorul unitar $\hat{\mathbf{r}}$ este desigur egal cu $\mathbf{r}/r$. Figura 3.2 ilustrează această situație și ne reamintește că dacă $\mathbf{F}$ acționează asupra lui q_2 atunci $-\mathbf{F}$ va acționa asupra lui q_1.

Expresia (3.15) enunță legea lui Coulomb în sistemul de unități Gauss. În acest sistem unitatea de sarcină q este definită astfel: două sarcini punctiforme egale ce se resping cu o forță de 1 dynă cînd se află la distanța de un cm reprezintă prin definiție o unitate Gauss de sarcină. Sarcina pe care o are fiecare particulă încărcată se numește unitate electrostatică (ues), sau 1 statcoulomb. „Dimensiunile" sarcinii electrice se văd în expresia (3.15):

$$[q] = [\text{forță}]^{\frac{1}{2}} \cdot [\text{distanță}] = [\text{masă}]^{\frac{1}{2}} \cdot [\text{lungime}]^{\frac{3}{2}} [\text{timp}]^{-1}.$$

FIG. 3.2. Ilustrație la legea lui Coulomb. $\mathbf{F} = (q_1q_2/r^2)\hat{\mathbf{r}} = (q_1q_2/r^3)\mathbf{r}$.



Astfel, folosind pentru aceste mărimi sistemul CGS, dimensiunile sarcinii în sistemul electrostatic gaussian sînt:

$$[q] = g^{\frac{1}{2}}\, cm^{\frac{3}{2}}\, s^{-1}.$$

Este, desigur, mai ușor să folosim numele de *(ues)* sau de *statcoulomb* decît să scriem de fiecare dată această combinație.

După cum am mai menționat, Sistemul internațional de unități, SI, folosește metrul pentru distanță și newtonul pentru forță. În locul definirii unității de sarcină prin legea lui Coulomb, se utilizează o definiție în termenii curentului electric, folosindu-se amperul (A). Unitatea de sarcină este: 1 coulomb (C) = 1 amper·secundă (A·s). Legea lui Coulomb trebuie atunci scrisă astfel:

$$\boxed{F = k\frac{q_1q_2}{r^2};\ \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}} \qquad (3.15,a)$$

unde k are dimensiunile:

$$[\text{forță}]\,[\text{lungime}]^2\,[\text{sarcină}]^{-2}$$

iar ε_0 are dimensiunile inverse. În electrostatică sînt multe operații care introduc un factor 4π, și astfel la numitorul expresiei (3.15,*a*) s-a introdus factorul 4π ca să se simplifice în timpul operațiilor. Valoarea lui k este:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}988 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

sarcina unui proton q_p este sarcina electrică elementară și este notată aproape peste tot prin litera e. Valoarea ei în unități SI este:

$$e = +\,1{,}60210 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

iar în unități CGS Gauss

$$e = +\,4{,}8022 \times 10^{-10}\ \text{ues}$$

$$1\ \text{C} = 2{,}9979 \times 10^9\ \text{ues}.$$

Sarcina unui electron este egală cu $-e$. Mărimea forței de respingere dintre doi protoni separați prin distanța de 10^{-14} m este:

$$F = k\frac{e^2}{r^2} \approx 9,0 \times 10^9 \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{(10^{-14})^2} \approx 2,3\ \mathrm{N}$$

iar în unități CGS Gauss:

$$F = \frac{e^2}{r^2} \approx \frac{(4,8 \times 10^{-10})\,(4,8 \times 10^{-10})}{10^{-12} \times 10^{-12}} \approx 2,3 \times 10^5\ \mathrm{dyn}.$$

Forța dintre un proton și un electron este atractivă deoarece sarcinile au semne opuse.

Cîmpul electric. Cînd asupra unei particule încărcată electric se exercită o forță electrică spunem că particula se află într-un *cîmp electric*. Cîmpul precum și forța datorată lui și exercitată asupra particulei supuse atenției noastre se datoresc altei sarcini sau distribuții de sarcini aflate în vecinătate. Intensitatea E a cîmpului se definește prin relația:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \tag{3.16}$$

unde q reprezintă valoarea „sarcinii corpului de probă" asupra căruia observăm forța **F**. Vectorul intensitate a cîmpului **E** este astfel vectorul forță pe unitatea de sarcină pozitivă în punctul în care se află sarcina de probă.

Am prezentat în figura 3.3 aceeași situație ca în figura 3.2 dar am adoptat aici punctul de vedere potrivit căruia forța **F** ce acționează asupra lui q_2 se datorează intensității cîmpului **E** produs de sarcina q_1 plasată în origine. Vectorul **E** este în acest caz dat de următoarea expresie:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{3.17}$$

iar forța $\mathbf{F} = q_2\mathbf{E}$ este astfel aceeași cu cea exprimată în relația (3.15,*a*). Importanța introducerii cîmpului va reieși la studiul electricității. Cîmpul este în mod special folositor atunci cînd trebuie să lucrăm cu forțe electrice produse de distribuții de sarcină cum ar fi sfere sau plane încărcate și, după cum se va explica în volumul 2, de cîmpuri magnetice variabile în timp.

Dimensiunile cîmpului sînt desigur forță pe unitatea de sarcină; astfel, unitatea poate fi exprimată în N/C. Pentru motive ce se vor vedea mai tîrziu, intensitatea cîmpului poate fi de asemenea exprimată ca volt pe metru (V/m).

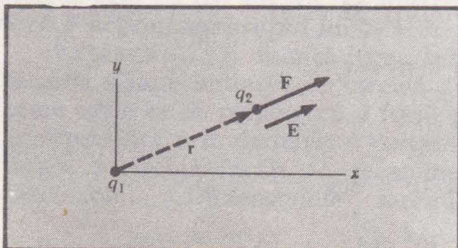


FIG. 3.3. Ilustrație la conceptul de intensitate a cîmpului electric **E**. $\mathbf{E} = (q_1/r^2)\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F} = q_2\mathbf{E} = (q_1q_2/r^2)\hat{\mathbf{r}}$.

Cele două moduri de exprimare înseamnă exact acelaşi lucru

$$1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$$

ultima exprimare scoţînd în evidenţă lucrul mecanic ce apare la deplasarea unităţii de sarcină pe unitatea de lungime în cîmpul electric iar prima scoţînd în evidenţă forţa ce acţionează asupra unităţii de sarcină.

În sistemul CGS relaţia (3.16) este de asemenea relaţia de definiţie pentru cîmpul electric **E** şi E va avea unităţile dyn/ues. În locul relaţiei (3.17) pentru cîmpul electric datorat sarcinii q_1 vom avea:

$$\mathbf{E} = \frac{q_1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \tag{3.17, a}$$

Exact ca în SI, E poate fi exprimat în statvolt/cm şi

$$1 \text{ dyn/ues} = 1 \text{ statvolt/cm}.$$

Factorul de conversie de la statvolt pe cm la volt pe metru este:

$$2{,}9979 \times 10^4 \text{ V/m} = 1 \text{ statvolt/cm}$$

$$1 \text{ V/m} = \frac{1}{2{,}9979 \times 10^4} \text{ statvolt/cm} \approx \frac{1}{3 \times 10^4} \text{ statvolt/cm}.$$

Cîmpul magnetic şi forţa Lorentz. Pînă acum am considerat numai situaţia *statică,* situaţie în care particulele nu se mişcă unele în raport cu altele sau relativ la observator şi am exprimat forţa electrostatică exercitată asupra unei particule încărcate cu sarcina q ca fiind $\mathbf{F}_{el} = q\mathbf{E}$. Dar, experimental s-a constatat că dacă particula cu sarcină q se mişcă în raport cu observatorul poate apărea o forţă adiţională într-o direcţie perpendiculară pe viteză; aceasta este *forţa magnetică.* Într-o regiune în care există o astfel de forţă dependentă de viteză se spune că este prezent un *cîmp magnetic;* şi se ştie din experienţă că vectorul inducţie magnetică **B** poate fi legat de forţa magnetică prin relaţia [1]:

$$\boxed{\mathbf{F}_{mag} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \tag{3.18}$$

unde q este în coulombi, v în metri pe secundă iar F în newtoni. Relaţia îl defineşte pe B cu dimensiunile $[\text{N}]\,[\text{s}]\,[\text{C}]^{-1}\,[\text{m}]^{-1}$. Recent, pentru unitatea de inducţie magnetică s-a adoptat un nume special, *tesla* (T), în locul celei denumite pînă acum weber pe metru pătrat (Wb/m²)[2]. Produsul vectorial ne dă $\mathbf{F}_{mag}$ perpendicular pe **v** aşa cum cere experienţa şi defineşte vectorul inducţie magnetică **B** ca fiind de asemenea perpendicular pe $\mathbf{F}_{mag}$. Aceste relaţii sînt ilustrate, în figura 3.4 pentru cazul cînd **v** şi **B** sînt perpendiculari. Dacă înlocuim mişcarea sarcinii de-a lungul direcţiei lui **v**, cu un conductor prin

---

[1] Dacă în capitolul 2 produsul vectorial a fost omis, acest paragraf poate fi studiat pentru cazul **v** şi **B** perpendiculari unul pe altul.

[2] W. E. Weber (1807 – 1891) a fost un fizician german iar N. Tesla (1856 – 1943) a fost un inventator american.

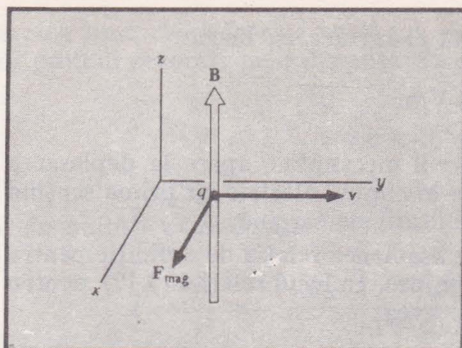


FIG. 3.4. Forţa magnetică $\mathbf{F}_{mag} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

care circulă curentul, atunci direcţia forţei ce acţionează asupra conductorului este aceeaşi cu cea arătată în figura 3.4.

În sistemul de unităţi CGS Gauss:

$$\mathbf{F}_{mag} = \frac{q}{c}\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{3.18,a}$$

unde c este viteza luminii în vid iar $\mathbf{v}$ este viteza particulei încărcate. Dimensiunile lui B definit aici sînt aceleaşi cu cele ale lui E deaorece raportul v/c nu are dimensiuni. Unitatea a primit numele de *gauss* (G) cu F în dyn şi q în ues. Astfel dacă un electron se mişcă cu o zecime din viteza luminii pe o direcţie perpendiculară pe cîmpul magnetic a cărui inducţie este de 10 000 G, intensitatea forţei magnetice va fi:

$$F = (4{,}8 \times 10^{-10}\ \text{ues})\,\frac{1}{10}\,(10^4\ \text{G}) = 4{,}8 \times 10^{-7}\ \text{dyn}.$$

Din fericire

$$1\text{T} = 10^4\ \text{G}$$

deşi trebuie ţinut minte că gauss şi tesla nu au aceleaşi dimensiuni; ar trebui să spunem mai corect că 1 T corespunde la 10^4 G.

În SI problema precedentă sună astfel: $B = 1$ T,

$$v = 3 \times 10^7\ \text{m/s},\ q = e = 1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C şi}$$

$$F = (1{,}6 \times 10^{-19})\,(3 \times 10^7)\,(1{,}0) = 4{,}8 \times 10^{-12}\ \text{N}.$$

Forţa totală ce acţionează asupra unei particule încărcate aflată în mişcare este suma vectorială a forţelor electrostatică şi magnetică. Ea se numeşte *forţa Lorentz*. (Uneori denumirea se utilizează şi numai în cazul forţei magnetice singure.)

Din expresiile (3.16) şi (3.18):

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{3.19}$$

în SI şi

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{3.19,a}$$

în sistemul gaussian.

O bună parte din fizică provine din legea a doua a lui Newton, $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ folosită împreună cu relația (3.19). Desigur, o bună parte din istoria fizicii este constituită din eforturile depuse pentru a stabili aceste două ecuații. [Scriind aici expresia (3.19) ca rezultat al experienței nu sîntem scutiți de necesitatea de a o discuta mai în amănunt în volumul 2.]

În acest capitol avem nevoie de următoarele valori numerice:

viteza luminii:

$$c = 2{,}9979 \times 10^{10}\ \text{cm/s} = 2{,}9979 \times 10^{8}\ \text{m/s};$$

masa electronului:

$$m = 0{,}9108 \times 10^{-27}\ \text{g} = 0{,}9108 \times 10^{-30}\ \text{kg};$$

masa M_p a protonului:

$$M_p = 1{,}6724 \times 10^{-24}\ \text{g} = 1{,}6724 \times 10^{-27}\ \text{kg}.$$

Cînd lucrăm cu forța Lorentz (3.19, *a*) în unități CGS Gauss, vom exprima pe F în dyne, E în statvolți pe cm, v și c în cm/s, B în gauss iar q în ues. În SI, folosind expresia (3.19) exprimăm pe F în newtoni, E în V/m, v în m/s, B în tesla iar q în coulombi. Factorii de conversie menționați mai sus (și obținuți în volumul 2) sînt recapitulați aici:

$$1\ \text{m/s} = 100\ \text{cm/s}$$

$$1\ \text{statvolt/cm} = 3{,}0 \times 10^{4}\ \text{V/m}^{1}$$

$$1\ \text{C} = 3{,}0 \times 10^{9}\ \text{statcoulomb sau ues}$$

$$1\ \text{T} \longleftrightarrow 1 \times 10^{4}\ \text{G}.$$

Mișcarea unei particule încărcate într-un cîmp electric uniform și constant. Ecuația de mișcare pentru o particulă cu sarcina q și masa M aflată în cîmpul electric $\mathbf{E}$ uniform în spațiu și constant în timp este [vezi relația (3.16)]:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a} = q\,\mathbf{E} \tag{3.20}$$

și astfel

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{M}\mathbf{E}$$

reprezintă o ecuație pentru accelerația particulei. Acest rezultat este similar cu cel obținut la mișcarea unei particule în cîmpul gravitațional uniform $\mathbf{F} = -Mg\,\hat{\mathbf{y}}$ la suprafața pămîntului. Pentru problema gravitațională ecuația de mișcare este $M\mathbf{a} = -Mg\,\hat{\mathbf{y}}$ sau $\mathbf{a} = -g\,\hat{\mathbf{y}}$.

Se poate vedea prin verificare sau prin integrare directă că ecuația (3.20) are soluția generală:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{q\mathbf{E}}{2M}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \tag{3.21}$$

[1] Valorile exacte din relația a doua și a treia sînt date în paginile 87, 88 și 89; valorile de aici sînt suficient de precise pentru problemele noastre.

unde $\mathbf{r}_0$ este vectorul de poziție al particulei la timpul $t = 0$ iar $\mathbf{v}_0$ este vectorul viteză la acest moment de timp. Derivînd relația (3.21) obținem expresia vitezei la orice moment de timp, și anume:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{q\mathbf{E}}{M}\, t + \mathbf{v}_0 \tag{3.22}$$

din care se vede ușor că viteza inițială (cînd $t = 0$) este într-adevăr $\mathbf{v}_0$.

EXEMPLU

Accelerația longitudinală a unui proton. Un proton este accelerat din repaus timp de 1 nanosecundă ($= 10^{-9}$ s) de un cîmp electric $E_x = 3{,}0 \times 10^4$ V/m. Care este viteza sa finală (vezi fig. 3.5)?

Viteza este dată de relația (3.22):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{e}{M}\, \mathbf{E}t + \mathbf{v}_0.$$

În problema noastră ea se reduce[1] la:

$$v_x(t) = \frac{e}{M}\, E_x t; \quad v_y = v_z = 0$$

deoarece am specificat că $\mathbf{v} = 0$ la $t = 0$. Astfel încît viteza finală după $t = 1 \times 10^{-9}$ s este:

$$v_x = \frac{(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})\ (3{,}0 \times 10^4\ \text{V/m})\ (1 \times 10^{-9}\ \text{s})}{2 \times 10^{-27}\ \text{kg}} \approx 2{,}4 \times 10^3\ \text{m/s}.$$

De notat că $1\ \text{C} \times 1\ \text{V/m} = 1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$. Am folosit valoarea 2×10^{-27} kg ca ordin de mărime pentru masa protonului.

În unități CGS Gauss:

$E_x = 1$ statvolt/cm;

$$v_x = \frac{(4{,}8 \times 10^{-10}\ \text{u.e.s})\ (1\ \text{statvolt/cm})\ (1 \times 10^{-9}\ \text{s})}{2 \times 10^{-24}\ \text{g}} \approx 2{,}4 \times 10^5\ \text{cm/s}.$$

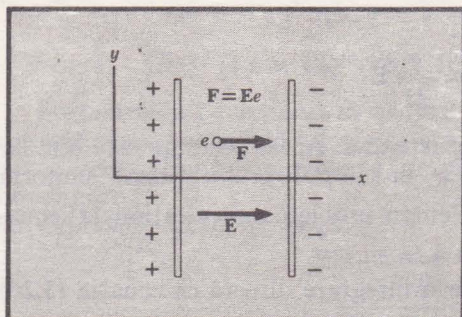


FIG. 3.5. Accelerația longitudinală a unui proton în cîmpul electric dintre două plăci metalice încărcate.

[1] Ecuația (3.22) este o ecuație vectorială; cu $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ și $\mathbf{v}_0 = 0$, ea se reduce la trei ecuații componente

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e}{M}\, E_x t; \quad \frac{dy}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

EXEMPLU

Accelerația longitudinală a unui electron. Un electron, inițial în repaus, este accelerat pe parcursul unui cm de un cîmp electric de $3 \cdot 10^4$ V/m (1 statvolt/cm) îndreptat în sensul negativ al axei x. Care este viteza finală?

Din ecuația (3.22) avem, cu $-e$ sarcina și m masa electronului:

$$v_x(t) = -\frac{e}{m} E_x t; \quad x(t) = -\frac{e}{2m} E_x t^2.$$

Vrem să-l eliminăm pe t și să-l aflăm pe v_x în funcție de x. Este convenabil să formăm v_x^2 și apoi să rearanjăm termenii:

$$v_x^2 = \left(\frac{e}{m} E_x t\right)^2 = \left(\frac{2e}{m} E_x\right)\left(\frac{e}{2m} E_x t^2\right) = -\frac{2e}{m} E_x x \approx \frac{-2 \times 1{,}6 \times 10^{-19}}{10^{-30}} \times$$

$$\times 3 \cdot 10^4 (-10^{-2}) \approx 10^{14}\ \text{m}^2/\text{s}^2.$$

Viteza finală este astfel, aproximativ:

$$|v_x| \approx 10^9\ \text{cm/s} = 10^7\ \text{m/s}.$$

Aceasta este a treizecea parte din viteza luminii și este suficient de mică încît să nu luăm în considerare relativitatea (eroare de 10%).

EXEMPLU

Accelerația transversală a unui electron. După ce a părăsit cîmpul accelerator E_x din exemplul precedent, fasciculul de electroni intră într-o regiune de lungime $L = 1$ cm în care există un cîmp transversal de deflexie $E_y = -3 \times 10^3$ V/m ($-0{,}1$ statvolt/cm), ca în figura 3.6. Ce unghi face fasciculul de electroni cu axa x, cînd părăsește regiunea de deflexie? De notat că situația este identică cu cea a unui corp proiectat orizontal în cîmpul gravitațional al pămîntului.

Deoarece acum nu există nici o componentă a cîmpului pe axa x, componenta x a vitezei va rămîne constantă. Timpul τ în care electronul se află în regiunea de deflexie este dat de:

$$v_x \tau = L$$

și, cum $v_x = 10^7$ m/s

$$\tau = \frac{L}{v_x} = \frac{10^{-2}}{10^7} = 10^{-9}\ \text{s}.$$

Viteza transversală dobîndită în acest interval de timp este dată de:

$$v_y = -\frac{e}{m} E_y \tau = \frac{-1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}}{10^{-30}\ \text{kg}} \left(-3 \cdot 10^3\ \frac{\text{V}}{\text{m}}\right) \times 10^{-9}\ \text{s} \approx 5 \times 10^5\ \text{m/s}.$$

Unghiul θ pe care viteza finală îl face cu axa x este dat de $\text{tg}\theta = v_y/v_x$, astfel încît:

$$\theta = \text{arctg}\,\frac{v_y}{v_x} \approx \text{arctg}\,\frac{5 \times 10^5}{10^7} = \text{arctg}\,0{,}05.$$

Pentru un unghi mic putem face aproximația:

$$\theta \approx \text{arctg}\,\theta$$

unde θ este în radiani. De mai sus se vede că $\theta \approx 0{,}05$ rad, ceea ce înseamnă aproximativ 3°.

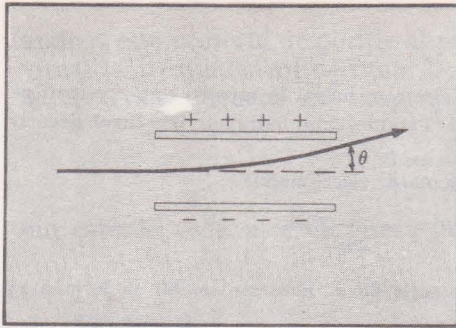


FIG. 3.6. Deflecția unui fascicul de electroni într-un cîmp electric transversal. Unghiul θ este mult exagerat față de valoarea găsită în exemplul din această pagină.

Estimînd valoarea termenului următor din dezvoltarea în serie a lui artg θ să vedem eroarea pe care am făcut-o în această aproximație. Tabelele matematice ne dau dezvoltarea în serie a funcțiilor matematice. Astfel, se poate citi în Dwight[1] la 505.1

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \text{ pentru } x^2 < 1.$$

Termenul $x^3/3$ este mai mic, pentru $x = 0{,}05$, decît termenul conducător x cu factorul $x^2/3 = (0{,}05)^2/3 \approx 10^{-3}$ sau 0,1%. Această eroare poate fi neglijată dacă este mai mică decît eroarea experimentală de măsurare a unghiului θ. Pentru unghiuri mici este de asemenea adevărat

că $\sin\theta \approx \theta$ și $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$.

Mișcarea unei particule încărcate în cîmp magnetic constant și uniform[2]. Ecuația de mișcare, pentru o particulă încărcată de masă M și sarcină q în cîmpul magnetic constant **B** este, din (3.18):

$$M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \qquad (3.23)$$

Fie cîmpul magnetic de-a lungul axei z:

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}B.$$

Cu regulile produsului vectorial:

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_x = v_y B; \quad [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_y = -v_x B; \quad [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_z = 0.$$

[1] Pentru comoditate aproape toate referințele la tabele matematice s-au făcut la H.B. Dwight, Tabele de integrale și alte date matematice („Tables of Integrals and Other Mathematical Data") ed. 4-a. Macmillan Co. New York, 1961. Există o serie de excelente colecții concise de date matematice; oricare din ele poate fi folosită. Ar fi de asemenea folositoare o carte cu date fizice și chimice cum ar fi „Handbook of Chemistry and Physics", Chemical Rubber Publishing Co., New York, precum și o riglă de calcul de 25 cm.

[2] Dacă în capitolul 2 produsul vectorial a fost omis, acest paragraf poate fi studiat în cazul **v** și **B** perpendiculari.

Din ecuația (3.23)[1]:

$$\dot{v}_x = \frac{q}{M} v_y B; \quad \dot{v}_y = -\frac{q}{M} v_x B; \quad \dot{v}_z = 0. \tag{3.24}$$

Vedem că componenta vitezei de-a lungul axei cîmpului magnetic, axa z este constantă.

Putem vedea direct o altă trăsătură a mișcării. Energia cinetică

$$E_c = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

este constantă deoarece

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} M(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) = M\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = M\mathbf{v} \cdot \left(\frac{q}{M} \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \equiv 0 \tag{3.25}$$

pentru că $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ este perpendicular pe $\mathbf{v}$. Astfel: *cîmpul magnetic nu modifică energia cinetică a unei particule libere.*

Să căutăm soluții[2] ale ecuației de mișcare de forma:

$$v_x(t) = v_1 \sin \omega t; \quad v_y(t) = v_1 \cos \omega t; \quad v_z = \text{const.} \tag{3.26}$$

Proiecția pe planul xy ne dă o mișcare circulară cu o rază pe care o vom calcula mai jos. Derivînd pe v_x și v_y în relațiile (3.26)

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_1 \cos \omega t; \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_1 \sin \omega t$$

astfel încît ecuația (3.24) devine

$$\omega v_1 \cos \omega t = \frac{qB}{M} v_1 \cos \omega t; \quad -\omega v_1 \sin \omega t = -\frac{qB}{M} v_1 \sin \omega t.$$

Aceste ecuații sînt satisfăcute dacă

$$\omega = \frac{qB}{M} \equiv \omega_c. \tag{3.27}$$

Această relație definește *frecvența ciclotronică (sau frecvența giromagnetică)* ω_c ca fiind frecvența în mișcarea circulară a unei particule aflată într-un cîmp magnetic. Ecuațiile sînt satisfăcute pentru orice valoare a lui v_1 dar vom vedea că v_1 determină raza traiectoriei circulare.

Frecvența ciclotronică poate fi de asemenea obținută printr-un raționament mai elementar. Forța magnetică îndreptată spre interiorul traiecto-

---

[1] Adoptăm aici o convenție folosită în toată fizica: punctul de deasupra unei litere înseamnă derivată în raport cu timpul. Astfel $\dot{r} = dr/dt$, $\dot{\mathbf{A}} = d\mathbf{A}/dt$. În același fel $\ddot{r} = d^2r/dt^2$, $\ddot{\mathbf{A}} = d^2\mathbf{A}/dt^2$.

[2] Ecuația (3.25) ne spune că E_c este o constantă; tragem concluzia că și $|\mathbf{v}|$ este o constantă. Acest rezultat ne sugerează încercarea unei soluții reprezentînd o mișcare circulară uniformă, în care componentele x și y ale vitezei să fie sinusoidale cu o diferență de fază de $\pi/2$. Este convenabil să reprezentăm qB/M ca o singură constantă avînd dimensiunea inversului unui timp; dimensiunile se văd ușor din ecuația (3.24). Ne așteptăm la o soluție implicînd o rotație, această constantă fiind deci legată de frecvența unghiulară ω.

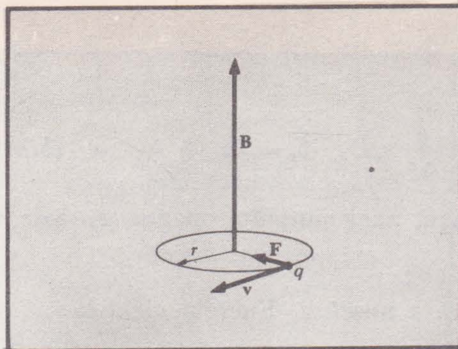


FIG. 3.7. Sarcina pozitivă q, cu viteza inițială $\mathbf{v} \perp$ pe $\mathbf{B}$ uniform, descrie un cerc cu viteza constantă v_1 și raza $r = Mv_1/qB$.

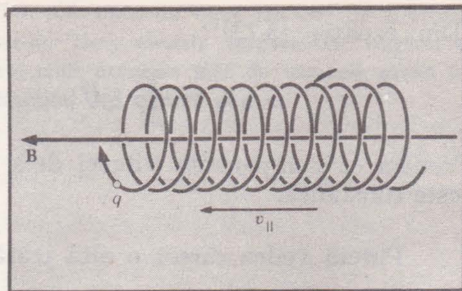


FIG. 3.8. O sarcină pozitivă q descrie o elice cu pas constant într-un cîmp magnetic uniform $\mathbf{B}$. Componenta vitezei $v_{||}$ paralelă cu $\mathbf{B}$ este constantă. Dacă $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, $v_{||} = v_z$.

riei (qBv_1) determină accelerația centripetă (îndreptată tot spre interiorul traiectoriei) ce intervine în mișcarea circulară a particulei. Mărimea acestei accelerații centripete este v_1^2/r sau $\omega_c^2 r$, deoarece $\omega_c r = v_1$. Astfel:

$$qBv_1 = M\omega_c^2 r = M\omega_c v_1,$$

de unde $\omega_c = qB/M$ iar raza cercului este $r = Mv_1/qB$ (vezi fig. 3.7).

Cum arată traiectoria rezultantă? Am văzut că proiecția ei pe planul xy este un cerc; pe axa z există pur și simplu o deplasare cu viteză constantă v_z (care, desigur, poate fi și zero) deoarece nu este prezentă nici o forță cu componentă z. Integrînd ecuațiile (3.26) cu ω_c în locul lui ω obținem traiectoria:

$$x = x_0 + \frac{v_1}{\omega_c} - \frac{v_1}{\omega_c}\cos\omega_c t$$

$$y = y_0 + \frac{v_1}{\omega_c}\sin\omega_c t \tag{3.28}$$

$$z = z_0 + v_z t$$

unde în ecuațiile respective am pus constantele de integrare

$$x_0 + v_1/\omega_c,\ y_0,\ \text{și}\ z_0.$$

Ecuația (3.28) descrie poziția unei particule ce se mișcă în planul xy pe un cerc cu raza

$$r_c = \frac{v_1}{\omega_c} = \frac{Mv_1}{qB} \tag{3.29}$$

și centrul în punctul $(x_0 + v_1/\omega_c,\ y_0)$. Peste această mișcare circulară se suprapune o deplasare uniformă de-a lungul lui z cu viteza v_z care începe la $z = z_0$ cînd $t = 0$.

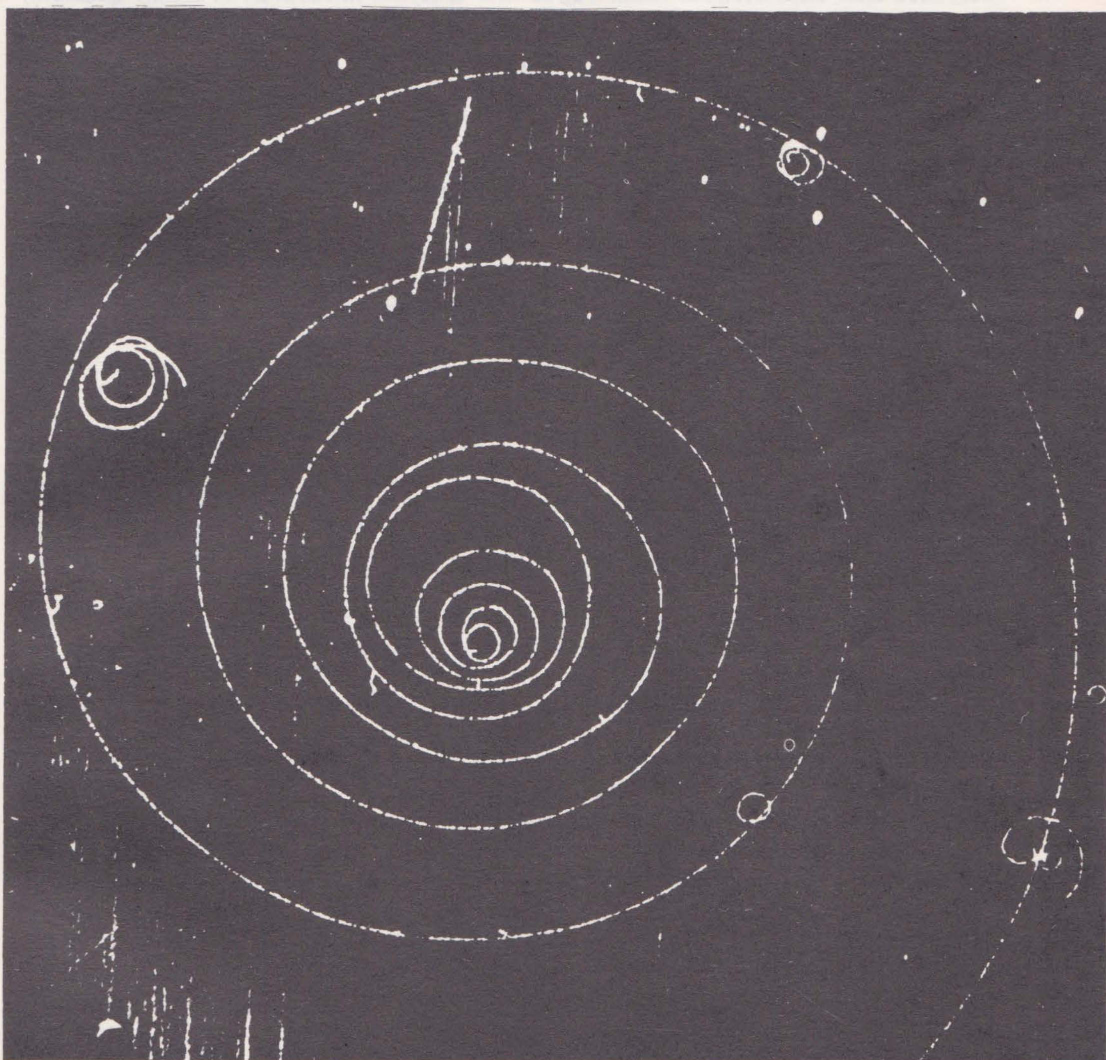
Mișcarea rezultantă are loc pe o elice a cărei axă este paralelă cu cîmpul $\mathbf{B}$, adică, în acest caz, de-a lungul axei z. Ea este ilustrată în figura 3.8. Raza r_c este deseori numită *rază de girație sau raza ciclotronică*.

Vom scoate în evidenţă produsul dintre inducţia magnetică şi raza traiectoriei:

$$Br_c = \frac{Mv_1}{q}. \tag{3.30}$$

Această relaţie este importantă; vom vedea într-un capitol următor că ea este valabilă şi în domeniul relativist dacă impulsul care aici este Mv_1, va fi înlocuit prin expresia sa relativistă. Această relaţie este folosită la determinarea impulsurilor particulelor încărcate, fie la viteze mari fie la cele mici (vezi fig. 3.9).

FIG. 3.9. Fotografia traiectoriei unui electron rapid în cîmp magnetic făcută într-o cameră cu bule de hidrogen. Electronul intră prin dreapta jos. Electronul pierde energie prin ionizarea moleculelor de hidrogen. Pe măsură ce electronul este încetinit, raza curburii în cîmp magnetic descreşte, de unde orbita sub formă de spirală. *(Lawrence Berkeley Laboratory.)*



Verificarea dimensiunilor. Este bine, să verificăm întotdeauna faptul că dimensiunile din ambele părți ale unei ecuații sînt identice. Acesta este un mijloc ușor de a evita greșeli mari. În membrul drept al ecuației (3.30) avem:

$$\left[\frac{Mv_1}{q}\right] = [M][L][T]^{-1}[q]^{-1}. \tag{3.31}$$

Unde am folosit notația din pagina 82 dar am păstrat dimensiunile lui q. În membrul stîng din (3.30) avem:

$$[Br_c] = [M][L][T]^{-2}[q]^{-1}[L]^{-1}[T][L] = [M][L][T]^{-1}[q]^{-1}. \tag{3.32}$$

Vedem că dimensiunile din (3.31) sînt aceleași cu cele din (3.32).

În CGS, unde forța este $(q/c)\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ în loc de $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ avem:

$$\omega = \frac{qB}{Mc} \equiv \omega_c \tag{3.27, a}$$

$$r_c = \frac{v_1}{\omega_c} = \frac{Mcv_1}{qB} \tag{3.29, a}$$

și

$$Br_c = \frac{Mv_1c}{q}.$$

Verificarea dimensiunilor ne dă:

$$\left[\frac{cMv_1}{q}\right] = \left[\frac{L}{T}\right][M]\left[\frac{L}{T}\right]\left[\frac{1}{q}\right] = \left[\frac{ML^2}{qT^2}\right]$$

și

$$[Br_c] = \left[\frac{F}{q}\right][L] = \left[\frac{ML^2}{qT^2}\right]$$

deoarece în concordanță cu expresia forței Lorentz (3.18) dimensiunile lui B în sistemul de unități Gauss sînt cele ale unei forțe împărțită la sarcină.

EXEMPLU

Frecvența de girație. Care este frecvența de girație (ciclotronică) într-un cîmp de 1 T? (Un cîmp de 1 pînă la 1,5 T, sau de 10 pînă la 15 kG în CGS, este tipic pentru electromagneții cu miez de fier dintr-un laborator obișnuit.)

Din relația (3.27) avem:

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \approx \frac{(1{,}6 \times 10^{-19})\,(1{,}0)}{10^{-30}} \approx 1{,}6 \times 10^{11}\ \mathrm{s}^{-1}$$

sau în unități CGS

$$\omega_c = \frac{eB}{mc} \approx \frac{(4{,}8 \times 10^{-10})\,(1 \times 10^{4})}{(10^{-27})\,(3 \times 10^{10})} \approx 1{,}6 \times 10^{11}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Frecvența corespunzătoare, notată prin ν_c, este:

$$\nu_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \approx 3 \times 10^{10} \text{ Hz}.$$

Aceasta este echivalentă cu frecvența unei unde electromagnetice în vid cu lungimea de undă de:

$$\lambda_c = \frac{c}{\nu_c} \approx \frac{3 \times 10^{10}}{3 \times 10^{10}} = 1 \text{ cm}.$$

Frecvența de girație $\omega_{c(p)}$ a unui proton este mai mică decît cea a unui electron în același cîmp magnetic în raportul 1:1836, adică, raportul mesei electronului la masa protonului. Pentru un proton într-un cîmp de 1 T:

$$\omega_{c(p)} = \frac{m}{M_p} \omega_c(e) \approx \frac{1,6 \times 10^{11}}{1,8 \times 10^3} \approx 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

Sensul de rotație al electronului este opus celui al protonului deoarece ei au sarcini electrice de semn contrar.

EXEMPLU

Raza de girație. Care este într-un cîmp de 1 T raza orbitei ciclotronice a unui electron cu viteza de 10^6 m/s normală pe B?

Folosind relația (3.29) pentru raza de girație avem:

$$r_c = \frac{v_1}{\omega_c} \approx \frac{10^6}{1,6 \times 10^{11}} \approx 6 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

Raza de girație a unui proton cu aceeași viteză este mai mare decît a electronului în raportul M/m:

$$r_c \approx (6 \times 10^{-6})\,(1,8 \times 10^3) \approx 0,01 \text{ m} = 1 \text{ cm}.$$

Focalizarea magnetică la 180°. Fie un fascicul de particule încărcate avînd mase și viteze diferite ce intră într-o regiune de cîmp magnetic uniform **B** perpendicular pe fascicul. O particulă va fi deviată pe o traiectorie cu o rază de curbură dată de $B\rho = Mv_t/q$, unde v_t este componenta vitezei în planul normal la **B**. Dacă examinăm fasciculul într-un anumit punct, să zicem după un parcurs de 180°, vedem că el este împrăștiat în planul mișcării deoarece diferite particule cu diferite mase și viteze au diferite raze de curbură, ca în figura 3.10. Practicînd o fantă de ieșire îngustă, dispozitivul poate fi folosit ca un *selector de impulsuri*, adică un aparat cu care se poate obține un fascicul de particule avînd impulsuri sensibil egale dacă toate particulele au aceeași sarcină q. Un avantaj al folosirii deflexiei de 180° este acela că particulele cu impulsuri egale dar trecînd prin fanta de intrare la unghiuri ușor diferite sînt aduse după 180° într-un focar aproape comun.

Precizia focalizării constituie pur și simplu o problemă de geometrie și este ilustrată în figura 3.11 *a* și *b*. Să considerăm o traiectorie ce face la început un unghi θ cu traiectoria ideală. Distanța de la fanta de intrare pînă la punctul în care va lovi suprafața țintei este dată de coarda C a cercului de rază ρ. Diferența în lungime dintre diametru și coardă este:

$$2\rho - C = 2\rho(1 - \cos\theta) \approx \rho\theta^2$$

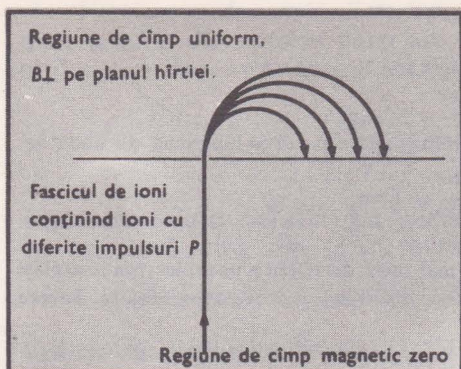


FIG. 3.10. Cîmpul magnetic ca selector de impulsuri.

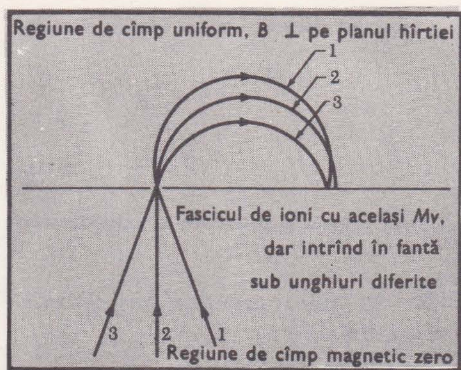


FIG. 3.11. (a) Focalizare la 180° într-un cîmp magnetic. Ionii cu același impuls dar direcții diferite sînt focalizați aproape unii de ceilalți.

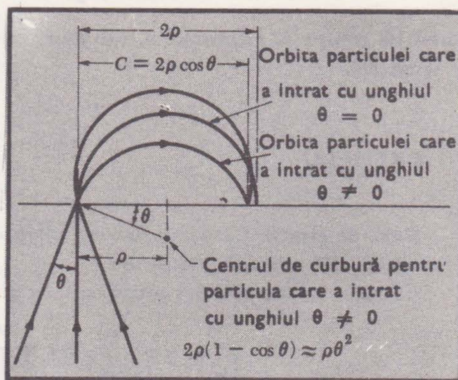


FIG. 3.11. (b) Diagramă arătînd detaliile de focalizare într-un selector de viteze la 180°.

unde pentru θ mic am utilizat primii doi termeni din dezvoltarea în serie de puteri a cosinusului:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots$$

după cum se poate găsi în tabelele matematice (Dwight 415.02). Dacă măsurăm puterea unghiulară de focalizare prin:

$$\frac{2\rho - C}{2\rho} \approx \frac{1}{2}\theta^2$$

avem, pentru $\theta = 0{,}1$ rad, valoarea:

$$\frac{2\rho - C}{2\rho} \approx 5 \times 10^{-3}.$$

Aceasta ilustrează tocmai acțiunea de focalizare.

Principiul accelerării ciclotronice. Într-un ciclotron obișnuit particulele încărcate se mișcă, în cîmp magnetic constant, pe orbite aranjate aproape într-o spirală, după cum este descris în notița istorică de la sfîrșitul acestui

capitol și după cum se vede în figura 3.12. Un cîmp electric oscilant accelerează particulele la fiecare jumătate de perioadă (π rad). Condiția accelerării periodice este ca frecvența cîmpului electric să fie egală cu frecvența ciclotronică a particulelor.

Am arătat mai sus că frecvența ciclotronică a protonilor într-un cîmp de 1 T este 1×10^8 s^{-1} sau $\nu_c = \omega_c/2\pi \approx 10^7$ Hz $= 10$ MHz. Frecvența este independentă de energia particulei, atît timp cît viteza este nerelativistă, adică, este mică în comparație cu viteza luminii. În figura 3.13 este dat un grafic al lungimii de undă (c/ν) în funcție de B.

În fiecare ciclu de funcționare particula primește energie de la cîmpul electric oscilant. Raza efectivă a orbitei crește pe măsură ce crește energia cinetică, deoarece, după cum se vede:

$$r_c = \frac{v}{\omega_c} = \frac{\sqrt{2E/M_p}}{\omega_c}$$

unde E este energia. Energia protonului nerelativist într-un cîmp magnetic constant este determinată de raza exterioară a ciclotronului: la $\omega_c = 1 \times \times 10^8$ s^{-1} și $r_c = 50$ cm, avem $v = \omega_c r_c \approx 5 \times 10^9$ cm/s, sau:

$$E = \frac{1}{2} M_p v^2 \approx 10^{-27}(5 \times 10^7)^2 \approx 2{,}5 \times 10^{-12} \text{ J}.$$

În practică această viteză este suficient de nerelativistă pentru funcționarea unui ciclotron convențional.

FIG. 3.12. O vedere interioară a unui ciclotron convențional de energii joase, constînd din sursa de ioni S, electrozii de accelerare goi pe dinăuntru (Duant$_1$, Duant$_2$) și deflectorul. Întregul aparat se găsește într-un cîmp magnetic omogen și vertical **B** (orientat în sus). Planul orbitei particulei este orizontal și este de asemenea planul median al duanților. Cîmpul electric accelerator de radio frecvență este limitat la intervalul dintre duanți.

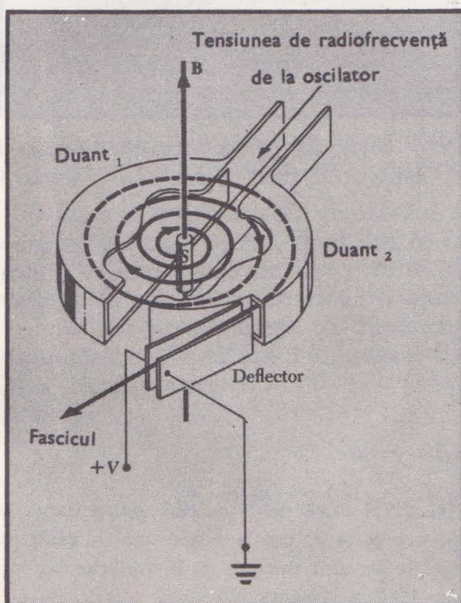
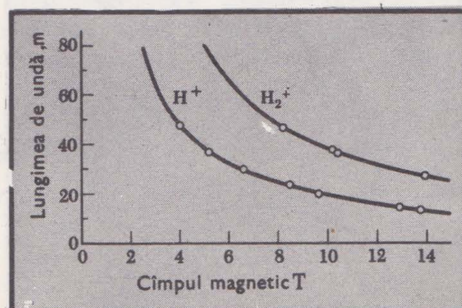


FIG. 3.13. Condiția de rezonanță pentru primul ciclotron (28 cm). Pe axa verticală sînt reprezentate lungimile de undă în vid ale puterii de radiofrecvență aplicată pe electrozii de accelerare (duanți). Curbele reprezintă relațiile teoretice pentru H^+ și H_2^+; cercurile reprezintă observațiile experimentale. [Lawrence and Livingston, Phys. Rev., *40*:19 (1932)]



CONSERVAREA IMPULSULUI

Studentul este probabil familiarizat cu legea conservării impulsului încă din liceu. Importanța ei în problemele de ciocnire este deosebit de mare. Vom prezenta aici o deducere bazată pe legea a treia a lui Newton și vom rezerva pentru capitolul 4 discutarea unei alte demonstrații. Legea spune că:

Pentru un sistem izolat, supus numai forțelor interne (forțele dintre membrii sistemului), impulsul total al sistemului este constant; nu se modifică în timp.

Legea conservării impulsului este aplicată, cel mai adesea, ciocnirilor a două particule și atunci se poate exprima astfel: suma impulsurilor după ciocnire este egală cu suma impulsurilor înainte de ciocnire cu condiția ca ciocnirea să aibă loc într-o regiune fără forțe externe:

$$\mathbf{p}_1(\text{înainte}) + \mathbf{p}_2(\text{înainte}) = \mathbf{p}_1'(\text{după}) + \mathbf{p}_2'(\text{după}) \qquad (3.33)$$

unde impulsul p a fost definit prin relația:

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v} \qquad (3.34)$$

iar prin literele ($\mathbf{p}'$) am indicat valorile după ciocnire. Vezi figura 3.14 pentru descrierea vectorilor impuls iar figura 3.15 pentru descrierea orbitelor. Ciocnirea poate fi ori elastică ori neelastică. Într-o ciocnire elastică întreaga ener-

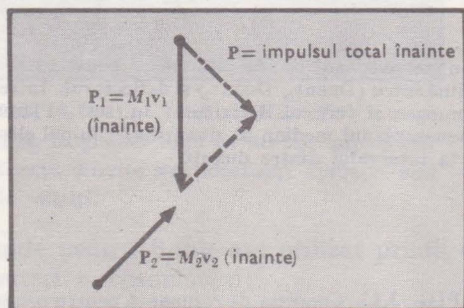


FIG. 3.14.(*a*) Înainte de ciocnire impulsurile $\mathbf{P}_1$(înainte) și $\mathbf{P}_2$ (inainte) adunate dau $\mathbf{P}$.

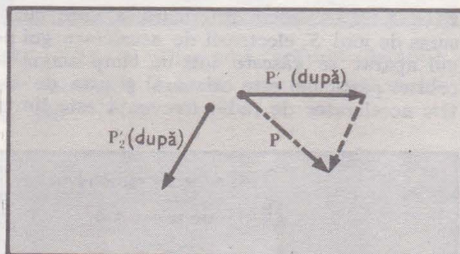


FIG. 3.14. (*b*) După ciocnire impulsurile $\mathbf{P}_1'$ (după) și $\mathbf{P}_2'$(după) adunate dau același $\mathbf{P}$.

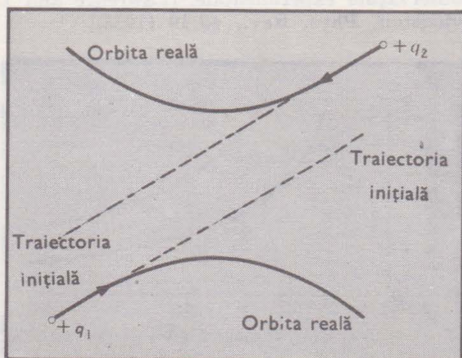


FIG. 3.15. Dacă două sarcini punctiforme în mișcare q_1 și q_2 trec aproape una de cealaltă, orbitele lor sînt deviate de la traiectoriile inițiale în linie dreaptă.

gie cinetică a particulelor înainte de ciocnire se regăsește după ciocnire tot ca energie cinetică dar altfel repartizată între particule. Într-o ciocnire neelastică obișnuită o parte din energia cinetică a particulelor incidente reapare după ciocnire sub formă de energie de excitație *internă* (cum ar fi căldura) a uneia ori mai multor particule. Este important să reținem că legea conservării impulsului se aplică *chiar* și ciocnirilor *neelastice*, în care nu se conservă energia cinetică.

Demonstrație cu ajutorul legii a treia a lui Newton. Să presupunem că două corpuri ascultă de legea a treia a lui Newton [relația (3.3)]. Avem pentru corpul 1:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \frac{d}{dt}(M_1\mathbf{v}_1). \tag{3.35}$$

Pentru corpul al doilea:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(M_2\mathbf{v}_2). \tag{3.36}$$

Adunînd aceste două relații obținem:

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0 = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \frac{d}{dt}(M_1\mathbf{v}_1 + M_2\mathbf{v}_2).$$

Astfel:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = M_1\mathbf{v}_1 + M_2\mathbf{v}_2 = \text{const} = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = M_1\mathbf{v}_1' + M_2\mathbf{v}_2' \tag{3.37}$$

unde am indicat din nou cu accent valorile de după ciocnire. Dacă există mai mult de două corpuri se poate folosi același procedeu cu același rezultat aplicabil oricărui număr de corpuri ale unui sistem izolat.

Un număr de aplicații ale acestei legi vor fi prezentate în exemplele următoare. Va trebui însă să scoatem în evidență două lucruri:

1) această lege este o lege vectorială; deci într-o ciocnire de două particule ale căror impulsuri adunate definesc un impuls rezultant, cele două impulsuri rezultate din ciocnire adunate definesc același impuls;

2) doar aplicarea singură a acestei legi nu ne permite rezolvarea problemei de ciocnire în mod univoc.

Ca o exemplificare a punctului 2 să considerăm problema ciocnirii a două corpuri de mase egale, unul dintre ele fiind inițial în repaus. Numai o informație suplimentară ne va permite obținerea unui răspuns univoc, după cum vedem în următoarele două cazuri.

(*a*) Să presupunem că după ciocnire cele două particule s-au lipit una de cealaltă. Ce viteză vor avea? Fie viteza inițială a particulei în mișcare de-a lungul axei x.
Atunci:

$$\mathbf{p}_1 = M_1 v_1 \hat{\mathbf{x}}; \quad \mathbf{p}_2 = 0$$

$$(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2') = (M_1 + M_2)\,\mathbf{v}' = 2M_1\mathbf{v}' = \mathbf{p}_1 = M_1 v_1 \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{v}' = \frac{v_1}{2}\hat{\mathbf{x}}.$$

(*b*) Să presupunem că în timpul ciocnirii prima particulă a fost oprită pe loc. Ce viteză va avea a doua particulă?

$$\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = 0 + M_2\mathbf{v}_2' = M_1 v_1 \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{v}_2' = v_1 \hat{\mathbf{x}}.$$

Pentru a rezolva în mod unic o problemă de ciocnire, avem nevoie de o informaţie suplimentară celei date de legea conservării impulsului aşa cum este cea obţinută dintr-unul dintre considerentele de la punctele (*a*) sau (*b*). Dar această informaţie suplimentară poate fi formulată în termeni de elasticitate sau de conservare a energiei.

EXEMPLU

Ciocnirea elastică a două particule de mase egale, una dintre ele fiind iniţial în repaus. Vrem să demonstrăm că în acest caz unghiul dintre cei doi vectori impuls sau dintre viteze după ciocnire este egal cu 90°.

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = M_1\mathbf{v}_1 + 0 = M_1\mathbf{v}_1' + M_2\mathbf{v}_2'.$$

Astfel dacă $M_2 = M_1$ şi M_2 iniţial în repaus:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2'.$$

Adjectivul *elastic* aplicat ciocnirilor înseamnă că energia cinetică $\frac{1}{2} Mv^2$ se conservă.

Astfel:

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2$$

ceea ce ne dă:

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2. \tag{3.38}$$

Ecuaţia (3.38) ne aminteşte de teorema lui Pitagora şi după cum se vede din diagrama vectorială din figura 3.16 v_1 trebuie să fie ipotenuza unui triunghi dreptunghic. Unghiul dintre $\mathbf{v}_1'$ şi $\mathbf{v}_2'$ trebuie să fie astfel de 90°.

Alte exemple vor fi date în problemele de la 16 la 18, iar ciocnirile vor fi discutate mai în detaliu în capitolul 6.

Maşina Atwood. Atît legea a doua cît şi legea a treia ale lui Newton sînt utilizate în familiara problemă a *maşinii Atwood,* ilustrată în figura 3.17. Două corpuri de mase diferite sînt suspendate printr-un fir de masă neglijabilă ce trece peste un scripete presupus a se roti fără frecare. Fie m_2 mai mare decît m_1; atunci acceleraţia fiecărui corp va fi în direcţia arătată pe figură şi va avea aceeaşi valoare din cauza continuităţii firului şi a constanţei lungimii lui. Să aflăm întîi valoarea acceleraţiei.

Fiecare corp se găseşte sub acţiunea a două forţe şi anume, tensiunea din fir şi forţa gravitaţiei. Legea a treia a lui Newton ne spune că tensiunea trebuie să aibă aceeaşi valoare faţă de fiecare corp. Legea a doua a lui Newton ne permite să scriem:

$$\begin{aligned} &\text{pentru mişcarea lui } m_1 \quad T - m_1 g = m_1 a; \\ &\text{pentru mişcarea lui } m_2 \quad m_2 g - T = m_2 a. \end{aligned} \tag{3.39}$$

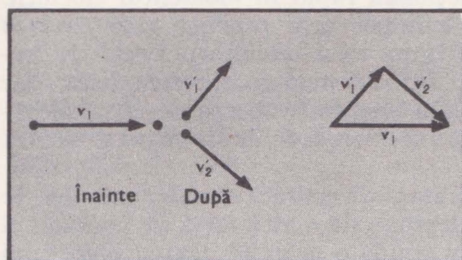


FIG. 3.16. Ciocnirea elastică a două mase egale.

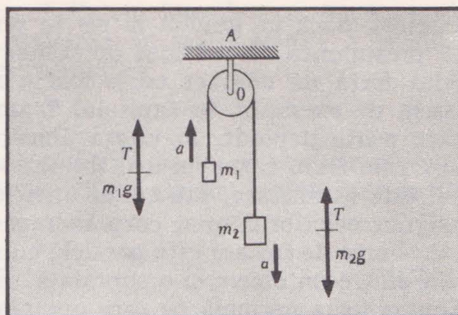


FIG. 3.17. Mașina Atwood.

Adunînd aceste două ecuații obținem:

$$(m_2 - m_1)\, g = (m_1 + m_2)\, a \quad \text{sau} \quad a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, g. \qquad (3.40)$$

Putem acum evalua tensiunea T introducînd expresia lui a în oricare din ecuațiile (3.39). Găsim:

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}\, g.$$

Cît de tare ar trebui să fie firul? El nu trebuie să se rupă sub această tensiune, ceea ce înseamnă că el ar trebui să suporte o masă pentru care $mg = T$. Ar trebui să fie astfel cel puțin atît de rezistent încît să suporte masa:

$$m = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

care este mai mare decît m_1 deși mai mică decît m_2.

Este instructiv de notat că expresia accelerației [relația (3.40)] poate fi înțeleasă în sensul existenței unei forțe $F = Ma$ ce acționează asupra unui singur corp, ținînd cont însă că masa totală în mișcare este $m_1 + m_2$ în timp ce forța netă este $(m_2 - m_1)\, g$. Astfel, ca mai înainte,

$$a = \frac{F}{M} = \frac{(m_2 - m_1)\, g}{m_2 + m_1}.$$

FORȚE DE CONTACT. FRECAREA

În activitatea noastră cotidiană sîntem adesea confruntați cu forțe exercitate asupra unui corp prin intermediul presiunilor sau al tensiunilor ce acționează la contactul cu un alt corp. În paragraful precedent forțe de acest tip apăreau la considerarea tensiunii în fir iar în discuția anterioară despre

ciocniri, dacă ne gîndim la ele în sensul unor bile de piatră sau de biliard, se presupunea că presiuni de contact acționau rapid în momentul ciocnirii. Altă forță de contact cu o foarte mare importanță practică este *frecarea* (vezi, de exemplu, în capitolul 7 amortizarea unui oscilator). Forța de frecare poate depinde de viteza obiectului într-un mod foarte complicat, dar aici vom trata cazul cel mai simplu — cel al unei forțe constante, dacă obiectul este în mișcare, sau cel al unei forțe exact cît trebuie de mare pentru a asigura echilibrul unui corp în repaus.

Forța de frecare este paralelă cu suprafața de contact dintre două obiecte sau dintre un obiect și o suprafață. Ea depinde de o altă forță de contact, și anume forța normală pe care o suprafață solidă o exercită asupra obiectului pe care îl suportă. Figura 3.18 ne prezintă un obiect situat pe o suprafață plană orizontală. Desigur, forța de gravitate Mg acționează vertical de sus în jos. Deoarece corpul este în repaus, legea întîi a lui Newton ne spune că ar trebui de asemenea să existe o forță îndreptată în sus și egală cu Mg. O astfel de forță, normală pe suprafață și care împiedică corpul să cadă prin suprafață, este notată, de obicei, cu N, ca în figura 3.18. Forța ce tinde să introducă corpul în suprafață poate fi gravitatea, o componentă a forței gravitaționale sau o complet altă forță depinzînd de împrejurările particulare.

Să presupunem acum că exercităm asupra unui corp o forță **F** paralelă cu suprafața (legînd poate corpul de un fir ce are la capăt o greutate, ca în fig. 3.19) dar nu suficient de mare pentru a provoca alunecarea corpului. Folosind din nou legea întîi a lui Newton vedem că suprafața trebuie să exercite asupra corpului o forță egală și opusă —**F**. Această forță —**F** se numește *forță de frecare*. Ea este nulă pînă în momentul în care **F** încearcă să miște corpul.

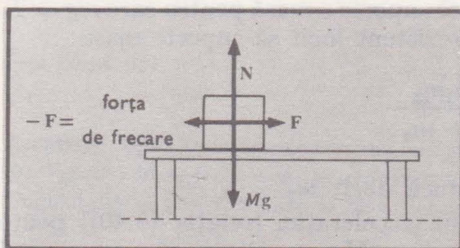


FIG. 3.18. Un corp pe o suprafață orizontală asupra căruia acționează gravitatea Mg, forța normală **N**, forța orizontală externă **F** și forța de frecare − **F**.

FIG. 3.19. (*a*) M departe de a aluneca.

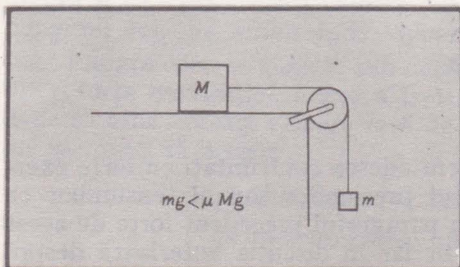
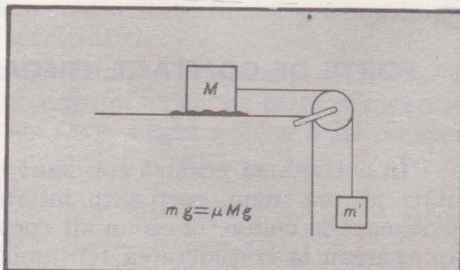


FIG. 3.19. (*b*) M gata să alunece.



Cît de mare poate fi forța de frecare? Putem întotdeauna (cu excepția obiectelor imobile) exercita o forță **F** suficient de mare pentru a produce alunecarea corpului. Este un fapt experimental că

$$F_{max} = \mu N \tag{3.41}$$

unde μ este o constantă numită *coeficient static de frecare* și este caracteristic suprafețelor în contact. Exemple cu cîteva valori ale lui μ sînt date în tabelul 3.1.

TABELUL 3.1

Coeficienții statici de frecare $\mu = F/N$

Materialul	μ
Sticlă pe sticlă	0,9 – 1,0
Sticlă pe metal	0,5 – 0,7
Grafit pe grafit	0,1
Cauciuc pe solide	1 – 4
Ferodou pe fontă	0,4
Gheață pe gheață	0,05 – 0,15
Ceară de schi pe zăpadă uscată	0,04
Cupru pe cupru	1,6
Oțel pe oțel	0,58

Rețineți că forța de frecare statică poate lua orice valoare pînă la μN, depinzînd de valoarea forței externe aplicate; acest lucru se vede în figura 3.19.

EXEMPLU

Măsurarea lui μ. Valoarea lui μ poate fi determinată aflînd unghiul θ pe care un plan inclinat îl face cu orizontala atunci cînd corpul tocmai începe să alunece. Dacă ne referim la figura 3.20 și presupunem că tocmai începe alunecarea corpului, ne dăm seama că suma celor trei forțe Mg, **N**, și $\mathbf{F}_{\text{fricțiune}}$ trebuie să fie zero. Luînd componentele paralele și perpendiculare cu suprafața găsim:

$$N = Mg\cos\theta; \quad F_{fric} = Mg\sin\theta. \tag{3.42}$$

Folosind faptul că $F_{fric} = \mu N$, obținem:

$$\mu = \frac{F_{fric}}{N} = \frac{Mg\sin\theta}{Mg\cos\theta} = \text{tg}\,\theta. \tag{3.43}$$

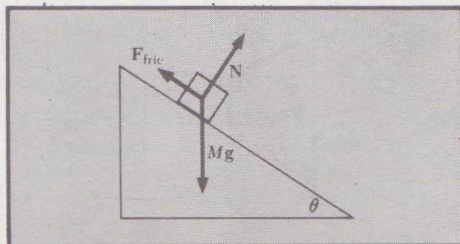


FIG. 3.20. Corpul gata să alunece în jos pe un plan înclinat.

EXEMPLU

Alunecarea sub acțiunea unei forțe tangențiale, cu direcție oarecare. Un corp de masă M se află pe un plan înclinat avînd coeficientul de frecare $\mu > \text{tg}\,\theta$. Să se afle mărimea forței paralele cu planul necesară pentru producerea alunecării corpului, în funcție de unghiul făcut cu direcția de pantă maximă a planului. O variantă a acestei probleme se formulează astfel: dacă o forță paralelă cu planul dar nu neapărat în susul sau în josul planului produce alunecarea corpului, să se găsească direcția în care corpul va începe să se miște, în funcție de direcția forței.

Figura 3.21 ne arată forțele paralele cu planul ce sînt responsabile pentru echilibru. Din figura 3.21 se vede că $\mathbf{F}_{fric}$, $Mg \sin\theta\,\hat{\mathbf{x}}$ și $\mathbf{F}$ (forța externă) adunate trebuie să dea zero. Deoarece corpul tocmai începe să alunece, avem din exemplul de mai sus:

$$F_{fric} = \mu Mg \cos\theta.$$

Luînd componentele din susul și josul planului,

$$F \cos\alpha + F_{fric} \cos\beta - Mg \sin\theta = 0$$

sau:

$$F \cos\alpha + \mu Mg \cos\theta \cos\beta = Mg \sin\theta.$$

Perpendicular pe această direcție:

$$F_{fric} \sin\beta - F \sin\alpha = 0; \quad F \sin\alpha = \mu Mg \cos\theta \sin\beta.$$

Eliminîndu-l pe β din aceste ecuații obținem:

$$\frac{F}{Mg} = \cos\alpha \sin\theta \pm \sqrt{\cos^2\alpha \sin^2\theta + \mu^2 \cos^2\theta - \sin^2\theta}. \tag{3.44}$$

Ce sens are semnul minus în relația (3.44)? Pentru a afla acest lucru să observăm că $\mu^2 \cos^2\theta > \sin^2\theta$ deoarece am presupus că $\mu > \text{tg}\,\theta$. Astfel rădăcina pătrată din termenul de sub radical este mai mare decît $\cos\alpha \sin\theta$. Dacă folosim semnul minus, F va fi o mărime negativă. Dar este clar că această soluție este inacceptabilă deoarece pe F l-am presupus pozitiv. Va trebui, deci, să folosim semnul plus. Să notăm că:

$$F = Mg \sin\theta + \mu Mg \cos\theta \quad \text{cînd } \alpha = 0$$

$$F = -Mg \sin\theta + \mu Mg \cos\theta \quad \text{cînd } \alpha = \pi$$

relații ce se pot obține imediat. Se poate verifica de asemenea că dacă $\mu = \text{tg}\,\theta$ și $\alpha = \pi$, $F = 0$.

Cînd F va fi doar un pic mai mare decît valoarea din (3.44), corpul va începe să alunece în direcția opusă lui $\mathbf{F}_{fric}$. Din ecuațiile de mai sus se poate calcula β și se obține:

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\mu} (\cos\alpha\, \text{tg}\,\theta + \sqrt{\mu^2 - \text{tg}^2\theta \sin^2\alpha}).$$

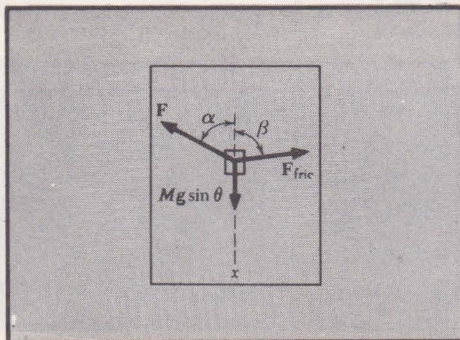


FIG. 3.21. Un corp gata să alunece pe un plan înclinat sub acțiunea unei forțe externe **F**.

Se poate verifica această ecuație alegînd $\beta = \pi/2$, în care caz cele trei forțe F, Mg sin θx, și F_{frt} formează un triunghi dreptunghic.

EXEMPLU

Mişcarea orizontală cu forță de frecare constantă. Să presupunem că coeficientul de frecare dintre o suprafață orizontală și un corp în mișcare este μ. Cu ce viteză trebuie să proiectăm corpul paralel cu suprafața pentru a parcurge distanța D pînă la oprire? Avem o problemă cu o forță constantă și în care mișcarea are loc pe o dreaptă:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu Mg; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu g.$$

Am obținut deja soluția unei ecuații similare în paragraful privind gravitatea. Vezi expresiile (3.8) și (3.9). Avem:

$$v_x = -\mu gt + v_0 \text{ și } x = -\frac{1}{2}\mu gt^2 + v_0t$$

unde l-am pus pe x_0 (valoarea lui x la $t = 0$) egal cu zero. Viteza necesară este v_0. Cînd corpul se oprește,

$$v_x = 0 \text{ și } t = v_0/\mu g.$$

Înlocuind această valoare în expresia lui x și făcîndu-l pe x egal cu D, obținem:

$$D = -\frac{1}{2}\mu g\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{\mu g} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu g}$$

sau

$$v_0 = \sqrt{2D\mu g}.$$

PROBLEME

(*Notă*: După răspunsurile numerice indicați totdeauna și unitățile de măsură. Fără unități, un răspuns numeric nu are nici un sens.)

1. *Legea a treia a lui Newton.* Un începător în ale fizicii elementare se află în mijlocul unui patinoar. Coeficientul de frecare dintre gheață și picioarele sale este mic dar diferit de zero. Lui i s-a predat legea a treia a lui Newton. Deoarece legea spune că fiecărei acțiuni îi corespunde o reacțiune egală și opusă, suma tuturor forțelor dă zero. El presupune astfel că nici o forță nu-l poate accelera către marginea patinoarului și atunci ar trebui să rămînă în centrul lui.

(*a*) Cum îi explicați cum să ajungă la margine?

(*b*) Odată ajuns la margine, ce îi veți spune despre legile a doua și a treia ale lui Newton?

2. *Maimuța și vînătorul.* O demonstrație obișnuită la cursurile de fizică de anul I este prezentată în figura 3.22. Din punctul O se trage un cartuș cu o pușcă țintind la un obiect localizat în P. Simultan

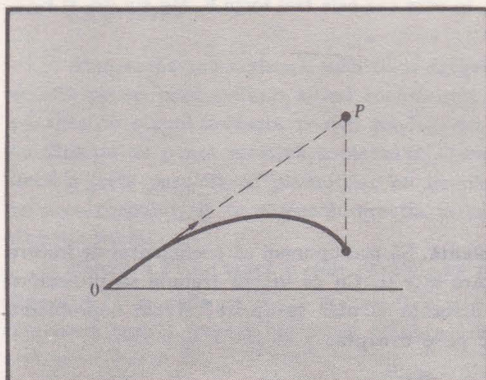


FIG. 3.22

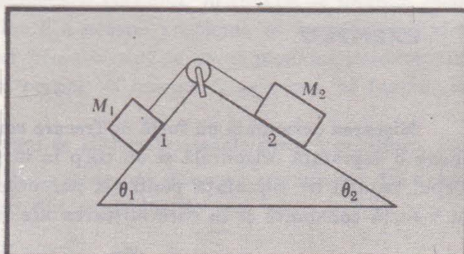


FIG. 3.23

cu lansarea glonțului este eliberat și obiectul. Se vede că proiectilul lovește obiectul ce cade. Arătați că această ciocnire în aer rezultă independent de viteza glonțului la gura puștii.

3. *Înălțimea tavanului la aruncatul mingii.* Doi copii aruncă și prind o minge într-un coridor lung. Înălțimea tavanului este H, iar mingea este aruncată și prinsă la înălțimea umărului h, aceeași pentru fiecare copil. Dacă copiii pot arunca mingea cu viteza v_0, la ce depărtare maximă ar putea să se joace?

R: $R = 4\sqrt{(H - h)[v_0^2/2g - (H - h)]}$.

Arătați că dacă $H - h > v_0^2/4g$, $R = v_0^2/g$. Explicați semnificația fizică a condiției $H - h > v_0^2/4g$.

4 *Împușcături în sus.* Viteza unui glonț de pușcă la gura țevii este de 30 m/s. Un om trage in aer, exact în sus, cite un foc la fiecare secundă. Nu se ia în considerare frecarea.

(*a*) Cite gloanțe vor fi în aer la fiecare moment de timp?

(*b*) La ce înălțime deasupra solului vor trece gloanțele unele pe lîngă altele?

5. *Frecarea pe două plane înclinate.* În figura 3.23 planele 1 și 2 sînt amîndouă rugoase cu coeficienții de frecare μ_1 și μ_2. Găsiți relația dintre M_1, M_2, θ_1, θ_2, μ_1 și μ_2 astfel încît:

(*a*) M_1 este gata să alunece pe planul 1;

(*b*) M_2 este gata să alunece pe planul 2.

6. *Frecare diferită de μMg.* În figura 3.24 este prezentată forța **F** acționînd asupra unui bloc de masă M ce se sprijină pe o suprafață orizontală cu coeficientul de frecare μ.

(*a*) Presupunînd $F \gg Mg$, să se găsească unghiul maxim la care forța nu mai poate face blocul să alunece indiferent cît de mare ar fi.

(*b*) Găsiți raportul F/Mg în funcție de θ și de μ așa încît blocul să înceapă tocmai alunecarea. Arătați că în cazul $\mathbf{F} \gg Mg$ răspunsul se reduce la cel de la punctul (*a*).

7. *Mașina Atwood.* Găsiți tensiunea din firul OA ce susține scripetele mașinii Atwood din figura 3.17. Arătați că suma vectorială a celor trei forțe — tensiunea aceasta, m_1g și m_2g — este egală cu viteza de variație a impulsului pe verticală.

8. *Satelitul și Luna.* Cine aleargă mai repede, Luna sau un satelit gravitînd în jurul Pămîntului pe o traiectorie a cărei rază este doar un pic mai mare decît raza Pămîntului? Care este raportul vitezelor în

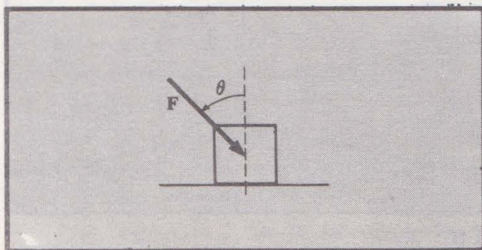


FIG. 3.24

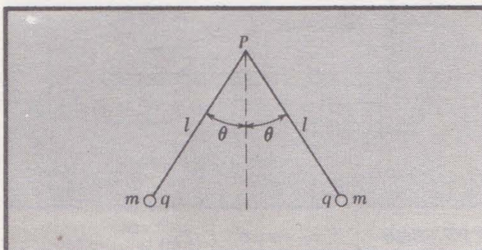


FIG. 3.25

funcție de raportul razelor? Care este raportul perioadelor? Ținînd cont că Luna are o perioadă de revoluție de 27 de zile și raza orbitei de 380 000 km iar raza Pămîntului este 6 400 km, aflați perioada de rotație a satelitului.

9. *Forța electrostatică.* Două mici sfere identice conducătoare de electricitate sînt suspendate în punctul P prin fire de lungime egală. Sferele atîrnă inițial liber și sînt în contact una cu cealaltă cu $\theta \approx 0$. Li se comunică o sarcină electrică pe care și-o împart în mod egal și pe urmă iau poziția de echilibru din figura 3.25. Găsiți pentru q o expresie în funcție de m, g, l și de θ. (Considerați sferele mici ca sarcini punctuale.)

10. *Protonul într-un cîmp electric.*

(a) Ce forță (în N) acționează asupra unui proton într-un cîmp electric de 100 V/m?

(b) Un proton inițial în repaus este lăsat liber într-un cîmp cu această intensitate; care va fi viteza lui după 10^{-8} s?

(c) La ce distanță va ajunge după acest timp?

11. *Protonul într-un cîmp magnetic.* Un proton ($e = 1{,}6 \times 10^{-19}$C) este proiectat cu o viteză al cărei vector este $\mathbf{v} = 2 \times 10^6\,\hat{\mathbf{x}}$ m/s, într-o regiune în care există un cîmp magnetic uniform descris de $\mathbf{B} = 0{,}1\,\hat{\mathbf{z}}$ T.

(a) Evaluați forța (în mărime și în direcție) ce acționează asupra protonului imediat după proiectarea sa.

(b) Care este raza de curbură a traiectoriei sale ulterioare?

(c) Localizați poziția centrului traiectoriei circulare dacă protonul pleacă din origine.

12. *Raportul forțelor electrice și gravitaționale dintre doi electroni.* Mărimea forței electrostatice dintre doi electroni este $e^2/4\pi\varepsilon_0 r^2$; mărimea forței gravitaționale este Gm^2/r^2, unde $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg². Care este raportul forțelor electrostatică și gravitațională dintre cei doi electroni?

R: 10^{42}

13. *Cîmpuri electrice și magnetice încrucișate.* O particulă se mișcă în direcția x într-o regiune în care există un cîmp electric E_y și un cîmp magnetic perpendicular B_z. Ce condiție este necesară pentru ca forța rezultantă ce acționează asupra particulei să fie zero? Reprezentați vectorii **v**, **E** și **B** într-o diagramă. Cît trebuie să fie v_x dacă $E_y = 3 \times 10^5$ V/m iar $B_z = 3 \times 10^{-2}$ T?

R: $= v_x = 1 \times 10^7$ m/s.

14. *Devierea între plăcile unui condensator.* O particulă de sarcină q și masă M intră într-un cîmp electric $-E\hat{\mathbf{y}}$ cu viteza

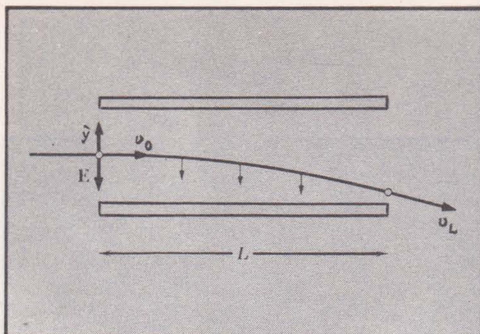


FIG. 3.26

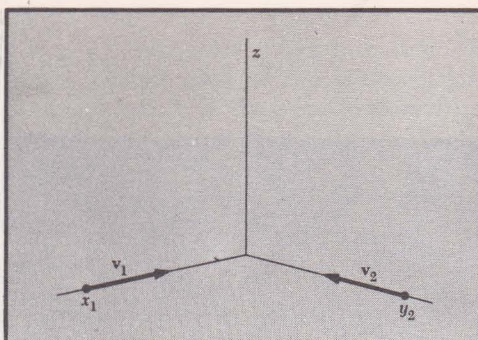


FIG. 3.27

$v_0\hat{x}$ (vezi fig. 3.26). Vom presupune că E este uniform, adică, valoarea sa este constantă în toate punctele regiunii dintre plăcile de lungime L (cu excepția unor mici variații la marginile plăcilor și pe care le vom neglija).

(*a*) Ce forțe acționează pe direcțiile x respectiv y?

R: $F_x = 0$; $F_y = -qE\hat{y}$.

(*b*) Va influența, o forță pe direcția y, componenta pe direcția x a vitezei?

(*c*) Aflați pe v_x și v_y ca funcții de timp și scrieți expresia vectorială completă pentru $\mathbf{v}(t)$.

R: $v_0\hat{x} - (qE/M)t\hat{y}$.

(*d*) Plasați originea în punctul de intrare și scrieți expresia vectorială completă a poziției particulei ca funcție de timp pe perioada în care particula se află între plăcile condensatorului.

15. *Continuarea problemei precedente.* Dacă particula din problema 14 este un electron cu energia cinetică inițială de 10^{-17} J (energia cinetică $= \frac{1}{2}mv^2$; 1 J este energia cinetică a unui corp cu masa de 2kg mișcîndu-se cu viteza de 1 m/s), dacă intensitatea cîmpului electric este 300 V/m și dacă $L = 0{,}02$ m, găsiți:

(*a*) vectorul viteză în momentul în care electronul părăsește regiunea dintre plăci;

(*b*) unghiul $(\mathbf{v},\hat{x})$ pe care îl face particula cu direcția inițială cînd părăsește plăcile;

R: 2,7°,

c) punctul de intersecție al axei x cu direcția particulei cînd părăsește plăcile.

R: 0,01 m.

16. *Ciocniri.* Două particule se află inițial în pozițiile $x_1 = 5$ cm, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 10$ cm, cu $\mathbf{v}_1 = -4 \times 100\,\hat{x}$ m/s, și $\mathbf{v}_2$ de-a lungul lui $-\hat{y}$, ca în figura 3.27.

(*a*) Care trebuie să fie valoarea lui $\mathbf{v}_2$ ca ele să se ciocnească?

R: $-8 \times 100\,\hat{y}$ m/s.

(*b*) Care este valoarea lui $\mathbf{v}_r$, viteza relativă?

R: $4 \times 100\,(2\hat{y} - \hat{x})$ m/s.

(*c*) Stabiliți un criteriu general pentru ciocnirea a două obiecte în funcție de vectorii de poziție $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ și de vitezele $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.

17. *Cinematica ciocnirilor.* Două corpuri obligate să se miște într-un plan orizontal se ciocnesc. Fiind date inițial $M_1 = 0{,}085$ kg, $M_2 = 0{,}200$ kg, $\mathbf{v}_1 = 6{,}4 \times 10^{-2}\,\hat{x}$ m/s și $\mathbf{v}_2 = (-6{,}7\,\hat{x} - 2{,}0\,\hat{y}) \times 10^{-2}$ m/s:

(*a*) aflați impulsul total.

R. $(-7{,}96\,\hat{x} - 4\,\hat{y}) \times 10^3$kg m/s.

(*b*) Dacă după ciocnire $|\mathbf{w}_1| = 9{,}23 \times 10^{-2}$ m/s și $\mathbf{w}_2 = (-4{,}4\,\hat{x} + 1{,}9\,\hat{y}) \times 10^{-2}$ m/s, care este direcția lui $\mathbf{w}_1$? (Am folosit simbolul $\mathbf{w}$ pentru vitezele după ciocnire.)

R: $-84°$ în raport cu axa x.

(*c*) Care este viteza relativă $\mathbf{w}_r = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$?

R: $(5{,}4\,\hat{x} - 11\,\hat{y}) \times 10^{-2}$ m/s.

(*d*) Care sînt energiile cinetice totale inițiale și finale? Ciocnirea este elastică sau neelastică?

18. *Ciocnire neelastică.* Două obiecte ($M_1 = 2$ kg; $M_2 = 5$ kg) cu puțin timp înaintea unei ciocniri care le unește permanent au vitezele $\mathbf{v}_1 = 10\ \hat{\mathbf{x}}$ m/s și $\mathbf{v}_2 = 3\ \hat{\mathbf{x}} + 5\ \hat{\mathbf{y}}$ m/s.

(*a*) Care este viteza lor finală?

(*b*) Ce fracțiune din energia cinetică inițială se pierde în timpul ciocnirii?

19. *Satelitul pe o orbită.* Să considerăm orbita unui satelit cu puțin mai mare decît ecuatorul unei planete sferice cu densitatea ρ. Arătați că perioada T a unei astfel de orbite depinde numai de densitatea planetei. Găsiți o relație pentru T. (Ea îl va conține de asemenea pe G.)

20. *Bătaia proiectilelor de mortiere.* Mai jos sînt prezentate bătaia și viteza la gura țevii pentru proiectilele de mortiere trase la 45° față de orizontală. A fost de asemenea inclus timpul de zbor. Comparați aceste date privind bătaia și timpul de zbor cu teoria în cazul ideal. Puteți vedea vreo regularitate? (Datele sînt de la Departamentul Armatei Statelor Unite, Tabelele de tragere FT4.2–F–1, Decembrie 1954.) Utilizați $g = 9{,}76$ m/s².

Viteza proiectilului (m/s)	Bătaia (m)	Timpul (s)
102	972	14,4
111	1159	15,7
122	1349	17,0
131	1539	18,2

TEME AVANSATE

Particula încărcată într-un cîmp electric alternativ omogen

Fie

$$E = E_x\hat{\mathbf{x}} = E_x^0 \sin\ \omega t\hat{\mathbf{x}}$$

unde $\omega = 2\pi f$ este frecvența unghiulară iar E_x^0 este amplitudinea vectorului cîmp electric. Indicele (°) de lîngă E va fi adesea omis dacă nu apare nici o ambiguitate. Ecuația de mișcare este, din relația (3.20),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{M} E_x = \frac{q}{M} E_x^0 \sin \omega t. \qquad (3.45)$$

La rezolvarea ecuațiilor diferențiale vom folosi adesea metoda încercărilor succesive, ghidîndu-ne după instinctul fizic. Vom încerca o soluție de forma[1]:

$$x(t) = x_1 \sin\omega t + v_0 t + x_0. \qquad (3.46)$$

Derivînd relația (3.46) obținem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_1 \sin \omega t.$$

Derivatele sinusului și ale consinusului sînt date de:

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta \qquad \frac{d^2}{d\theta^2}\sin\theta = -\sin\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta \qquad \frac{d^2}{d\theta^2}\cos\theta = -\cos\theta$$

[1] În acest paragraf vom participa la una dintre preocupările importante ale unui fizician: aflarea soluției unei ecuații diferențiale conformă cu niște condiții inițiale date. Aceasta este o artă în care intuiția joacă un rol foarte important. Adesea există procedee matematice bine precizate; dar tot adesea fizicianul se întreabă: "Ce s-ar putea întîmpla?" sau "La ce altceva v-ați aștepta?" În sfîrșit, verificarea constă în introducerea soluției presupuse în ecuația originală și constatarea dacă soluția este bună sau nu. Dacă soluția este greșită, încercați din nou. Presupunerile inteligente economisesc timpul, dar chiar presupunerile greșite pot lămuri problema.

Relația (3.45) ne spune că accelerația unei particule încărcate este o funcție sinusoidală de timp dacă forța aplicată este sinusoidală. Deoarece accelerația este oscilantă, deplasarea trebuie să fie cel puțin în parte oscilantă. Acesta este motivul pentru care includem în (3.46) termenii $\sin \omega t$ sau $\cos \omega t$. Îl alegem pe $\sin \omega t$ fiindcă două derivări succesive ale funcției sinus ne dau tot o funcție sinus. Termenul x_0 trebuie inclus ca deplasare inițială. Cum trebuie să ne gîndim și la viteza inițială includem termenul $v_0 t$ care ne poate da orice viteză inițială, inclusiv zero. Efectul termenului $v_0 t$ va rămîne și la momente ulterioare de timp ca o viteză constantă suprapusă celei oscilatorii. Forma $v_0 t$ este singura posibilă, o putere mai mare în t n-ar fi consistentă cu ecuația (3.45).

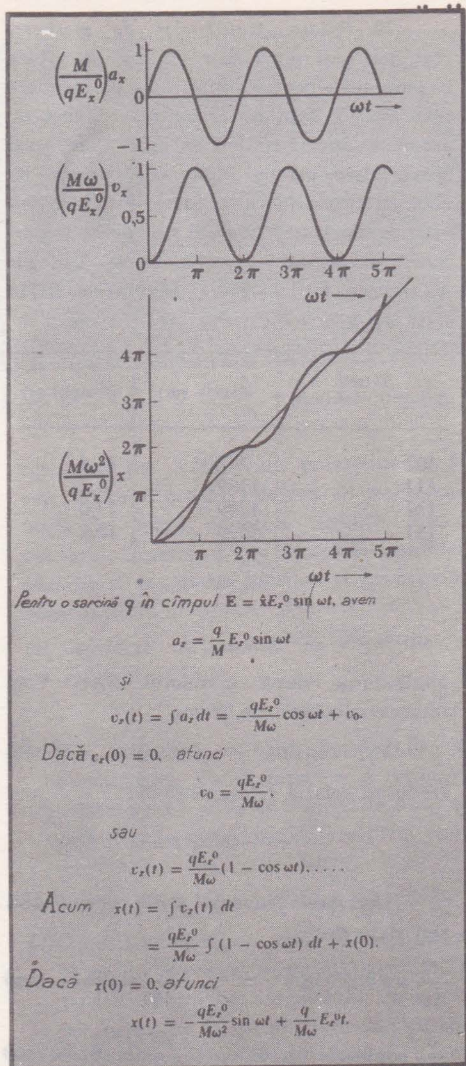


FIG. 3.28. Accelerația, viteza și deplasarea reprezentate în funcție de ωt.

Relația (3.46) reprezintă o soluție a ecuației de mișcare [ecuația (3.45)] cu condiția ca:

$$-\omega^2 x_1 \sin \omega t = \frac{q}{M} E_x^0 \sin \omega t. \quad (3.47)$$

Adică:

$$x_1 = -\frac{q\,E_x^0}{M\omega^2}. \quad (3.48)$$

Substituindu-l pe (3.48) în (3.46) avem următorul rezultat:

$$x(t) = -\frac{q\,E_x^0}{M\omega^2} \sin \omega t + v_0 t + x_0.$$

Viteza este:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{q\,E_x^0}{M\omega} \cos \omega t + v_0$$

astfel la $t = 0$

$$v_x(0) = -\frac{q\,E_x^0}{M\omega} + v_0.$$

Să nu confundăm $v_x(0)$, care este viteza la $t = 0$, cu v_0, care este o constantă astfel aleasă încît să-i dăm lui $v_x(0)$ o anumită valoare. Dacă alegem viteza inițială zero va trebui să avem:

$$v_0 = \frac{q\,E_x^0}{M\omega}.$$

Substituind această mărime în expresia lui $x(t)$ de mai sus, obținem:

$$x(t) = -\frac{q\,E_x^0}{M\omega^2} \sin \omega t + \frac{q\,E_x^0}{M\omega} t + x_0.$$

Acest rezultat este întrucîtva neașteptat: cu condiția la limită $v_x = 0$, la $t = 0$, mișcarea constă dintr-o oscilație suprapusă peste o deplasare continuă de viteză constantă $qE_x^0/M\omega$. Se întîmplă acest lucru, deoarece în cazul special al acestei probleme particula nu-și inversează niciodată sensul vitezei. Particula face în mod continuu pași mărunți în același sens. De notat că în această problemă v_0 *nu* este egal cu $v_x(t = 0)$ dar x_0 este egal cu $x(t = 0)$.

Accelerația, viteza și distanța ca funcții de timp sînt arătate în figura 3.28.

NOTĂ MATEMATICĂ

Ecuații diferențiale. Am văzut că în coordonate carteziene accelerația este:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{y}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{z}}.$$

În alte coordonate vor apărea derivate de ordinul doi și foarte posibil derivate de

ordinul întîi în raport cu timpul. Într-o singură dimensiune, legea a doua a lui Newton se reduce la:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F_x. \quad (3.49)$$

Cînd scriem această ecuație scopul nostru este să-l aflăm pe x în funcție de timp; adică să rezolvăm ecuația în raport cu x. Soluția acestei ecuații, numită *ecuație diferențială*, va fi $x(t)$. Cum găsim o asemenea soluție? Matematicienii au procedee standard pentru acest lucru dar fizicienii foarte adesea ghicesc cite o soluție și verifică dacă soluția imaginată verifică ecuația (3.49). Există un număr de tipuri comune de ecuații diferențiale ce apar atît de frecvent în fizică încît este util să ținem minte soluțiile. Acum vom discuta două dintre aceste ecuații iar altele la finele celorlalte capitole.

Cazul cel mai simplu este pentru $F = 0$. Răspunsul îl știm deja din legea întîi a lui Newton, dar să-l mai vedem odată din punctul de vedere al soluției ecuației:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 = \frac{dv_x}{dt}. \quad (3.50)$$

Știm că derivata unei constante este 0, și astfel:

$$v_x = \text{const} = v_0$$

trebuie să fie o soluție. Aceasta înseamnă că:

$$\frac{dx}{dt} = v_0. \quad (3.51)$$

Încercăm o soluție de forma:

$$x = v_0 t + x_0. \quad (3.52)$$

Cînd derivăm o dată obținem ecuația (3.51) cind derivăm de două ori obținem ecuația (3.50). Spunem astfel că ecuația a fost rezolvată și se poate arăta că aceasta este singura soluție.

Cine sint v_0 și x_0? Ele sînt niște constante, desigur, dar de unde provin? Ele provin din problema particulară aflată în considerație. Să presupunem, de exemplu, că avem o particulă în repaus la $x = 0$ și nici o forță nu acționează asupra ei. Atunci $v_0 = 0$, $x_0 = 0$ și soluția noastră este $x = 0$. Cu alte cuvinte, particula rămîne la $x = 0$ pentru totdeauna sau cel puțin atîta timp cît nu începe să acționeze asupra ei nici o forță. Să presupunem, totuși, că avem o particulă liberă care la $t = 0$ este în $x = +50$ și se deplasează în sensul negativ al axei x cu viteza 25. Atunci $x_0 = +50$, $v_0 = -25$, astfel încît:

$$x = -25\,t + 50$$

și îl cunoaștem pe x pentru toate valorile $t > 0$. Dacă știm că nici pentru $t < 0$ n-au acționat forțe, atunci acest rezultat ni-l dă, de asemenea, pe x pentru toate valorile lui t negative. Deseori, aceste două constante x_0 și v_0 sînt numite *constante de integrare* și trebuie determinate din condițiile problemei care sînt și ele tot deseori numite *condiții inițiale*. Ecuațiile diferențiale de ordinul doi au întotdeauna *două* constante arbitrare; ecuațiile diferențiale de ordinul întîi au numai *una*.

Următorul caz simplu este $F_x = \text{const} = F_0$. Trecem de la x la y pentru a-i da studentului posibilitatea să coreleze soluțiile cu exemplul de la începutul capitolului:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_0}{M} = a \quad (3.53)$$

unde a este accelerația constantă. Să încercăm o soluție:

$$y = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + y_0. \quad (3.54)$$

Derivînd de două ori ajungem la ecuația (3.53) și astfel avem o soluție; v_0 și y_0 sînt iarăși constante arbitrare ce trebuie determinate din problema în considerație. Din cunoștințele anterioare de fizică puteți recunoaște ecuația (3.54) ca fiind cea a unei particule sub acțiunea gravitației. Dacă direcția pozitivă a axei y este în sus atunci $a = -g$ unde g este accelerația gravitației 9,8 m/s^2. Iată mai jos cîteva exemple:

1. Pentru un corp lăsat să cadă în jos din repaus de la 100 m

$$v_0 = 0; \quad y_0 = 100$$

și astfel

$$y = \left(-\frac{1}{2}\,9{,}8\,t^2 + 100\right)(\text{m}). \quad (3.55)$$

2. Pentru un corp aruncat drept în sus din origine cu $v_0 = 9{,}8$ m/s

$$y_0 = 0;\quad v_0 = 9{,}8$$

$$y = \left(-\frac{1}{2}\, 9{,}8\, t^2 + 9{,}8\, t\right) (\mathrm{m}). \quad (3.56)$$

Din aceste exemple putem calcula valorile lui y pentru orice t. De exemplu, din ecuația (3.56), care este maximul înălțimii atinse de corp?

Vom pune

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 = -\, 9{,}8\, t + 9{,}8$$

pentru

$$t = 1\ \mathrm{s};\quad y = -\frac{1}{2}\, 9{,}8 \times 1^2 + 9{,}8 \times 1 = 4{,}9\ \mathrm{m}.$$

De notat că $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0$ înseamnă $v_y = 0$, care reprezintă chiar situația în care corpul atinge înălțimea maximă.

Din punct de vedere matematic condițiile iuițiale pot fi interpretate ca valorile lui y și $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ într-un punct oarecare, și care, în cazul de mai sus, este dat de $t = 0$. Ecuațiile diferențiale de ordinul doi dau curbura lui y în funcție de t, dar nu dau panta și valoarea. Astfel, pentru a obține curba în mod unic este necesar să specificăm atît panta cît și valoarea într-un punct. Studentul ar putea compara graficele ecuațiilor (3.55) și (3.56).

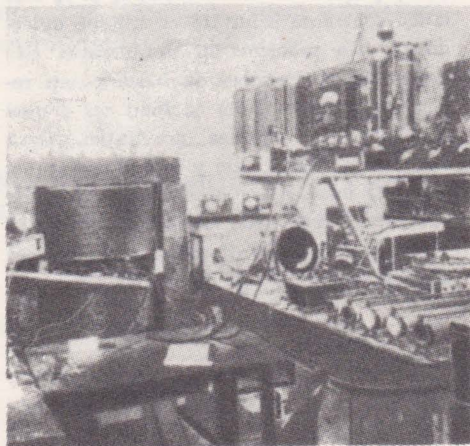
NOTĂ ISTORICĂ

Invenția ciclotronului. Multe dintre acceleratoarele de particule de mare energie de astăzi sînt urmașele primului ciclotron de protoni de 1 MeV construit la LeConte Hall din Berkeley de către E.O. Lawrence și M. S. Livingston. Ciclotronul a fost imaginat de către Lawrence; ideea a fost publicată pentru prima dată de Lawrence și Edlefsen într-o discuție rezumată în *Science 72*: 376, 377 (1930). În 1932 primele rezultate au fost publicate într-un frumos articol în *Physical Review*, principala revistă de fizică a Societății Americane de Fizică. Deși revista cere tuturor articolelor să fie însoțite de rezumate informative, puține dintre ele sînt atît de clare și de informative ca cel reprodus aici din articolul clasic al lui Lawrence și Livingston. Sînt, de asemenea, reproduse două desene din articolul original. Profesorul Livingston este acum la Institutul de Tehnologie din Massachusetts; profesorul Lawrence a murit în 1958.

Magnetul original de 11 țoli (27,5 cm) a fost aproape imediat depășit de noile acceleratoare; dar el a fost reconstruit și mai este și acum folosit la o serie întreagă de proiecte de cercetare de la LeConte Hall. Primele experiențe reușite de rezonanță ciclotronică a purtătorilor de sarcină în cristale au fost făcute cu acest magnet.

Pentru o prezentare interesantă a începuturilor ciclotronului vezi: E. O. Lawrence, „Evoluția ciclotronului" („The Evolution of the Cyclotron"), *Les Prix Nobel en 1951*, pp. 127–140, Imprimerie Royale, Stockholm, 1952. Alăturat este prezentată fotografia unui ciclotron mai vechi iar la pagina 117 o reproducere din articolul din Phys. Rev.

Unul dintre primele ciclotroane.



LECTURI SUPLIMENTARE

Fizica PSSC (PSSC, „Physics") capitolele 19–21, 28 (§ 1, 4, 6), 30 (§6–8), D. C. Heath & Co., Boston, 1965.

Cursul de fizică HPP (HPP, „Project Physics Course), capitolele 2–4,9 (§2–7), 14 (§3, 4, 8, 13), Holt, Rinehart și Winston, Inc., New York, 1970.

A. French, *Mecanica Newtoniană* „Newtonian Mechanics"), W. W. Norton & Co. Inc., New York, 1971. O carte completă pentru nivelul acesta, o parte din seria de la MIT.

Ernst Mach, *Știința Mecanicii: o prezentare critică și istorică a dezvoltării sale* („The Science of Mechanics: A Critical and Historical Account of Its Development") ed. a 6-a, cap. 2 și 3, The Open Court Publishing Company, La Salle, Ill., 1960. O prezentare clasică a conceptelor mecanicii și a dezvoltării ei.

Herbert Butterfield, *Originile științei moderne, 1300–1800* („The Origins of Modern Science, 1300–1800") Free Press, The Macmillan Company, New York, 1965. Capitolul 1 prezintă punctul de vedere al unui istoric în ceea ce privește importanța unei înțelegeri corecte a mișcării și a inerției.

L. Hopf, *Introducere în ecuațiile diferențiale ale fizicii*, („Introduction to the Differential Equations of Physics"), tradusă în l. engleză de W. Nef, Dover Publications, Inc., New York, 1948. O introducere concisă și atractivă în teoria ecuațiilor diferențiale necesitînd doar puțină matematică și fiind convenabilă studiului individual.

1 APRILIE 1932 REVISTA DE FIZICĂ VOLUMUL 40

OBȚINEREA IONILOR UȘORI DE MARE VITEZĂ FĂRĂ UTILIZAREA ÎNALTEI TENSIUNI

de ERNEST O. LAWRENCE și M. STANLEY LIVINGSTON
UNIVERSITATEA DIN CALIFORNIA

(Primită la redacție la 20 februarie 1932)

Rezumat

Studierea nucleului ar fi ușurată în mare măsură prin dezvoltarea unor surse de ioni de mare viteză, în particular protoni și ioni de heliu care să aibă energia cinetică mai mare de 1 000 000 electronvolți; se pare că aceste particule atît de rapide sînt cele mai potrivite pentru a produce o excitare nucleară. Metoda cea mai directă, adică accelerarea ionilor printr-o diferență de potențial, prezintă mari dificultăți experimentale din cauza cîmpurilor electrice intense.

În această lucrare, prezentăm dezvoltarea unei metode ce evită asemenea dificultăți printr-o accelerare multiplă pînă la viteze mari ale ionilor fără folosirea tensiunilor foarte înalte. Metoda este următoarea: două plăci semicirculare goale, asemănătoare duanților unui electrometru, sînt montate în vid cu diametrele

·lor foarte apropiate și într-un cîmp magnetic uniform și normal pe planul plăcilor. Pe electrozii plăcilor, se aplică oscilații de înaltă frecvență ce produc un cîmp electric oscilant în regiunea dintre diametre. Și astfel, în timpul unei semiperioade cîmpul electric accelerează ionii formați în regiunea dintre diametre, înspre interiorul unuia dintre electrozi unde sînt forțați de cîmpul magnetic să se miște pe traiectorii circulare pînă cînd reapar în cele din urmă în regiunea dintre electrozi. Cîmpul magnetic este astfel potrivit încît timpul necesar pentru a parcurge, traiectoria semicirculară din interiorul unui electrod să fie egal cu semiperioada oscilațiilor. În consecință, cînd ionul se întoarce în regiunea dintre electrozi, cîmpul electric va avea sensul invers, iar ionul va primi astfel o nouă creștere de viteză la trecerea spre celălalt electrod. Deoarece razele traiectoriilor din interiorul electrozilor sînt proporționale cu vitezele ionilor, timpul necesar pentru a parcurge o jumătate de traiectorie circulară este independent de vitezele ionilor. Astfel, dacă ionilor le trebuie o semiperioadă pentru primul semicerc același lucru se va întîmpla și pentru cele care vor urma și va apărea atunci o spirală în rezonanță cu cîmpul oscilant pînă cînd ionii vor atinge periferia aparatului. Energiile finale ale ionilor vor fi de atîtea ori mai mari decît cea corespunzătoare tensiunii aplicate pe electrozi de cîte ori ionii trec de la un electrod la altul. Această metodă este imaginată în primul rînd pentru accelerarea ionilor ușori și în experiențele de față s-a acordat o atenție deosebită producerii de protoni de mare viteză din cauza capacității lor, probabil unice, de investigare experimentală a nucleului atomic. Folosind un magnet cu diametrul fețelor polare de 11 țoli (270 mm), s-a produs un curent de 10^{-9}A de 1 220 000 proton-volți, într-un tub în care tensiunea maximă aplicată a fost de numai 4 000 volți. Două trăsături ale acestei metode experimentale au contribuit în mare măsură la succesul ei. Este vorba în primul rînd de acțiunea de focalizare a cîmpurilor magnetice și electrice care împiedică pierderi serioase de ioni pe măsură ce sînt accelerați. În consecință, intensitățile curenților de ioni de mare viteză obținuți prin această metodă sînt comparabile cu acelea ce se obțin în mod obișnuit prin metodele directe cu tensiune foarte înaltă. Mai mult, acțiunea de focalizare are ca rezultat generarea unor fascicule foarte înguste de ioni — mai mici decît un mm în secțiune — care sînt ideale pentru studierea experimentală a proceselor de ciocnire.

Nu de mai mică importanță este cea de a doua trăsătură a acestei metode care constă în modalitatea simplă și foarte eficientă de corectare a cîmpului magnetic de-a lungul traiectoriilor ionilor. Astfel, este foarte ușor într-adevăr să se folosească tubul cu un foarte mare factor de amplificare (adică raportul tensiunii echivalente finale a ionilor accelerați la tensiunea aplicată). În consecință, această metodă, în stadiul ei actual de dezvoltare, reprezintă o sursă de mare viteză convenabilă din punct de vedere experimental, cu un înalt grad de încredere și necesitînd un echipament de laborator relativ modest. Mai mult, experiențele recente indică faptul că această metodă indirectă de accelerare multiplă face posibilă producerea în laborator a protonilor cu energia cinetică mai mare de 10 000 000 eV. Ținînd cont de acest lucru în laboratorul nostru se instalează acum un magnet avînd fețele polare de 114 cm.

INTRODUCERE

Experienţele clasice ale lui Rutherford şi ale colaboratorilor lui[1], precum şi ale lui Pose[2] privind dezintegrarea artificială şi ale lui Bothe şi Becker[3] asupra excitării radiaţiei nucleare au întărit convingerea că nucleul este susceptibil de a fi supus aceloraşi metode de investigare ce au avut succes în relevarea proprietăţilor extranucleare ale atomului. Rezultatele muncii lor atrag în mod special atenţia asupra rodniciei studiilor tranziţiilor nucleare excitate artificial în laborator. Dezvoltarea pe scară largă a metodelor de excitare nucleară este astfel o problemă de mare interes; soluţionarea ei va fi probabil cheia spre o nouă lume de fenomene, lumea nucleului.

Dar acest lucru este pe cît de interesant pe atît de dificil, pentru că nucleul rezistă unor astfel de atacuri experimentale cu un formidabil zid de energie de legătură foarte mare. Nivelele de energie ale nucleului sînt puternic separate şi, în consecinţă, procesele excitării nucleare cer cantităţi enorme de energie — milioane de electronvolţi.

Trebuie, atunci, să ne interesăm de cele mai promiţătoare metode de excitare nucleară. Două metode generale se pot prezenta singure; excitarea prin absorbţie de radiaţie (radiaţia gamma) şi excitarea prin ciocniri intime cu particule de mare viteză.

S-ar putea spune despre prima că studii experimentale recente[4,5] a absorbţiei radiaţiei gamma în substanţă ne arată, la elementele mai grele, variaţii cu numărul atomic ce indică un efect nuclear apreciabil. Acest lucru sugerează că excitarea nucleară prin absorbţie de radiaţie este probabil un proces destul de frecvent şi astfel dezvoltarea unei surse artificiale de radiaţii gamma cu diferite lungimi de undă ar avea o valoare considerabilă pentru studiile nucleare. În laboratorul nostru, ca şi în altele, se încearcă acest lucru.

Dar metoda ciocnirilor pare a fi şi mai promiţătoare ca o consecinţă a cercetărilor lui Rutherford şi a celor citaţi mai sus. Investigaţiile lor de pionerat trebuie privite ca realizări experimentale într-adevăr mărețe, pentru că s-au obţinut informaţii importante şi definitive asupra unor procese nucleare foarte rare excitate cu fascicule foarte slabe de particule incidente — particulele alfa din sursele radioactive. Mai mult, şi acest lucru vrem să-l scoatem aici în evidenţă, munca lor ne-a arătat cu pregnanţă ....

....

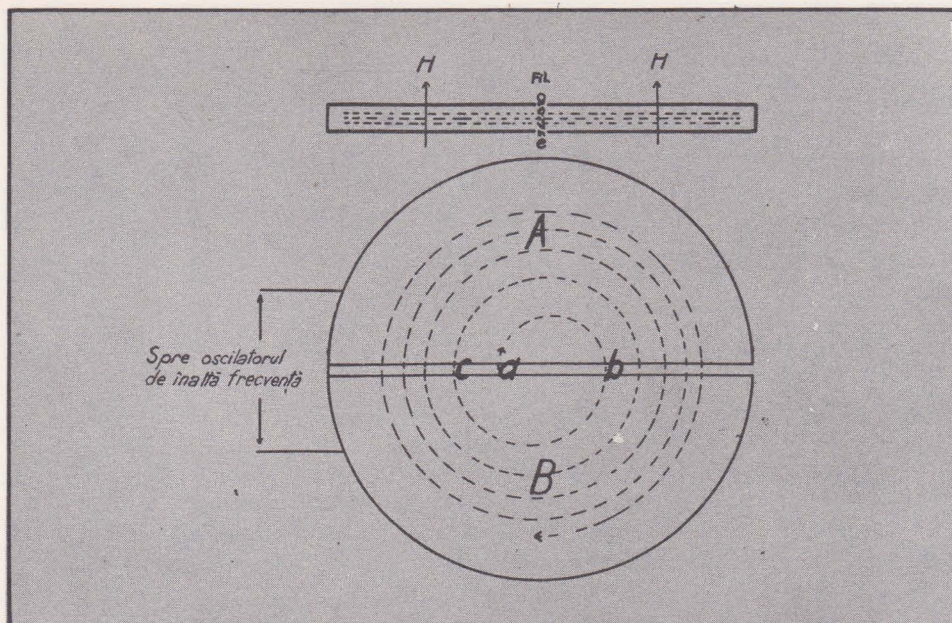
[1] Vezi capitolul 10 din „Radiaţiile surselor radioactive" de Rutherford, Chadwick şi Ellis.

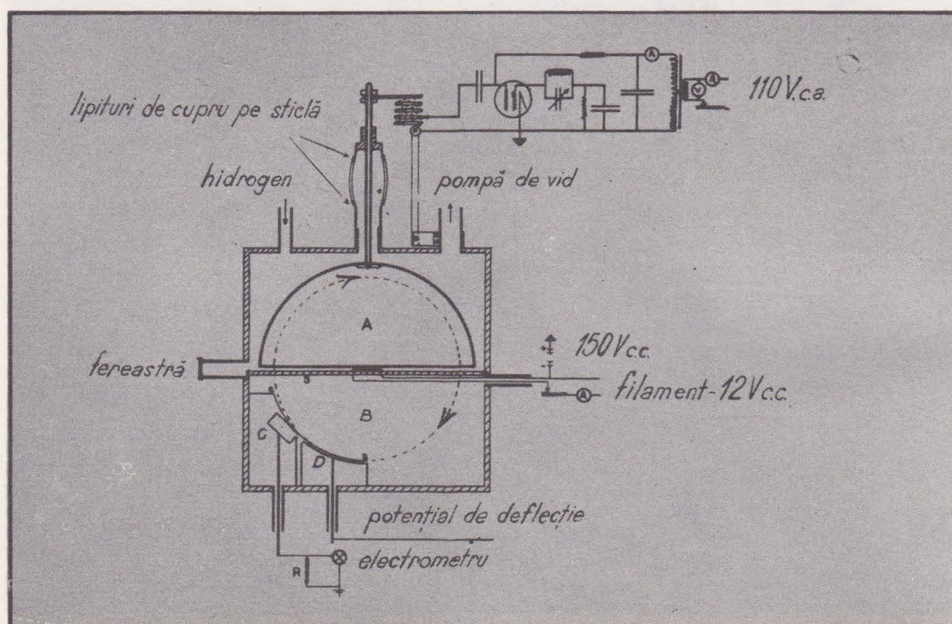
[2] H. Pose, Zeits. f. Physik, *64*, 1 (1930)

[3] W. Bothe şi H. Becker, Zeits. f. Physik, *66*, 1289 (1930)

[4] G. Beck, Naturwiss., *18*, 896 (1930)

[5] C. Y. Chao, Phys. Rev., *36*, 1519 (1930)


H
Fil
H
A
Spre oscilatorul
de înaltă frecvență
c
a
b
B


lipituri de cupru pe sticlă
110V.c.a.
hidrogen
pompă de vid
A
150V c.c.
fereastră
filament-12V c.c.
B
C
D
potențial de deflecție
electrometru
R

4

Sisteme de referință; transformările Galilei

Cuprins

În acest capitol vom examina cîteva aspecte mai subtile ale legilor a doua și a treia ale lui Newton. Problema sistemelor de referință a fost omisă în întregime în capitolul 3 dar este tratată acum în detaliu. Alte subiecte majore sînt invarianța Galilei precum și o altă demonstrație a legii conservării impulsului. Într-un anumit fel, acest capitol nu este esențial pentru parcurgerea capitolelor următoare dar este important pentru a înțelege în întregime subiectul mecanicii.

SISTEME DE REFERINȚĂ INERȚIALE ȘI ACCELERATE

Primele două legi ale lui Newton sînt corecte numai atunci cînd sînt considerate față de sisteme de referință neaccelerate. Dacă sistemul dumneavoastră de referință este în repaus într-un carusel în rotație, în absența forțelor aplicate nu veți mai avea o accelerație zero. Puteți sta liniștit pe platforma unui carusel numai dacă vă împingeți într-o parte a ei, și astfel, în acord cu legea a treia a lui Newton, obligați acea parte să exercite o forță $M\omega^2r$ asupra corpului dumneavoastră înspre axa de rotație, unde M este masa, ω viteza unghiulară iar r distanța de la axa de rotație. Sau, să presupunem că sistemul dumneavoastră de referință este în repaus într-un avion puternic accelerat la decolare. Sînteți, „presat, de către accelerație, de spătarul scaunului dumneavoastră" și sînteți ținut în repaus în raport cu avionul de către forța exercitată asupra dumneavoastră de către spătarul scaunului.

Pentru a rămîne în repaus sau în mișcare uniformă relativ la un sistem de referință neaccelerat, nu va fi nevoie de nici o forță. Dar dacă doriți să fiți în repaus față de un sistem de referință accelerat atunci asupra dumneavoastră va trebui să se exercite o forță ca aceea exercitată din partea caruselului sau a spătarului de la scaun. Aceste forțe ce apar automat în sistemele accelerate sînt foarte importante în fizică. În mod special este important să înțelegem forțele care acționează în sisteme de referință aflate în mișcare circulară. Ar fi o idee bună, să revedeți acum acest subiect studiat în liceu. [Un excelent film PSSC (PSSC MLA 0307), „Sisteme de referință" clarifică splendid o parte din materialul acestui capitol. Vezi Lista filmelor capitolului 4 la sfîrșitul acestei cărți].

EXEMPLU

Ultracentrifuga. Efectele faptului de a *nu* fi într-un sistem de referință inerțial pot fi enorme! Aceste efecte pot fi de mare importanță practică. Să considerăm o moleculă suspendată într-un lichid în camera de probă a unei ultracentrifuge. Să presupunem că molecula se află

la 10 cm de axa de rotație și că ultracentrifuga se învîrtește cu 1 000 de rotații pe secundă (60 000 rotații pe minut). Viteza unghiulară va fi atunci:

$$\omega = (2\pi)(1 \times 10^3) \approx 6 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

iar viteza liniară:

$$v = \omega r \approx (6 \times 10^3)(10) \approx 6 \times 10^4 \text{ cm/s} = 6 \times 10^2 \text{ m/s}.$$

Mărimea accelerației asociată mișcării circulare uniforme este (vezi capitolul 2):

$$a = \omega^2 r \approx (6 \times 10^3)^2(10) \approx 4 \times 10^8 \text{ cm/s}^2 = 4 \times 10^6 \text{ m/s}^2.$$

Accelerația gravitației g este de numai 9,8 m/s² la suprafața pămîntului astfel încît raportul dintre accelerația de rotație și accelerația gravitațională este:

$$\frac{a}{g} \approx \frac{4 \times 10^6}{10} \approx 4 \times 10^5.$$

Accelerația în ultracentrifugă este astfel de 400 000 ori mai mare decît accelerația gravitației (Aceste date caracterizează ultracentrifuga prezentată în figura 4.1.) Moleculele din suspensie a *căror densitate (masă/volum) este diferită* de cea a lichidului înconjurător vor suporta în celula ultracentrifugii o forță puternică ce tinde să le separe de fluid. Dacă ele au aceeași densitate cu aceea a lichidului, nu va apărea nici un efect de separare. Dacă au densitatea mai mică decît cea a lichidului, efectul forței de separare este înspre interior (ax). De exemplu, un balon umplut cu heliu aflat într-un automobil ce execută un viraj tinde să se miște spre interiorul curbei.

În acord cu legea întîi a lui Newton molecula din suspensie dorește să rămînă în repaus (sau să se miște cu viteză constantă pe o linie dreaptă) în raport cu laboratorul. (Laboratorul constituie o aproximație destul de bună a unui sistem de referință neaccelerat.) Moleculele nu vor să fie învîrtite nebunește în ultracentrifugă cu o viteză unghiulară mare. Față de un observator în repaus, aflat în celula de probă a ultracentrifugii, molecula se comportă ca și cum asupra ei s-ar exercita forța $M\omega^2 r$ ce tinde să o tragă dinspre axa de rotație înspre exteriorul camerei de probă din rotorul centrifugii. (Acest lucru presupune că molecula are o den-

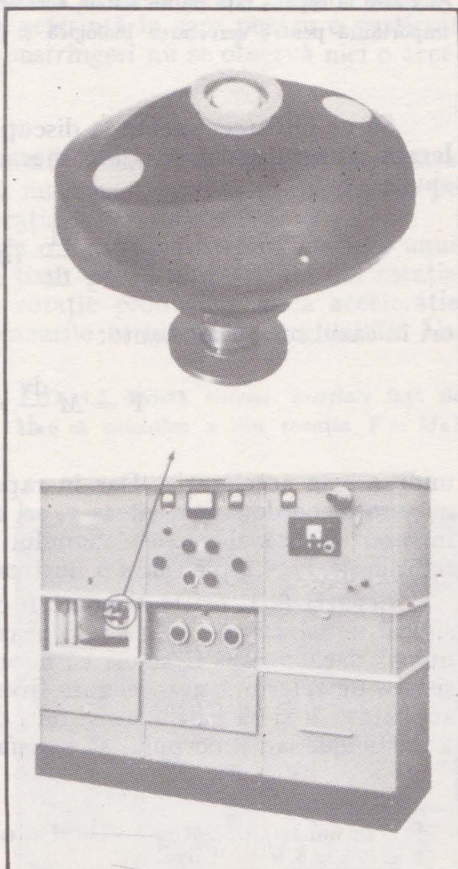


FIG. 4.1. Rotorul unei ultracentrifuge. Funcționează la 60 000 rpm și dă naștere la o accelerație centrifugă puțin mai mică decît de 400 000 ori accelerația gravitației. *(Beckmann Spinco Division.)*

sitate mai mare decît lichidul.) Cît de mare este forța? Să presupunem că greutatea moleculară a moleculei este de 100 000, ceea ce înseamnă că masa M a moleculei este de 10^5 ori mai mare decît masa protonului:

$$M \approx (10^5)(1{,}7 \times 10^{-27}) \approx 2 \times 10^{-22}\ \text{kg}.$$

(Masa protonului este aproximativ egală cu o unitate atomică de masă, după cum se poate vedea din tabloul de valori de la pag. 437.) Forța asociată accelerației rotaționale va fi:

$$Ma = M\omega^2 r \approx (2 \times 10^{-22})(4 \times 10^6) \approx 8 \times 10^{-16}\ \text{N}$$

folosind valoarea accelerației din paragraful precedent [1].

Forța aparentă, ce pare că trage molecula înspre înafara camerei de probă, se numește forță *centrifugă*. Mișcarea înspre exterior va fi împiedicată de învîrtirea lichidului ce înconjoară molecula. Deoarece pentru diferite feluri de molecule, forța centrifugă va avea valori diferite, ele se vor deplasa înspre exteriorul camerei de probă cu viteze diferite. În sistemul de referință al celulei ultracentrifugii această forță centrifugă este asemănătoare unei *gravitații artificiale* îndreptate înspre exterior și a cărei intensitate crește cu distanța de la axă. Diferitele specii de molecule se așază în acest cîmp gravitațional neobișnuit într-o succesiune de straturi în acord cu densitatea. Ultracentrifugarea constituie, astfel, o metodă excelentă de separare a diferitelor feluri de molecule. Metoda se aplică cel mai bine moleculelor mari care se întîmplă să fie moleculele cu gradul cel mai mare de interes biologic, și astfel chestiunea dacă o moleculă este în repaus față de un sistem accelerat sau față de unul neaccelerat se dovedește a fi importantă pentru cercetarea biologică și medicală.

Să ne întoarcem acum la discuția sistemelor de referință inerțiale și accelerate. Legea fundamentală a mecanicii clasice, legea a doua a lui Newton, spune:

$$\text{Forța} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ (\text{impuls})\ ;\ \mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ (\mathbf{p}) \qquad (4.1)$$

ori în cazul masei constante:

$$\mathbf{F} = M\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = M\mathbf{a} \qquad (4.2)$$

unde **a** este accelerația. Dar în raport cu ce fel de sistem de referință sînt măsurate coordonata **r**, viteza **v**, ori accelerația **a**? Exemplul de mai sus indică în mod clar că alegerea sistemului de referință este foarte importantă, iar figurile de la 4.2 pînă la 4.6 ilustrează această chestiune.

Ecuația (4.1) ori (4.2) poate fi considerată ca definind într-un mod consistent *adevărata forță* **F** ce acționează asupra unei particule sau a unui corp, numai dacă putem fi siguri că accelerația **a** este măsurată în raport cu un sistem de referință neaccelerat. Invers, dacă se întîmplă să cunoaștem forța adevărată **F** și să găsim un sistem de referință în care accelerația observată a particulei sau a corpului să satisfacă ecuația (4.2), atunci putem spune că

---

[1] În unități CGS, $M \approx 2 \times 10^{-19}$ g, $\omega \approx 6 \times 10^3$ rad/s, $r = 10$ cm, iar $F \approx (2 \times 10^{-19}) \cdot (4 \times 10^8) \approx 8 \times 10^{-11}$ dyn.

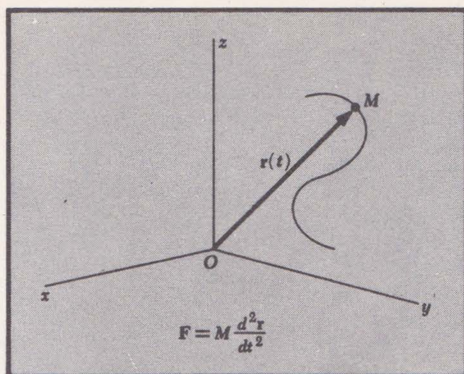


FIG. 4.2. Legea a doua a lui Newton spune: forța = masa × accelerația. Dar accelerația relativă la care sistem?

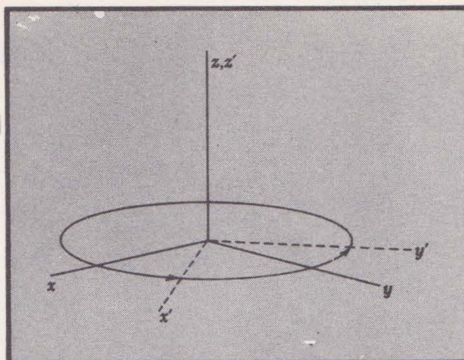


FIG. 4.3. De exemplu, sistemul S' (x', y', z') se rotește în raport cu sistemul S (x,y,z). Accelerația lui M în fiecare din aceste două sisteme este diferită.

sistemul de referință este un sistem *inerțial*; adică, este fără accelerație ori rotație. Abilitatea noastră în a spune dacă un sistem de referință particular este sau nu un sistem inerțial depinde, într-un sens strict, de precizia cu care putem detecta efectele unei mici accelerații a sistemului. În sens practic, este luat ca sistem inerțial un sistem de referință în care pentru o particulă presupusă a fi liberă de orice forțe sau constrîngeri nu se observă nici o accelerație.

Pămîntul ca sistem inerțial. Reprezintă laboratorul fixat pe suprafața Pămîntului un bun sistem inerțial? Dacă nu, cum ar trebui să-l corectăm pe $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ pentru a ține seama de accelerația laboratorului?

În multe scopuri, Pămîntul constituie o foarte bună aproximație a unui sistem inerțial. Accelerația laboratorului fixat pe Pămînt rezultă din rotația Pămîntului în jurul axei sale. Această rotație produce o mică accelerație laboratorului, și care nu este în toate cazurile în întregime neglijabilă. Un

FIG. 4.4. Sau, de exemplu, sistemul S' are accelerația $\mathbf{a}_0$ în raport cu sistemul S. Accelerația lui M în fiecare din aceste sisteme este diferită.

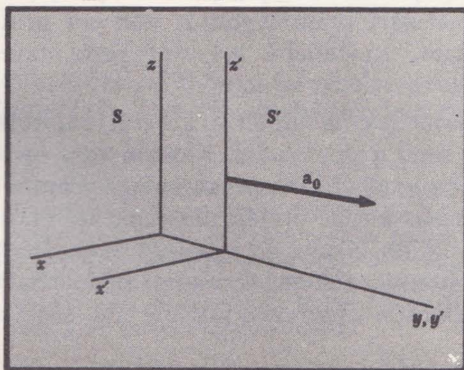
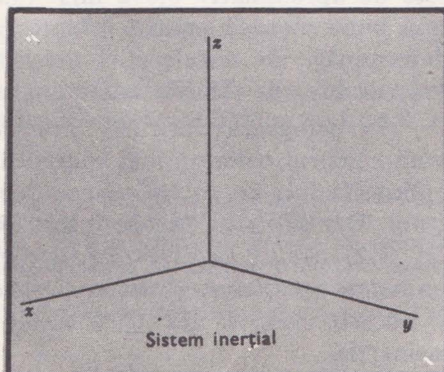


FIG. 4.5. Există *sisteme inerțiale* față de care să calculăm $\mathbf{a}$ din ecuația $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$?



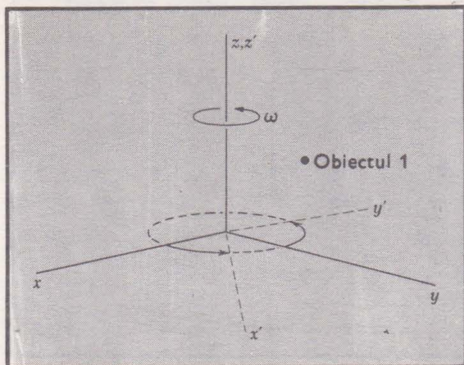


FIG. 4.6. (*a*) Dacă S (x,y,z) este un astfel de sistem inerțial, atunci S' (x', y', z'), care se rotește în jurul axei z a lui S, *nu poate fi* inerțial.

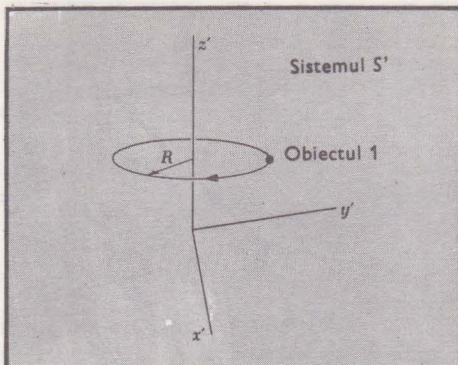


FIG. 4.6. (*b*) Deoarece în sistemul S' obiectul 1, deși foarte depărtat de alte obiecte, suferă o accelerație. (Pare că se rotește.)

punct în repaus pe suprafața Pămîntului la ecuator suferă o accelerație centripetă dată de:

$$a = \frac{v^2}{R_p} = \omega^2 R_p \tag{4.3}$$

raportată la centrul Pămîntului. $\omega = 2\pi f$ este viteza unghiulară a Pămîntului iar R_p este raza Pămîntului. Din capitolul 3 (pagina 86) vedem că $\omega \approx 0{,}73 \times \times 10^{-4}$ s^{-1}. Cu $R_p \approx 6{,}4 \times 10^6$ m, accelerația este:

$$a \approx (0{,}73 \times 10^{-4})^2(6{,}4 \times 10^6) \approx 0{,}034 \text{ m/s}^2.$$

Forța de gravitație trebuie să suplinească accelerația masei de la ecuator. Astfel forța necesară pentru a ține corpul în echilibru împotriva forței de gravitație este mai mică decît întreaga forță de gravitație cu $3{,}4\ m \times 10^{-5}$ N unde m este masa; cu alte cuvinte accelerația gravitației măsurată la ecuator este mai mică cu 0,034 m/s^2 decît cea măsurată la Polul Nord, unde a din relația (4.3) este zero. Ce mai rămîne din variația totală a gravitației pe suprafața Pămîntului se datorește formei elipsoidale a Pămîntului. Variația totală dintre accelerația gravitațională la Polul Nord (ori Sud) și cea de la ecuator este de aproximativ 0,052 m/s^2 (5,2 cm/s^2). Pînă la apariția sateliților, cea mai bună metodă pentru măsurarea aplatizării Pămîntului la poli era prin determinări ale accelerației gravitaționale. În tabelul 4.1 sînt prezentate valorile lui g la diferite latitudini.

În paragraful intitulat *Teme avansate* (de la sfîrșitul acestui capitol) vom construi o formă mai complicată a legii a doua a lui Newton care este aplicabilă într-un sistem de coordonate cu axele fixate pe suprafața Pămîntului. Dar pentru a obține o lege corectă în forma simplă din ecuațiile (4.1) ori (4.2) *trebuie să raportăm accelerația la un sistem de referință neaccelerat — sistem inerțial sau sistem Galilean.* Într-un sistem accelerat (neinerțial) **F** nu este egal cu M**a** dacă **a** este accelerația observată față de un sistem neinerțial.

TABELUL 4.1

Valorile lui g la diverse latitudini

Stația	Latitudinea	g, m/s²
Polul nord	90° N	9,83245
Ghețarul Karajak, Groenlanda	70° N	9,8253
Reykjavik, Islanda	64° N	9,8227
Leningrad	60° N	9,8193
Paris	49° N	9,8094
New York	41° N	9,8027
San Francisco	38° N	9,7996
Honolulu	21° N	9,7895
Monrovia, Liberia	6° N	9,7816
Batavia, Iava	6° S	9,7818
Melbourne, Australia	38° S	9,7999

Stelele fixe, un sistem de referință inerțial. Printr-o convenție acceptată curent se vorbește de stelele fixe ca despre un sistem de referință neaccelerat standard. Limbajul acesta conține un element de metafizică, deoarece afirmația că stelele fixe n-ar fi accelerate depășește cunoștințele noastre actuale. Cu instrumentele noastre, este improbabil că vom putea detecta o accelerație mai mică de 10^{-6} m/s² a unei stele sau grup de stele îndepărtate, chiar dacă vom face observații îngrijite timp de 100 ani. Pentru nevoi practice, este convenabil să raportăm direcțiile în spațiu la stele, dar de asemenea vom vedea că pentru nevoi practice putem stabili experimental un sistem de referință neaccelerat destul de bun. Chiar dacă Pămîntul ar fi înconjurat în mod continuu de ceață deasă, vom fi în stare să stabilim fără vreo dificultate specială un sistem de referință inerțial.

Accelerația Pămîntului pe orbită în jurul Soarelui este cu un ordin de mărime mai mică decît accelerația la ecuator datorită rotației Pămîntului. Deoarece 1 an $\approx \pi \times 10^7$ s, viteza unghiulară a Pămîntului în jurul Soarelui este

$$\omega \approx \frac{2\pi}{\pi \times 10^7} \approx 2 \times 10^{-7}\ \text{s}^{-1}.$$

Accelerația centripetă a Pămîntului pe orbită în jurul Soarelui este, cu $R \approx$ $\approx 1{,}5 \times 10^{11}$ m:

$$a = \omega^2 R \approx (4 \times 10^{-14}) \cdot (1{,}5 \times 10^{11}) \approx 0{,}006\ \text{m/s}^2. \qquad (4.4)$$

Accelerația Soarelui spre centrul galaxiei noastre nu este cunoscută experimental[1]. Dar din studii privind deplasarea Doppler a liniilor spectrale se

[1] Stelele nu sînt împrăștiate la întîmplare prin spațiu ci sînt grupate în sisteme largi separate mult unele de celelalte. Fiecare sistem conține în jurul a 10^{10} stele. Sistemele acestea se numesc *galaxii*; cea care conține Soarele nostru este cunoscută sub numele de Galaxia. Calea Lactee este o parte a galaxiei noastre. Nici galaxiile însele nu sînt distribuite în întregime la întîmplare deoarece există o tendință marcantă de a forma aglomerări. Galaxia noastră aparține unei aglomerări de 19 membri numită *Grupul Local*, și care formează un sistem fizic legat prin atracție gravitațională.

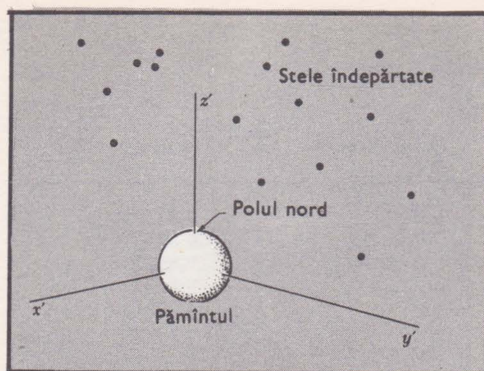


FIG. 4.6. (c) De exemplu, intr-un sistem $S' (x', y', z')$ legat de Pămînt, stelele depărtate, ca și obiectul 1, se rotesc. Un sistem legat de Pămînt nu este inerțial deoarece Pămîntul se rotește în jurul axei sale precum și în jurul Soarelui.

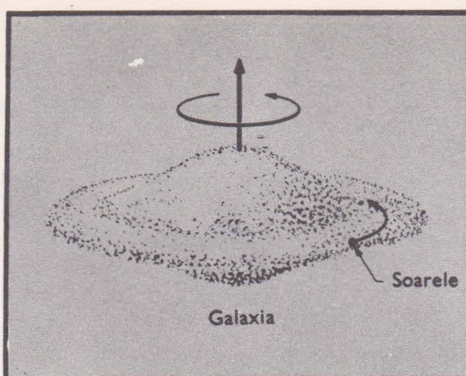


FIG. 4.6. (d) Este un sistem legat de Soare inerțial? Chiar și soarele se rotește în jurul galaxiei, dar această accelerație pare a fi suficient de mică pentru a o neglija.

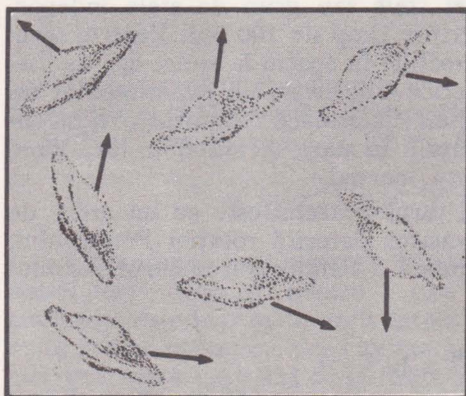


FIG. 4.6. (e) Se pare că putem de asemenea neglija accelerația galaxiei noastre relativă la altele.

crede că viteza Pămîntului relativă la centrul galaxiei este de 3×10^5 m/s. Dacă Soarele se mişcă pe o orbită circulară în jurul centrului galaxiei, care este la o distanță de aproximativ 3×10^{20} m de Soare, accelerația Soarelui în jurul centrului galactic va fi:

$$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \approx \frac{9 \times 10^{10}}{3 \times 10^{20}} \approx 3 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2.$$

Aceasta este foarte mică. Nu cunoaștem din observații dacă Soarele nu are o accelerație mai mare decît aceasta și nici nu cunoaștem dacă centrul însuși al galaxiei nu este sensibil accelerat. Aceste accelerații sînt ilustrate în figurile 4.6, *a* pînă la *e*.

Ceea ce știm din practică este că setul de afirmații ce constituie sîmburele mecanicii clasice funcționează excelent de bine. Aceste afirmații sînt:

1 spațiul este euclidian;

2 spațiul este izotrop iar proprietățile fizice sînt aceleași în toate direcțiile din spațiu. Astfel, masa M din $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ nu depinde de direcția lui $\mathbf{a}$; pentru un observator în repaus pe pămînt, legile newtoniene ale mișcării sînt verificate într-un sistem inerțial determinat prin luarea în considerație numai a accelerației datorate rotației Pămîntului în jurul axei sale și mișcării Pămîntului pe orbită în jurul Soarelui;

3 legea newtoniană a gravitației universale este verificată. În capitolul 3 s-a prezentat o mică discuție a acestei legi (paginile 84—86) iar o discuție mai detaliată este prezentată în capitolul 9.

Aceste afirmații sînt greu de verificat cu mare precizie, în mod individual. Cele mai precise verificări, și anume acelea care se referă la mișcările planetelor în cadrul sistemului solar, implică de regulă întregul pachet al celor patru afirmații de mai sus. Două verificări extrem de precise ale pachetului clasic sînt discutate în nota istorică de la sfîrșitul capitolului 5.

Forțele într-un sistem de referință inerțial. Galilei a spus că *un corp care nu este supus nici unei forțe are o viteză constantă*[1]. Am văzut că această afirmație este adevărată numai într-un sistem de referință inerțial — ea chiar definește sistemul de referință inerțial.

Afirmația pare a fi ambiguă, deoarece cum am putea ști vreodată că asupra unui corp nu acționează nici o forță? Forțele pot acționa asupra unui corp nu numai prin contactul direct al unui corp cu altul dar chiar și atunci cînd un corp este izolat. Forțele electrice sau gravitaționale pot fi importante chiar și fără prezența în apropiere a altor corpuri. Nu putem fi siguri că nu acționează forțe, doar pentru motivul că nu există alte corpuri în contact sau în apropierea unui corp dat. Dar dacă nu putem decide apriori că un anumit corp de referință nu este supus vreunei forțe, vom avea dificultăți în formularea legilor mișcării ce vor lega forțele de accelerații. Avem nevoie de un sistem de referință neaccelerat față de care să putem măsura accelerațiile; maniera lui Galilei de determinare a unui astfel de sistem presupune că am avea o cale independentă pentru a cunoaște că nici o forță nu acționează asupra lui. Dar noi nu putem ști aceasta, deoarece criteriul nostru privind lipsa forței este lipsa accelerației, ceea ce implică un anumit sistem de referință față de care să măsurăm această accelerație, și tot așa mai departe argumentația se închide într-un cerc vicios

Situația nu este lipsită de orice speranță, deoarece știm că forțele dintre două corpuri trebuie să scadă rapid pe măsură ce distanța dintre corpuri crește, ca în figura 4.7. Dacă forțele n-ar scădea rapid, n-am putea izola vreodată interacțiunile dintre două corpuri de cele cu toate celelalte corpuri din univers. Toate forțele dintre particulele cunoscute de noi scad cel puțin la fel de repede ca și în legea invers proporționalității cu pătratul distanței. Noi și oricare alt corp de pe Pămînt sîntem atrași în primul rînd spre centrul pămîntului și nu în primul rînd spre nu știu ce zonă îndepărtată a univer-

[1] Această propoziție este numită de obicei *Prima lege newtoniană a mișcării.*

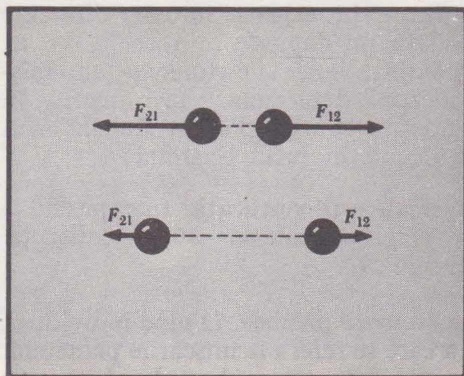


FIG. 4.7. Experimental se știe că forța pe care un obiect o exercită asupra altuia descrește întotdeauna rapid pe măsura ce obiectele sînt separate de o distanță mai mare.

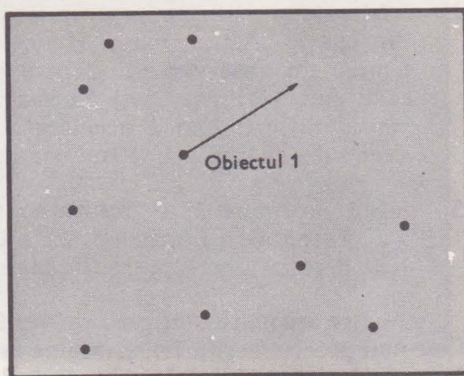


FIG. 4.8. Astfel dacă obiectul 1 este suficient de departe de toate celelalte obiecte, el nu va fi supus la nici o forță.

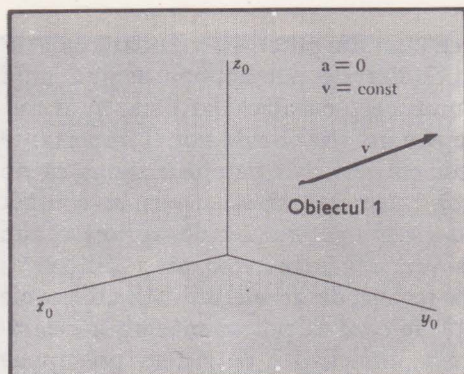


FIG. 4.9. Un *sistem inerțial* este acela in care accelerația obiectului 1 (din fig. 4.8) este zero.

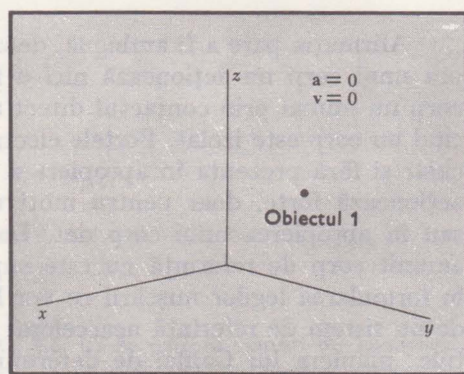


FIG. 4.10. În particular, există sisteme inerțiale în care obiectul 1 este, și rămîne, în repaus.

sului. Dacă n-am fi suportați de dușumea am fi accelerați spre centrul Pămîntului cu 9,8 m/s². Sîntem mai puțin atrași de Soare; după relația (4.4) am fi accelerați spre el cu 0,006 m/s². Pentru o rezonabilă descriere a accelerației, se consideră că asupra unui corp foarte îndepărtat de alte corpuri nu se exercită practic nici o forță și deci nici o accelerație (vezi fig. de la 4.8 la 4.10). O stea tipică este la cel puțin 10^{16} m depărtare de vecina cea mai apropiată[1] și se consideră a avea o accelerație foarte mică. Sîntem astfel conduși la concluzia că stelele fixe pot defini, într-o bună aproximație un sistem de coordonate neaccelerat convenabil.

[1] Excluzînd stelele duble care au distanțe de separare tipice de ordinul a 10^{13} m.

O frumoasă discuţie privind stabilirea unui sistem de referinţă neaccelerat este dată de P.W. Bridgman în Am.J. Phys., *29*: 32 (1961). Prezentăm mai jos cîteva extrase:

Un sistem de trei axe rigide ortogonale constituie un sistem Galilean, dacă trei particule masive, asupra cărora nu acţionează nici o forţă, proiectate de-a lungul celor trei axe cu viteze arbitrare, continuă să se mişte de-a lungul axelor cu viteze uniforme. Laboratoarele noastre terestre nu constituie un astfel de sistem dar putem construi un astfel de sistem în laboratoarele noastre măsurînd cum deviază cele trei mase arbitrare de la cerinţa.... şi incorporînd aceste deviaţii ca nişte corecţii negative introduse în specificaţiile noastre la sistemul Galilean. Nu se simte nevoia unor referiri la stele, dar comportarea corpurilor poate fi descrisă relevant în termenii unor astfel de fapte observabile imediat; rotaţia planului unui pendul Foucault în raport cu Pămîntul sau devierea de la perpendiculară a unui corp în cădere liberă. Chiar dacă, în încercarea de a plasa satelitul pe orbită, operatorul unei rachete consideră că este convenabil să facă o parte din socotelile sale în termenii observaţiilor asupra stelei polare, este clar că instalaţiile sale pot fi descrise în cele din urmă în termeni tereştri... Într-un sistem Galilean, un corp în rotaţie, după ce a fost pus în rotaţie iar forţele au fost înlăturate, îşi menţine planul de rotaţie în raport cu sistemul şi, în consecinţă, menţine direcţia axei sale de rotaţie.

ACCELERAŢIA ABSOLUTĂ ŞI ACCELERAŢIA RELATIVĂ

Se poate găsi un sistem de referinţă inerţial în care **F** să fie egal cu $M\mathbf{a}$ cu o mare acurateţe. Acest fapt este puternic sprijinit de experienţă. Tragem concluzia că într-un sistem de referinţă inerţial, forţele ce au fost postulate pentru a explica mişcarea galaxiilor, stelelor, atomilor, electronilor etc. au proprietatea comună că acţionînd asupra unui corp scad realmente pe măsură ce corpul este dus tot mai departe de vecinii săi. Vom vedea că dacă ne alegem un sistem de referinţă neinerţial, ni se *pare* că există forţe ce nu au proprietatea de a fi asociate cu apropierea altor corpuri.

Existenţa unui sistem de referinţă neinerţial sugerează o întrebare dificilă şi nelămurită: ce efect are toată materia cealaltă din univers asupra unei experienţe făcute într-un laborator terestru? Să presupunem, de exemplu, că întregii materii din univers, în afara celei din vecinătatea Pămîntului nostru, i s-ar imprima o acceleraţie mare **a**. O particulă de pe Pămînt, care iniţial nu a fost supusă nici unei forţe, avea acceleraţia zero în raport cu stelele fixe. Cînd stelele fixe sînt accelerate, va mai avea această particulă — care iniţial nu era supusă nici unei forţe dar era liberă să se mişte — acceleraţie zero în raport cu vecinii săi neacceleraţi, sau va suferi o modificare în mişcarea sa relativă la mediul imediat înconjurător? Există vreo diferenţă între accelerarea particulei cu $+\mathbf{a}$ ori a stelelor fixe cu $-\mathbf{a}$? Dacă semnificativă este numai acceleraţia relativă, răspunsul la întrebare este *nu*; dacă acceleraţia absolută are un anumit sens atunci răspunsul este *da*. Această întrebare fundamentală este nelămurită, dar nici nu poate fi supusă uşor investigaţiei experimentale (vezi fig. 4.11, *a* pînă la *c*).

Newton a formulat această întrebare precum şi răspunsul la ea într-un mod pitoresc. Să considerăm o găleată cu apă. Dacă rotim găleata şi apa din ea relativ la stele atunci suprafaţa apei va căpăta o formă parabolică; toată lumea va fi de acord cu acest lucru. Dar să presupunem acum că, în loc să rotim găleata, vom roti într-un fel oarecare stelele în jurul găleţii astfel încît

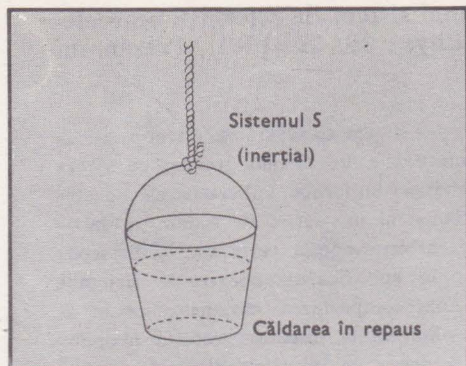


FIG. 4.11. (a) Un exemplu de forțe fictive ce apar într-un sistem neinerțial. Cînd găleata este în repaus față de S, suprafața apei este plană. S este considerat neaccelerat față de stelele depărtate.

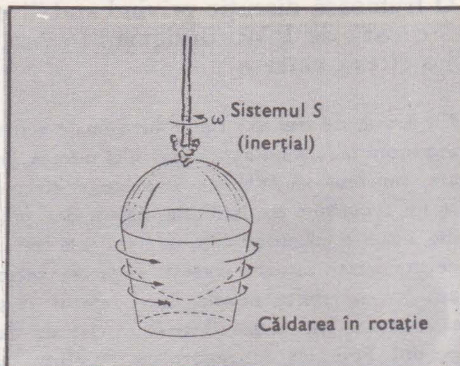


FIG. 4.11. (b) Cînd găleata se rotește față de S, suprafața apei ia o formă paraboloidală.

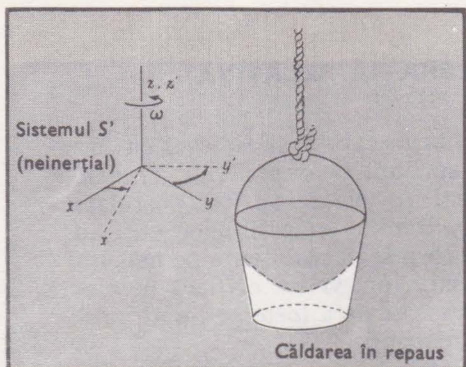


FIG. 4.11. (c) Față de sistemul în rotație S', găleata este în repaus. Dar suprafața apei este totuși paraboidală! O forță „fictivă" acționează asupra apei din sistemul neinerțial S'.

mișcarea relativă să fie aceeași. Credința lui Newton era că suprafața apei va fi rămas plană dacă am fi rotit stelele. Acest punct de vedere dă o anumită semnificație rotației absolute și accelerației absolute. Ceea ce cunoaștem empiric este că toate fenomenele privind rotația găleții cu apă pot fi complet descrise și corelate cu rezultatele măsurătorilor locale în laborator, fără nici un fel de referire la stele.

Punctul de vedere opus, și anume că *numai accelerația relativă la stelele fixe are semnificație*, constituie o ipoteză numită de obicei *principiul lui Mach*. În acord cu acest punct de vedere, apa din găleată va lua o formă paraboloidală. Deși nu există, nici confirmare experimentală, nici obiecții, față de acest punct de vedere, unii fizicieni, printre care și Einstein, consideră acest principiu atractiv apriori, în timp ce alții nu. Aceasta este însă o problemă pentru cosmologia speculativă.

Dacă s-ar accepta credința că mișcarea medie a restului universului afectează comportarea oricărei particule izolate, relativ la acest fapt ar putea apărea un număr de întrebări la care n-am putea găsi totuși nici un răspuns. Există și alte relații între starea unei singure particule și starea restului universului? Se va modifica sarcina electronului, sau masa lui, sau energia de interacție dintre nucleoni, dacă numărul de particule din univers sau densitatea lor vor fi într-un anumit fel modificate? Pînă acum răspunsul la această întrebare adîncă, relația dintre universul îndepărtat și proprietățile particulelor individuale, nu a fost încă dat.

Forţe fictive. Dăm aici cîteva exemple de forţe ce par a exista datorită sistemului de referinţă accelerat. Vom începe întîi cu legea a doua a lui Newton, limitînd la început problema noastră la un sistem de referinţă inerţial deoarece ştim că legea a doua este valabilă într-un astfel de sistem. Vom include apoi acceleraţia unui sistem neinerţial şi o vom lega de o forţă ce „ar părea că există" atunci cînd raportăm problema la al doilea sistem. Legea a doua a lui Newton spune:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}_I \tag{4.5}$$

unde în membrul stîng se află forţa aplicată iar $\mathbf{a}_I$ este acceleraţia văzută faţă de sistemul inerţial. Considerăm că masa M este constantă. Am introdus indicele I pentru a scoate în evidenţă cuvîntul *inerţial*. Ştim că într-un sistem neinerţial, cum este Pămîntul în rotaţie, ecuaţia (4.5) nu mai este valabilă în această formă. Aceasta din cauză că am omis acceleraţia $\mathbf{a}_0$ ce trebuia inclusă, şi anume, acceleraţia inerţială pe care o are particula din cauza mişcării accelerate a sistemului.

Dacă $\mathbf{a}$ este acceleraţia corpului măsurată faţă de sistemul neinerţial, avem $\mathbf{a} + \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_I$[1], sau:

$$\mathbf{F} = M(\mathbf{a} + \mathbf{a}_0). \tag{4.6}$$

Dacă facem experienţe într-un sistem neinerţial trebuie să fim întotdeauna siguri că am inclus pe $\mathbf{a}_0$ *în ecuaţia forţei.* Lucrînd într-un sistem neinerţial, adesea este convenabil să judecăm în termenii unei mărimi F_0 astfel încît relaţia (4.6) să se transforme în:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_0 = M\,\mathbf{a} \tag{4.7}$$

unde

$$\mathbf{F}_0 \equiv -M\,\mathbf{a}_0 \tag{4.8}$$

este numită *forţă fictivă* sau *pseudoforţă*. Forţa fictivă este acea mărime ce trebuie adunată la o forţă reală pentru a face suma egală cu $M\mathbf{a}$, unde $\mathbf{a}$ este acceleraţia faţă de sistemul neinerţial. Dacă sistemul are o acceleraţie de translaţie $\mathbf{a}_0$, această forţă fictivă este tocmai $-M\mathbf{a}_0$. Vom discuta mai jos cazul unei sistem în rotaţie în care forţa fictivă depinde de poziţia faţă de sistem. Tot ce este fictiv în fizică tinde să semene confuzie; puteţi însă întotdeauna rezolva o problemă întorcîndu-vă la ecuaţia (4.6).

EXEMPLU

Accelerometrul. Să presupunem că forţa aplicată unui corp de masă M printr-un arc întins în direcţia x este $F_x = -Cx$, unde C este o constantă. Să considerăm un sistem neinerţial cu acceleraţia $\mathbf{a}_0 = a_0\hat{\mathbf{x}}$ în direcţia x. Dacă, în sistemul neinerţial, corpul de masă M este în repaus, atunci acceleraţia $\mathbf{a}$ în acest sistem este zero şi $\mathbf{F} = M(\mathbf{a} + \mathbf{a}_0)$ se reduce la:

$$F_x = Ma_0 = -Cx$$

---

[1] În prima temă avansată vom discuta cazul general al mişcării într-un sistem în rotaţie unde $\mathbf{a}_I - \mathbf{a}$ depinde de viteza şi poziţia faţă de sistemul accelerat.

astfel incit:

$$x = -\frac{Ma_0}{C}. \qquad (4.9)$$

Sau folosind forţa fictivă:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{0x} = M\mathbf{a} = 0$$

$$F_x = -F_{0x}$$

$$-Cx = Ma_0$$

care este identică cu relaţia (4.9). Deplasarea x este proporţională cu, şi opusă în direcţie accelerației a_0 a sistemului neinerțial. Sistemul neinerțial poate fi un avion sau un automobil. Vedem că relaţia (4.9) descrie funcționarea unui *accelerometru* în care corpul de masă M este fixat de un arc şi obligat să se mişte în direcţia acceleraţiei. Deplasarea x a corpului măsoară acceleraţia a_0 a sistemului de referinţă neinerţial.

EXEMPLU

Forţa centrifugă şi acceleraţia centripetă într-un sistem în rotaţie uniformă. Deşi, vom discuta mai in detaliu sistemele în rotaţie, în temele avansate de la sfirşitul acestui capitol, merită să discutăm acum un exemplu simplu şi comun. Să considerăm un punct material de masă M în repaus într-un sistem neinerţial, astfel încît faţă de acest sistem $a = 0$. Sistemul neinerţial se roteşte uniform in jurul unei axe fixe, faţă de un sistem inerţial. S-a văzut în capitolul 2 că acceleraţia punctului este:

$$\mathbf{a}_0 = -\omega^2\mathbf{r} \qquad (4.10)$$

în raport cu sistemul inerţial, unde r este îndreptat de la axă spre particulă şi perpendicular pe axă.

Ecuaţia (4,10) exprimă faimoasa *acceleraţie centripetă*. Cu ajutorul unui arc intins corpul poate fi obligat să rămină în repaus. Cum am precizat că în sistemul neinerţial $\mathbf{a} = 0$ cu relaţiile (4.7) şi (4.8) obţinem:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_0 = M\mathbf{a}_0 = -M\omega^2\mathbf{r}. \qquad (4.11)$$

Forţa fictivă $\mathbf{F}_0$ din acest exemplu se numeşte *forţă centrifugă*; ea este $\mathbf{F}_0 = M\omega^2\mathbf{r}$; şi este orientată dinspre axă spre in afară. Forţa centrifugă este, în acest exemplu, echilibrată de forţa elastică F a arcului pentru a produce acceleraţie nulă (masa in repaus) în sistemul neinerţial în rotaţie.

Dacă $M = 100$g, $r = 10$ cm iar sistemul se roteşte cu 100 de rotaţii pe secundă, care este valoarea forţei centrifuge? Avem $F_0 = M\omega^2r = (10^2)(2\pi \times 100)^2(10) \approx 4 \times 10^8$ dyn, sau $(0,1)(2\pi \times 100)^2(0,1) \approx 4 \times 10^3$ N.

EXEMPLU

Experienţe într-un lift în cădere liberă. Fie acceleraţia unui sistem neinerţial. un ascensor în cădere liberă,

$$\mathbf{a}_0 = -g\hat{y}$$

unde $\hat{y}$ este îndreptat în sus de la suprafața pămîntului iar g este accelerația gravitației. Această accelerație corespunde unei căderi libere sub acțiunea gravitației. Din (4.8) forța fictivă asupra corpului din sistemul neinerțial este:

$$\mathbf{F}_0 = -M\mathbf{a}_0 = Mg\hat{y}.$$

Asupra unui corp ce nu este fixat de ascensor acționează suma dintre forța gravitațională $\mathbf{F} = -Mg\hat{y}$ și forța fictivă $\mathbf{F}_0 = Mg\hat{y}$ astfel încît forța aparentă totală în sistemul neinerțial al liftului în cădere liberă este zero:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_0 = 0$$

Corpul nu este deci accelerat față de sistemul neinerțial. Aceasta este o formă de „imponderabilitate". Corpul apare suspendat în spațiu dacă n-a avut o viteză inițială relativă la lift.

EXEMPLU

Pendulul Foucault. Pendulul Foucault ne dovedește că Pămîntul este un sistem neinerțial în rotație (vezi fig. 4.12). Experiența, cu public, a fost făcută pentru prima oară de către Foucault în 1851 sub marea cupolă a Panteonului din Paris, folosind un corp cu masa de 28 kg suspendat de un fir lung de aproape 70 m. Modul de fixare al capătului de sus al firului dădea pendulului posibilitatea să oscileze cu egală libertate în orice direcție. Perioada unui pendul de această lungime este de aproximativ 17 s (vezi cap. 7).

La nivelul solului, direct sub punctul de suspensie și în jurul lui s-a construit un cerc metalic cu raza de 3 m. În acest cerc s-a pus nisip astfel încît, la baza pendulului, un vîrf metalic îndreptat în jos zgîria nisipul la fiecare balans. Pe măsură ce se desfășurau balansuri succesive, apărea că planul mișcării pendulului (văzut de sus) se rotește în direcția orară. Într-o oră pendulul și-a modificat planul de oscilație cu peste 11°. Un cerc complet a fost făcut în 32 h. Într-un balans, planul se deplasa cu 3 mm, măsurați pe cercul cu nisip.

De ce se rotește planul pendulului? Dacă experiența Foucault ar fi fost făcută la polul nord al Pămîntului, am fi văzut imediat că planul de oscilație al pendulului ar fi rămas fix față de un sistem inerțial, în timp ce Pămîntul s-ar roti sub pendul o dată la fiecare 24 h. Rotația Pămîntului se face în sens antiorar dacă este văzută de deasupra polului nord (să zicem că din steaua polară), și astfel un observator urcat pe o scară la polul nord are impresia că planul pendulului se rotește în sens orar în raport cu el.

Situația începe să se schimbe (și este mai greu de analizat) pe măsură ce părăsim polul nord, iar timpul pentru un cerc complet se lungește. Să considerăm vitezele relative ale punctelor din extremitatea nordică și sudică de pe cercul de nisip de rază r, ca în figura 4.13. Punctul sudic este mai îndepărtat de axa de rotație a Pămîntului și se va mișca în spațiu mai repede decît punctul nordic. Dacă ω este viteza unghiulară a Pămîntului iar R este raza Pămîntului atunci centrul cercului de nisip se mișcă cu o viteză $\omega R \cos \varnothing$, unde $\varnothing$ este latitudinea Parisului (48°51' N) măsurată de la ecuatorul Pămîntului. Punctul cel mai nordic de pe cerc se mișcă cu viteza:

$$v_N = \omega R \cos\Phi - \omega r \sin\Phi$$

după cum vedem din figură, iar punctul cel mai sudic se mișcă cu viteza:

$$v_S = \omega R \cos\Phi + \omega r \sin\Phi.$$

Diferența dintre oricare din cele două viteze și viteza centrului cercului este:

$$\Delta v = \omega r \sin\Phi.$$

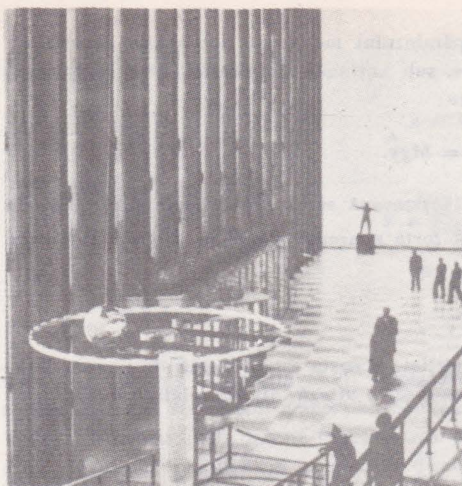


FIG. 4.12. Un pendul Foucault instalat la cartierul general al Națiunilor Unite de la New York. Sfera, din stînga fotografiei, este placată cu aur și cîntărește 91 kg. Ea este suspendată de tavanul aflat la 25 m deasupra pardoselei holului central. Un fir de oțel inoxidabil o susține în asa fel incît să poată oscila liber în orice plan. Sfera oscilează direct deasupra unui inel metalic cu un diametru de 2 m. Sfera oscilează continuu ca un pendul deplasîndu-și ușor planul în direcție orară, oferind astfel o dovadă vizuală a rotației Pămîntului. Un ciclu complet durează aproximativ 36 h 45 min. Pe bilă se află înscris un mesaj din partea Reginei Iuliana a Olandei: „Este un privilegiu de a trăi astăzi și mîine" (*United Nations photograph*).

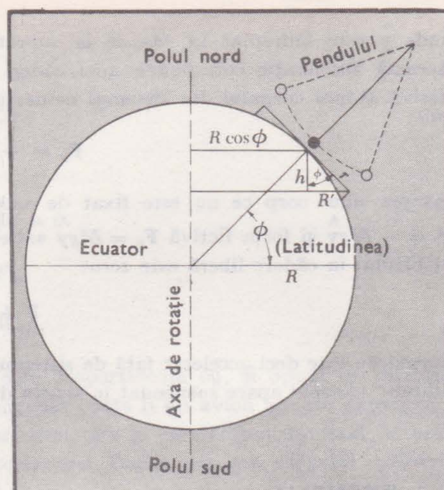


FIG. 4.13. Pendulul Foucault, mult exagerat în dimensiune în raport cu Pămîntul, este arătat la un unghi aproximativ egal cu latitudinea Parisului. Cercul de nisip de sub pendul are raza r. Distanța de la axa Pămîntului la centrul de balans al pendulului este $R \cos\Phi$. Din cauza rotației Pămîntului partea sudică a cercului de nisip se mișcă mai repede decît partea nordică (relativ la un sistem inerțial).

Dacă este pornit pendulul în planul nord – sud printr-un impuls dat din poziția de repaus în centrul cercului atunci componenta est – vest a vitezei în spațiu va fi aceeași cu cea a centrului cercului. Circumferința cercului este $2\pi r$, astfel încît, dacă Δv este constant de-a lungul cercului, timpul T_0 necesar unei parcurgeri complete a cercului este:

$$T_0 = \frac{2\pi r}{\omega r \sin\Phi} = \frac{24 \text{ h}}{\sin\Phi}$$

La ecuator $\sin\Phi = 0$ și timpul devine infinit.

Ce se întîmplă cînd planul pendulului ajunge să se suprapună peste planul est – vest ce trece prin centrul cercului? De ce ar trebui Δv să rămînă și acum același ca în planul nord-sud? Este greu de văzut acest lucru, fără a face referiri la globul pămîntesc. Să luăm o bucată de carton și s-o facem să atingă globul în Paris (luăm un glob școlar); s-o facem să fie normală în acest punct și să fie orientată în planul est – vest. Direcția normală la suprafața Pămîntului este de-a lungul firului pendulului. Cu o mînă vom ține fix cartonul în timp ce cu cealaltă mînă rotim încet globul. Notați că o parte a liniei de contact a cartonului cu globul pare că se mișcă înspre sud în timp ce cealaltă pare că se mișcă spre nord. Simpla contemplație sau o analiză mai detaliată ne dă pentru Δv aceeași valoare ca cea de mai sus: planul pendulului se rotește în fapt relativ la inelul de pe podeaua Panteonului cu viteza unghiulară constantă $\omega\sin\Phi$, unde ω este viteza unghiulară a Pămîntului iar Φ este latitudinea. În multe cărți de mecanică de nivel superior se găsește o tratare matematică a ecuației de mișcare a pendulului Foucault.

VITEZA ABSOLUTĂ ŞI VITEZA RELATIVĂ

Are viteza absolută vreo semnificaţie fizică? În acord cu toate experimentele făcute pînă acum răspunsul este *nu*. Sîntem astfel conduşi la o ipoteză fundamentală, ipoteza *invarianţei Galilei* (sau *galileană*):

Legile fundamentale ale fizicii sînt identice în orice sistem de referinţă ce se mişcă cu viteză uniformă (neaccelerat) unul în raport cu celălalt.

În concordanţă cu această ipoteză, un observator închis într-o cameră fără ferestre nu poate observa prin nici o experienţă dacă este în repaus sau în mişcare uniformă faţă de stelele fixe. Numai uitîndu-se pe fereastră, astfel încît să compare mişcarea sa cu cea a stelelor, ar putea zice un observator că se află în mişcare uniformă în raport cu ele. Chiar şi atunci n-ar putea să decidă dacă se deplasează el ori se deplasează stelele. Principiul de invarianţă Galilei a fost unul dintre primele introduse în fizică. El a fost fundamental pentru imaginea lui Newton despre univers; a supravieţuit numeroaselor experienţe şi este una dintre pietrele de bază ale teoriei restrînse a relativităţii. Ipoteza aceasta este într-atît de simplă încît ar fi fost luată în consideraţie chiar şi în absenţa unei evidenţe puternice. După cum vom vedea în capitolul 11 ipoteza invarianţei Galilei este în întregime consistentă cu teoria restrînsă a relativităţii.

Ce folos putem trage din această ipoteză? Ipoteza că viteza absolută nu are nici un sens în fizică restrînge în parte forma şi conţinutul tuturor legilor fizicii, atît cele cunoscute cît şi cele nedescoperite încă. Dacă ipoteza este adevărată, legile fizicii trebuie să fie aceleaşi faţă de doi observatori care se deplasează cu viteze diferite dar fără acceleraţie relativă. Să presupunem că amîndoi observă acelaşi fenomen particular, cum ar fi ciocnirea a două particule. Din cauza vitezelor diferite ale celor doi observatori, evenimentul urmărit va fi descris în mod diferit de către fiecare dintre ei. Utilizînd legile fizicii putem prezice ce observaţii va face unul dintre observatori, cum vor interacţiona particulele, şi, în final, cum îi vor apărea celui de-al doilea observator.

Legile fizicii celui de-al doilea observator pot fi astfel deduse, ori obţinute din cele ale celui dintîi, prin două şiruri de argumente diferite. Pe de o parte ele sînt prin ipoteză aceleaşi cu cele ale primului. Pe de altă parte, putem prezice legile celui de-al doilea observator din ceea ce am prezis deja cu privire la observaţiile sale referitoare la fenomenele descrise de legile primului observator. Cele două metode dau aceleaşi rezultate pentru legile concrete ale fizicii. Înainte de a continua, să dăm cîteva rezultate empirice privind maniera în care doi observatori, unul deplasîndu-se cu viteză constantă în raport cu celălalt, descriu acelaşi eveniment fizic.

TRANSFORMAREA GALILEI

Discutînd acum felul în care doi observatori măsoară o anumită lungime şi un anumit interval de timp, putem stabili modul în care vor fi comparate măsurătorile făcute de ei altor mărimi fizice. Fie S un anumit sistem de coordonate cartezian şi inerţial şi fie S' alt sistem de coordonate cartezian şi inerţial în mişcare cu viteza $\mathbf{V}$ în raport cu primul, după cum se arată în figura 4.14. Axele x', y', z' ale lui S' sînt paralele cu axele x, y, z ale lui S. Alegem pe $\mathbf{V}$ în direcţia x. Vrem să comparăm măsurătorile de timp şi de distanţă ale unui observator legat de sistemul S' cu cele ale unui observator aflat în repaus

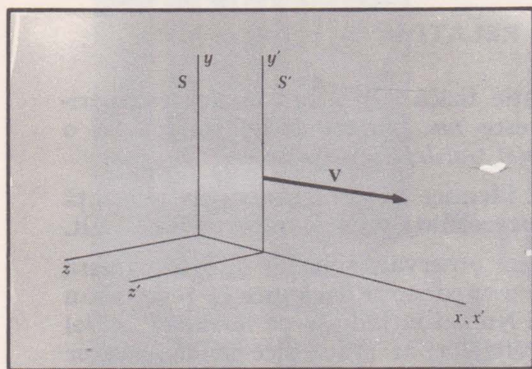


FIG. 4.14. Să presupunem că S este un sistem inerțial și că S' se mișcă cu viteză constantă V relativ la S. Atunci S' trebuie să fie de asemenea inerțial.

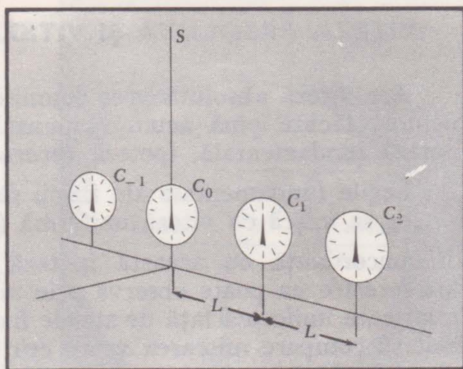


FIG. 4.15. Să plasăm ceasurile sincronizate C_0, C_1 etc. la intervale de lungime L de-a lungul axei x, în repaus față de S.

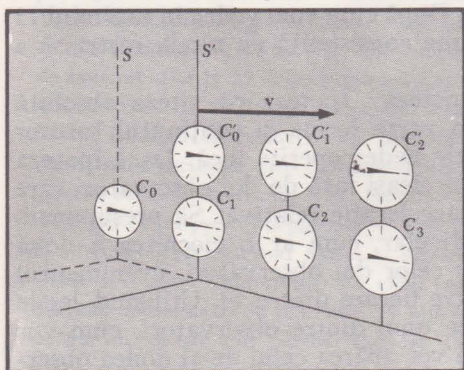


FIG. 4.16. Dacă plasăm ceasurile similare C'_0, C'_1 etc, în repaus față de S', atunci un observator din S va vedea aceste ceasuri ca fiind sincronizate atît între ele cît *și* cu C_0, C_1 etc., în acord cu transformările Galilei.

față de sistemul S. În cele din urmă rezultatul acestei comparații poate fi decis numai de experiență.

Dacă cei doi observatori își construiesc orologii identice ei pot face următoarea experiență: presupunem întîi că observatorul din S își distribuie orologiile de-a lungul axei x și le face să arate aceeași oră, ca în figura 4.15 [1]. După cum vom vedea în capitolul 11, această operație este mult mai complicată decît pare; presupunem, însă, aici că viteza luminii este infinită. Putem compara acum indicațiile ceasurilor din S' cu ceasurile 1, 2, 3,..., din S, pe măsură ce S' trece pe lîngă ele (vezi fig. 4.16). Dacă ar fi să facem această experiență cu un orologiu real macroscopic, ar trebui să ne restrîngem, din motive practice, la viteze V de ordinul 10^4 m/s, viteză tipică de satelit al Pămîntului. În aceste condiții $V/c \ll 1$ și experiența confirmă faptul că dacă

[1] Acest procedeu poate fi îmbunătățit, corectînd timpul necesar ca imaginea obiectelor mai îndepărtate să ajungă la noi, astfel încît un ceas aflat la distanța L m va apărea că este în întîrziere față de un ceas din apropiere cu L/c s, unde $c = 3 \times 10^8$ m/s este viteza luminii.

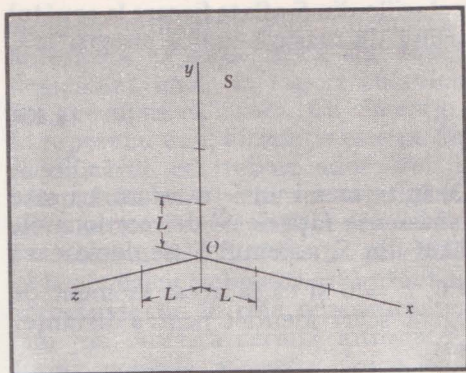


FIG. 4.17. (*a*) Să marcăm distanțe egale *L* de-a lungul axelor (x,y,z) ale lui *S*.

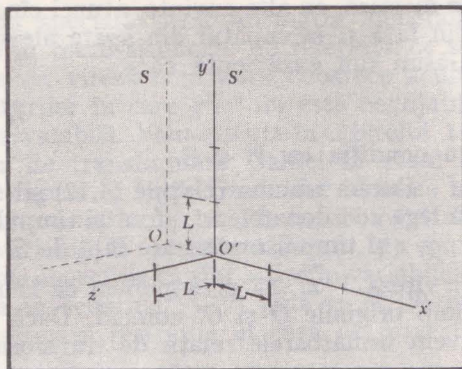


FIG. 4.17. (*b*) Și de-a lungul axelor (x',y',z') ale lui *S'*.

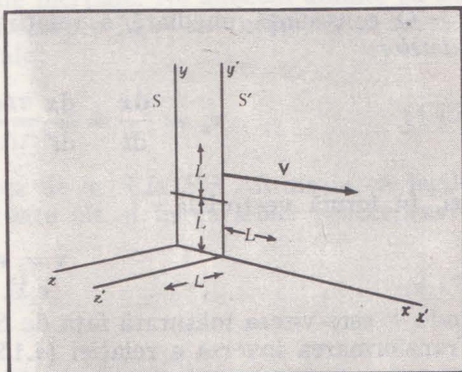


FIG. 4.17. (*c*) Atunci față de un observator aflat în *S*, lungimile din *S'* apar nemodificate chiar și cînd *S* se mișcă conform unei transformări Galilei.

orologiul din *S'* a fost făcut să coincidă cu ceasul 1 el va coincide cu 2, 3, 4, ... În limita erorilor de măsură[1] putem spune că:

$$t' = t \tag{4.12}$$

cu alte cuvinte, timpul citit în *S'* este egal cu timpul citit în *S*. Aici *t* se referă la timpul unui eveniment în *S* iar *t'* la timpul unui eveniment în *S'*.

Acest rezultat nu este evident prin sine însuși, nici nu este în întregime exact pentru orice viteză *V*, după cum vom vedea în capitolul 11. Putem, de asemenea, măsura dimensiunea relativă a unui metru de măsură aflat în repaus și în mișcare (vezi fig. 4.17 *a* la *c*). Vrem să știm mărimea aparentă a unui metru de măsură aflat în repaus în *S'* față de un observator din *S*. Un mod simplu de a afla acest lucru este de a folosi din nou orologiile și de a înregistra simultan pozițiile celor două capete ale metrului de măsură aflat

[1] Teoria relativității prezice că pentru viteza $V = 10^4$ m/s *t'* și *t* trebuie să difere cu numai o parte în 2×10^9 sau cu mai puțin de 1 s în 50 de ani. Deși se pot construi acum ceasuri cu o asemenea precizie, pînă la lansarea sateliților n-a existat nici o posibilitate de a observa un ceasornic în mișcare cu viteza de 10^4 m/s un timp suficient de lung pentru a permite o măsurătoare. Egalitatea $t = t'$ pentru $V \ll c = 3 \times 10^8$ m/s este o simplă extrapolare din experiență și nu se bazează pe date măsurate cu mare precizie.

în mişcare, cu alte cuvinte, atunci cînd orologiile din S aflate fiecare la capătul din faţă şi la capătul din spate ale metrului de măsură indică aceeaşi oră. Găsim din experienţă că:

$$L' = L \tag{4.13}$$

cu condiţia ca $V \ll c$[1].

Putem rezuma relaţiile (4.12) şi (4.13) în termenii unei transformări care să lege coordonatele x', y', z' şi timpul t' măsurate faţă de S' de coordonatele x, y, z şi timpul t măsurate faţă de S. Văzut din S, sistemul S' se deplasează cu viteza $V\hat{\mathbf{x}}$. Să presupunem că la $t = 0$, $t' = 0$ şi că la acest moment de timp originile O şi O' coincid. Dacă alegem scări identice pentru distanţe, avem următoarele relaţii de transformare:

$$\boxed{t = t';\ x = x' + Vt';\ y = y';\ z = z'} \tag{4.14}$$

Această transformare se numeşte *transformare Galilei* şi este ilustrată în figura 4.18.

O consecinţă imediată a relaţiilor (4.14) o constituie *legea adunării vitezelor:*

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'} = \frac{dx'}{dt'} + V = v'_x + V$$

ori, în formă vectorială:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \tag{4.15}$$

unde $\mathbf{v}'$ este viteza măsurată faţă de S' iar $\mathbf{v}$ este viteza măsurată faţă de S. Transformarea inversă a relaţiei (4.15) este simplă $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$.

Dacă definiţia unei transformări Galilei între S şi S', relaţia (4.14), este combinată cu postulatul fundamental care afirmă că legile fizicii sînt identice dacă ar fi determinate de fizicieni din S sau din S', putem formula următoarea propoziţie:

Legile fundamentale ale fizicii sînt neschimbate ca formă, în două sisteme de referinţă legate printr-o transformare Galilei.

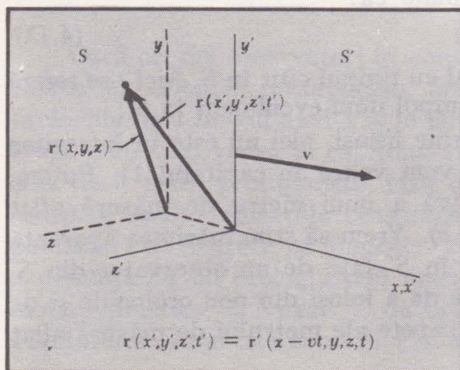


FIG. 4.18. Putem rezuma transformările Galilei de la S la S': $x' = x - Vt$; $y' = y$; $z' = z$; $t' = t$.

[1] O astfel de experienţă n-a fost făcută cu mare precizie, iar credinţa în egalitatea $L = L'$ pentru $V \ll c$ se bazează în primul rînd pe experienţa noastră calitativă, pe simplitatea ipotezei şi pe faptul că această supoziţie nu conduce la nici un fel de paradoxuri sau inconsistenţe.

Această propoziţie este întrucîtva mai specială decît afirmaţia generală anterioară că legile fizicii sînt identice în toate sistemele de referinţă ce se deplasează unele în raport cu celelalte cu viteză constantă deoarece acum am presupus că $t' = t$. Cu excepţia cazurilor în care v^2/c^2 nu este neglijabil în raport cu unu, afirmaţia este pe deplin valabilă. Vom discuta în capitolul 11 modificările ce trebuie aduse relaţiilor de transformare Galilei în cazul v comparabil cu c pentru a ne asigura de faptul că legile fizicii sînt identice în orice sistem de referinţă ce se mişcă cu viteză uniformă unul în raport cu altul.

Prezentele consideraţii privind invarianţa la transformările (4.14) spun că legile fizicii trebuie să aibă exact acelaşi aspect fie că sînt scrise în variabilele accentuate fie în cele neaccentuate, ca în ecuaţiile (4.17) pînă la (4.19) de mai jos. Această cerinţă introduce o serioasă restricţie în ceea ce priveşte forma posibilă a legilor fizice.

Din relaţia $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$, unde $\mathbf{V}$ este viteza relativă dintre cele două sisteme de referinţă, rezultă

$$\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}'.$$

O variaţie de viteză observată din S este egală cu o variaţie de viteză observată din S'; atît S cît şi S' fiind sisteme inerţiale. Ne aducem aminte că s-a presupus că $\mathbf{V}$ nu se modifică în timp. Deoarece $\Delta t = \Delta t'$ urmează că acceleraţiile observate din S şi din S' sînt egale:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{v}'}{\Delta t'} \equiv \mathbf{a}'. \tag{4.16}$$

Cum se modifică forţa $\mathbf{F}$ în trecerea de la S la S'? Afirmaţia că legile fizicii sînt aceleaşi în variabile accentuate cît şi în variabile neaccentuate conduce la:

$$\mathbf{F}' = M\,\mathbf{a}' \tag{4.17}$$

dacă:

$$\mathbf{F} = M\,\mathbf{a} \tag{4.18}$$

cu condiţia ca masa M să fie independentă de viteză. Dar am arătat în (4.16) că $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, de unde:

$$\mathbf{F} = M\,\mathbf{a}' = \mathbf{F}' \tag{4.19}$$

şi astfel forţele sînt egale: $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$. Tragem concluzia că dacă folosim relaţia $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ pentru a defini forţa, observatori aflaţi în sisteme de referinţă inerţiale vor cădea de acord asupra mărimii şi direcţiei forţei $\mathbf{F}$ independent de vitezele relative ale sistemelor de referinţă.

Conservarea impulsului. În capitolul 3 (pagina 102) am enunţat legea conservării impulsului. O vom demonstra acum presupunînd valabile invarianţa Galilei precum şi conservarea energiei şi a masei. Această demonstraţie are avantajul de a nu folosi faptul că forţele de acţiune şi reacţiune sînt egale, fapt ce ar putea ridica semne de întrebare din cauza vitezei finite de propagare a forţei. Anumite probleme ca, de exemplu, ciocnirile atomice se fac deseori cu participarea radiaţiei şi în acest stadiu nu sîntem în măsură să includem şi impulsul radiaţiei.

Vom considera două particule libere 1 şi 2, care au iniţial vitezele $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$. Poziţiile iniţiale (şi finale) sînt considerate a fi la distanţe foarte mari,

astfel încît la momentele inițial și final particulele nu interacționează. Din cunoștințele dumneavoastră de fizică (ori din capitolul 5) știți că energia cinetică inițială a particulelor este:

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 .$$

Să lăsăm particulele să se ciocnească; nu este necesar ca ciocnirea să fie elastică. Impulsul se conservă chiar dacă ciocnirea nu este elastică. Energia cinetică după ciocnire este:

$$\frac{1}{2} M_1 w_1^2 + \frac{1}{2} M_2 w_2^2$$

unde $\mathbf{w}_1$ și $\mathbf{w}_2$ sînt vitezele după ciocnire [1], mult după ciocnire, în așa fel încît particulele să nu mai interacționeze. Legea conservării energiei ne spune că:

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = \frac{1}{2} M_1 w_1^2 + \frac{1}{2} M_2 w_2^2 + \Delta\mathcal{E} \qquad (4.20)$$

unde $\Delta\mathcal{E}$ (care poate fi ori pozitiv ori negativ) este modificarea energiei interne de excitare a particulelor în urma ciocnirii. Va trebui să excludem dintre considerațiile prezente acele ciocniri în care se emite sunet sau lumină deoarece nu sîntem încă pregătiți să includem în calculele noastre și impulsurile lor.

Excitația internă poate fi o rotație sau o vibrație internă; ar putea fi excitarea unui electron legat dintr-o stare cu energie mai joasă într-o stare cu energie mai înaltă. Într-o ciocnire elastică $\Delta\mathcal{E} = 0$, dar nu este nevoie să ne restrîngem demonstrația la ciocnirile elastice [2]. Am presupus aici că masele M_1 și M_2 nu se modifică după ciocnire.

Să analizăm acum aceeași ciocnire în sistemul de referință accentuat, în mișcare cu viteza uniformă $\mathbf{V}$ în raport cu sistemul de referință inițial neaccentuat. În sistemul de referință accentuat vitezele inițiale sînt $\mathbf{v}_1'$ și $\mathbf{v}_2'$ iar vitezele finale $\mathbf{w}_1'$ și $\mathbf{w}_2'$. Avem:

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} \qquad \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V}$$
$$\mathbf{w}_1' = \mathbf{w}_1 - \mathbf{V} \qquad \mathbf{w}_2' = \mathbf{w}_2 - \mathbf{V}. \qquad (4.21)$$

Legea conservării energiei în sistemul de referință accentuat ne dă:

$$\frac{1}{2} M_1(v_1')^2 + \frac{1}{2} M_2(v_2')^2 = \frac{1}{2} M_1(w_1')^2 + \frac{1}{2} M_2(w_2')^2 + \Delta\mathcal{E}. \qquad (4.22)$$

[1] De notat că am folosit w în loc de v' (care fusese folosit în capitolul 3) pentru viteza după ciocnire. Am rezervat aici simbolurile accentuate pentru mărimile raportate la sistemul de referință S'.

[2] Într-o ciocnire neelastică nu este violat principiul conservării energiei. Ceea ce se petrece constă în faptul că energia cinetică pierdută sau cîștigată de mișcarea particulelor reapare sub formă de mișcare de rotație, de vibrație sau alt tip de excitație internă a corpurilor. O astfel de mișcare internă poate fi adesea denumită mișcare termică, sau căldură (volumul 5).

Am presupus că energia de excitație $\Delta\mathcal{E}$ nu se modifică atunci cînd schimbăm sistemele de referință. Acest fapt este în concordanță cu experiența.

Dacă legea conservării energiei trebuie să fie invariantă la o transformare Galilei, atunci, atît în sistemele accentuate cît și în cele neaccentuate energia cinetică inițială trebuie să fie egală cu energia cinetică finală plus $\Delta\mathcal{E}$, energia internă de excitație. Adică, trebuie să fie satisfăcute atît (4.20) cît și (4.22). Se poate de asemenea exprima conservarea energiei în sistemul accentuat substituind relația de transformare (4.21) în (4.22) și ținînd cont că $(v_1')^2 = v_1^2 - 2\,\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} + V^2$ etc., relația (4.22) devine:

$$\frac{1}{2} M_1(v_1^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} + V^2) + \frac{1}{2} M_2\,(v_2^2 - 2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{V} + V^2) =$$

$$= \frac{1}{2} M_1\,(w_1^2 - 2\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{V} + V^2) + \frac{1}{2} M_2(w_2^2 - 2\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{V} + V^2) + \Delta\mathcal{E}. \qquad (4.23)$$

De notat că termenii în V^2 se anulează în ambii membri. Această expresie este identică cu legea conservării energiei din sistemul neaccentuat [relația (4.20)] cu condiția ca în (4.23) să se reducă produsele scalare:

$$(M_1\mathbf{v}_1 + M_2\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{V} = (M_1\mathbf{w}_1 + M_2\mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{V}. \qquad (4.24)$$

Relația (4.24) trebuie să fie adevărată pentru orice valoare a lui $\mathbf{V}$. Atunci soluția generală a ecuației (4.24) este:

$$\boxed{M_1\mathbf{v}_1 + M_2\mathbf{v}_2 = M_1\mathbf{w}_1 + M_2\mathbf{w}_2}$$

Iată tocmai *legea conservării impulsului*.

Să repetăm ce am făcut pînă acum: am presupus că într-o ciocnire se conservă energia și că se conservă și masa și am mai presupus că aceste legi de conservare sînt valabile în orice sisteme de referință inerțiale. Cu alte cuvinte, am presupus invarianța Galilei. Am găsit astfel că aceste legi sînt valabile în diferite sisteme inerțiale numai dacă în ciocnire se conservă impulsul. N-am folosit legea conservării masei în întreaga ei generalitate. Dacă ciocnirea se face și cu un schimb de masă astfel încît după ciocnire M_1 să devină $\overline{M}_1$ iar M_2 să devină $\overline{M}_2$ dar cu $M_1 + M_2 = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$ putem arăta conservarea impulsului folosind aceiași pași ca mai sus. Această demonstrație este făcută în cel de-al doilea exemplu care urmează.

EXEMPLU

Ciocnirea neelastică a două corpuri de mase egale. Pentru a exemplifica ideile de mai sus să analizăm, ciocnirea neelastică a două corpuri de mase egale, din două sisteme de referință diferite, primul dintre ele fiind cel în care o particulă este inițial în repaus iar cel de-al doilea sistem fiind cel în care cele două corpuri se apropie inițial unul de celălalt cu viteze egale și opuse. După ciocnire cele două corpuri se lipesc unul de celălalt.

Am rezolvat (vezi capitolul 3, pagina 103) problema în primul sistem și am aflat că viteza celor două corpuri după ciocnire este $v_1/2$, unde v_1 este viteza corpului în mișcare înainte de ciocnire. Pierderea de energie cinetică este:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot 2m_1 \left(\frac{v_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} m_1 v_1^2$$

În cel de-al doilea sistem impulsul total este zero; *acest sistem* este denumit adesea *sistemul centrului de masă*. Viteza de mișcare a sistemului centrului de masă este $v_1/2$, încît $v_1' = v_1 - v_1/2 = v_1/2$ iar $v_2' = -v_1/2$. După ciocnire $w_1' = w_2' = 0$ iar pierderea în energie cinetică este:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{v_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{v_1}{2}\right)^2 - 0 = \frac{1}{4} m_1 v_1^2.$$

Dacă sînteți preocupați de egalitatea lui $\Delta\mathcal{E}$ în cele două sisteme de referință puteți rezolva și alte exemple.

EXEMPLU

Reacții chimice. Vom arăta că impulsul se conservă și în reacțiile chimice în care atomii reactanților sînt rearanjați sau schimbați cu conservarea masei totale. Vom presupune că nu există forțe externe (vezi fig. 4.19).

Fie reacția reprezentată prin:



$$A + BC \longrightarrow B + AC$$

unde BC înseamnă o moleculă formată din atomii B și C. În cursul reacției atomul C se atașază de atomul A pentru a forma AC. Într-un sistem inerțial legea conservării energiei se poate scrie astfel:

$$\frac{1}{2} M_A v_A^2 + \frac{1}{2} (M_B + M_C) v_{BC}^2 = \frac{1}{2} M_B w_B^2 + \frac{1}{2} (M_A + M_C) w_{AC}^2 + \Delta\mathcal{E}. \quad (4.25)$$

Aici $\Delta\mathcal{E}$ reprezintă modificările în energia de legătură a moleculelor ce iau parte la reacție. În alt sistem inerțial în mișcare față de primul cu viteza $\mathbf{V}$, se poate scrie legea conservării energiei, înlocuind pe $\mathbf{v}_A$ cu $\mathbf{v}_A - \mathbf{V}$ etc.:

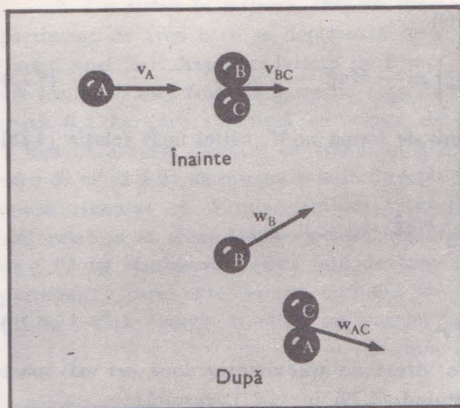
$$\frac{1}{2} M_A (\mathbf{v}_A - \mathbf{V})^2 + \frac{1}{2} (M_B + M_C)(\mathbf{v}_{BC} - \mathbf{V})^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M_B (\mathbf{w}_B - \mathbf{V})^2 + \frac{1}{2} (M_A + M_C)(\mathbf{w}_{AC} - \mathbf{V})^2 + \Delta\mathcal{E}. \quad (4.26)$$

Dezvoltînd parantezele vedem că relațiile (4.25) și (4.26) sînt consistente dacă:

$$M_A \mathbf{v}_A + (M_B + M_C)\mathbf{v}_{BC} = M_B \mathbf{w}_B + (M_A + M_C)\mathbf{w}_{AC}$$

care este exact formularea legii conservării impulsului.



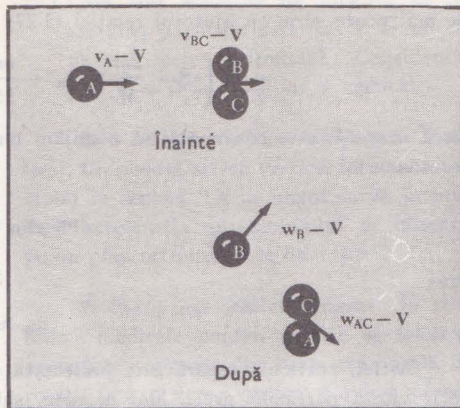


FIG. 4.19. O ciocnire între atomul A și molecula BC avînd ca rezultat atomul B și molecula AC. Ciocnirea este văzută în două sisteme de referință.

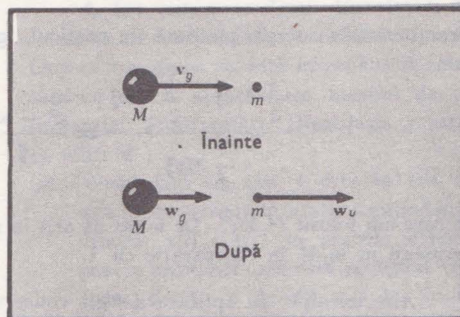


FIG. 4.20. Ciocnirea unei particule grele cu o particulă ușoară. (Notați că vectorii reprezintă viteze nu impulsuri.)

EXEMPLU

Ciocnirea unei particule grele cu o particulă ușoară. O particulă grea de masă M se ciocnește elastic cu o particulă ușoară de masă m (vezi fig. 4.20). Particula ușoară se găsește inițial în repaus. Viteza inițială a particulei grele este $\mathbf{v}_g = v_g\hat{\mathbf{x}}$; viteza finală este $\mathbf{w}_g$. Dacă ciocnirea este astfel încît particula ușoară pleacă înainte pe direcția $(+\hat{\mathbf{x}})$, care va fi viteza sa $\mathbf{w}_u$? Ce fracțiune din energia particulei grele se pierde în ciocnire?

Din conservarea impulsului rezultă că nu trebuie să existe nici o componentă $\hat{\mathbf{y}}$ a vitezei finale a particulei grele în cazul acesta particular, astfel încît:

$$Mv_g\,\hat{\mathbf{x}} = Mw_g\,\hat{\mathbf{x}} + mw_u\,\hat{\mathbf{x}}$$

sau

$$Mv_g = Mw_g + mw_u. \tag{4.27}$$

Din conservarea energiei avem ($\Delta\mathcal{E} = 0$ pentru o ciocnire elastică):

$$\frac{1}{2}Mv_g^2 = \frac{1}{2}Mw_g^2 + \frac{1}{2}mw_u^2.$$

Se mai poate scrie cu ajutorul relației (4.27) astfel

$$\frac{1}{2} M\left(w_g^2 + \frac{2m}{M} w_g w_u + \frac{m^2}{M^2} w_u^2\right) = \frac{1}{2} M w_g^2 - \frac{1}{2} m w_u^2. \tag{4.28}$$

Dacă $m \ll M$, este convenabil să neglijăm termenii de forma m/M, astfel incît relația (4.28) se reduce la:

$$m w_g w_u \approx \frac{1}{2} m w_u^2$$

sau:

$$w_u \approx 2 w_g. \tag{4.29}$$

Astfel, particula ușoară este proiectată cu o viteză de aproximativ două ori mai mare decît viteza particulei grele. Mai departe, substituind (4.29) in (4.27), rezultă:

$$M v_g \approx M w_g + 2 m w_g$$

sau

$$\frac{\Delta v_g}{v_g} = \frac{v_g - w_g}{v_g} \approx \frac{2m}{M + 2m} \approx \frac{2m}{M}. \tag{4.30}$$

Fracțiunea de energie pierdută de particula grea este:

$$\frac{\frac{1}{2} M v_g^2 - \frac{1}{2} M w_g^2}{\frac{1}{2} M v_g^2} = \frac{v_g^2 - w_g^2}{v_g^2} = 1 - \left(\frac{M}{M + 2m}\right)^2 \approx \frac{4m}{M}. \tag{4.31}$$

în care am folosit (4.30) [1]. De notat că atit în relația (4.30) cît și in relația (4.31) am neglijat termenii în m/M in comparație cu 1.

Alte exemple de aplicare a legii conservării inpulsului sint tratate in capitolul 6.

PROBLEME

1. *Corpul pe o masă în rotație.* Un corp trebuie să rămînă în repaus relativ la o masă orizontală (aspră) ce se rotește cu 20 rotații pe minut (rpm). Corpul se află la 1,50 m de axa de rotație care este verticală. Cit de mare ar trebui să fie coeficientul de frecare? Prezentați într-o schemă forțele de frecare și centrifuge.

[1] Alt mod de a scrie acest lucru se obține folosind pe Δ ca operator

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{2} M v_g^2\right)}{\frac{1}{2} M v_g^2} = \frac{M v_g \, \Delta v_g}{\frac{1}{2} M v_g} = \frac{2\,\Delta v_g}{v_g} \approx \frac{4m}{M}.$$

2. *Un sistem în mișcare.* Într-un compartiment de tren care se deplasează de-a lungul unei linii drepte cu viteza de 5 m/s are loc o ciocnire frontală între un corp de masă 0,1 kg care se mișcă cu viteza de 1 m/s în aceeași direcție cu trenul și alt corp de masă 0,05 kg mișcîndu-se în direcția opusă trenului cu 5 m/s. Ambele viteze sînt relative la tren. După ciocnire corpul de 0,05 kg rămîne în repaus față de compartiment; care este viteza corpului de 0,1 kg? Cîtă energie cinetică s-a pierdut?

R: − 1,5 m/s.

Descrieți acum ciocnirea din punctul de vedere al unui observator în repaus față de terasament. Se conservă impulsul? Cîtă energie cinetică s-a pierdut în acest sistem?

3. *Accelerația în mișcarea circulară.* Un obiect se mișcă cu viteza constantă v de 0,5 m/s pe o traiectorie circulară. Vectorul viteză $\mathbf{v}$ își modifică direcția cu 30° în 2 s

(*a*) Găsiți mărimea variației vitezei $\Delta\mathbf{v}$.

(*b*) Găsiți mărimea accelerației medii în acest interval.

R: 0,1295 m/s².

(*c*) Care este accelerația centripetă a mișcării circulare și uniforme?

R: 0,1316 m/s².

4. *Forța efectivă datorită rotației.* Un obiect fixat pe suprafața unei planete identice în masă și rază cu Pămîntul suferă o accelerație gravitațională nulă la ecuatorul planetei. Cît este lungimea zilei pe acea planetă?

R: 1,4 h.

5. *Mișcarea într-un sistem de referință neinerțial.* Fie un sistem inerțial S pe suprafața pămîntului și un sistem neinerțial S' în repaus față de un lift în cădere liberă.

(*a*) Care este ecuația de mișcare în S' a unui corp ce cade liber față de S?

(*b*) Față de corpul din (*a*) care sînt forțele fictive și aplicate în S și S'?

(*c*) Care sînt ecuațiile de mișcare în S' ale unei particule care în S se mișcă pe un cerc orizontal? Considerați $y = y' = 0$ la $t = 0$ iar y vertical.

6. *Pendulul într-un automobil accelerat.* Un pendul atîrnă vertical într-un automobil în repaus. La ce unghi se va inclina dacă accelerația automobilului în mișcare pe un plan orizontal este de 1 m/s²?

7. *Centrifuge pentru oameni.* În studiile medicale pentru aviație se folosesc centrifuge compuse din brațe orizontale în rotație față de un ax vertical și avînd subiectul experienței la unul din capete. Dacă distanța subiectului față de centrul de rotație este de 7 m, cît de repede trebuie învîrtită centrifuga pentru a-l supune pe subiect la 5 g? (g = accelerația gravitației.)

8. *Un sistem accelerat.* Un sistem de referință are o accelerație verticală de 3 m/s². La $t = 0$ originea sa este în repaus și coincide cu cea a unui sistem inerțial de pe suprafața Pămîntului. (Neglijați rotația Pămîntului.)

(*a*) Considerînd că axa y este în sus și axa x este orizontală aflați, neglijînd gravitația, $x(t)$ și $y(t)$ în ambele sisteme pentru un obiect care este proiectat orizontal cu viteza de 10 m/s la $t = 0$.

(*b*) Rezolvați-l pe (*a*) luînd în considerare gravitația.

9. *Cinematica ciocnirilor; centrul de masă.* Două particule de mase $M_1 = 0,1$ kg și $M_2 = 0,04$ kg au vitezele inițiale $\mathbf{v}_1 = (2,8\,\hat{\mathbf{x}} - 3,0\hat{\mathbf{y}}) \times 10^{-2}$ m/s iar $\mathbf{v}_2 = 7,5 \times 10^{-2}\hat{\mathbf{y}}$ m/s. Ele se ciocnesc și după ciocnire vitezele sînt $\mathbf{v}_1' = (1,2\hat{\mathbf{x}} - 2,0\hat{\mathbf{y}}) \times 10^{-2}$ m/s și $\mathbf{v}_2' = (4,0\hat{\mathbf{x}} + 5,0\hat{\mathbf{y}}) \times 10^{-2}$ m/s.

(*a*) Aflați impulsul total.

(*b*) Aflați viteza unui sistem de referință în care impulsul total (înainte de ciocnire) să fie zero. Acesta este numit *sistemul centrului de masă.*

(*c*) Arătați că după ciocnire impulsul este zero în acest sistem

(*d*) Ce fracțiune din energia cinetică inițială nu mai apare ca energie cinetică după ciocnire? Este ciocnirea elastică?

10. *Ciocnirea a două corpuri de mase diferite.* În cazul ciocnirii a două particule, sistemul de referință în care una este inițial în repaus iar cealaltă se deplasează cu viteza v se numește *sistemul laboratorului*. Să presupunem că masa în repaus este m iar cea care se deplasează este $2m$.

(*a*) Care este viteza sistemului centrului de masă (vezi problema 9) în raport cu sistemul laboratorului?

(*b*) Cîtă energie cinetică se pierde în ambele sisteme dacă ciocnirea este complet neelastică, adică particulele se lipesc împreună?

(*c*) Dacă ciocnirea este elastică, vitezele particulelor în sistemul centrului de masă își modifică direcția dar nu și mărimea. Aflați o expresie care să lege unghiul de deviere (numit de obicei unghi de împrăștiere) de masa m atît în sistemul laboratorului cît și în sistemul centrului de masă.

Notați că în sistemul centrului de masă, unghiul celei de a doua particule este întotdeauna egal cu unghiul primei particule minus 180°. Într-o ciocnire cu mase egale, $\theta_{lab} = \theta_{c.m.}/2$. Schemele (diagramele) vectoriale sînt instructive.

11. *Accelerarea și deflecția magnetică a electronilor.* (Această problemă precum și problemele de la 12 la 14 sînt o revedere a materialului din capitolul 3.) Să presupunem că sînt emiși electroni, practic în repaus, în punctul O de pe un plan metalic (vezi fig. 4.21) și că sînt accelerați, de către un cîmp electric, spre un plan paralel aflat la $2{,}5 \times 10^{-3}$ m distanță de primul. Un mic orificiu aflat în punctul P permite fasciculului de electroni să iasă într-o regiune fără cîmp electric (totul într-un vid înalt, de bună seamă). Se produce cîmpul electric prin aplicarea tensiunilor de -300 V și 0 V celor două plăci metalice, ca în figură. Vrem să curbăm fasciculul cu 90° pe o traiectorie circulară de rază 5×10^{-3} m, cu un cîmp magnetic B aflat în zona circulară din figură. Calculați inducția cîmpului magnetic necesar; precizați și direcția sa.

12. *Timpul de tranzit al ionilor.* Un puls de ioni de cesiu o dată ionizați Cs^+ este accelerat din repaus de către un cîmp electric de 30 kV/m care acționează pe o distanță de $3{,}3 \times 10^{-3}$ m, iar după aceea mai parcurg 1 mm în 87×10^{-9} s într-un spațiu vidat și fără cîmp.

(*a*) Obțineți din aceste date valoarea masei atomice a Cs^+.

R: $2{,}4 \times 10^{-25}$ kg

FIG. 4.21

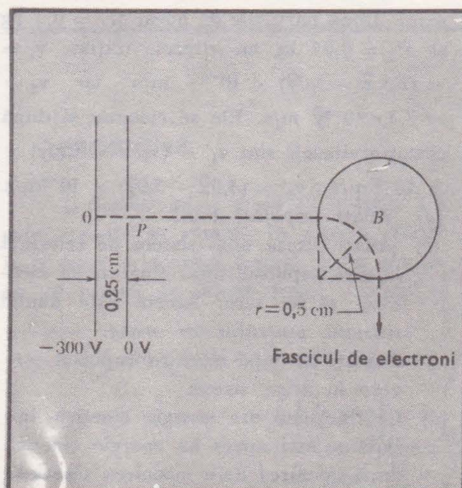
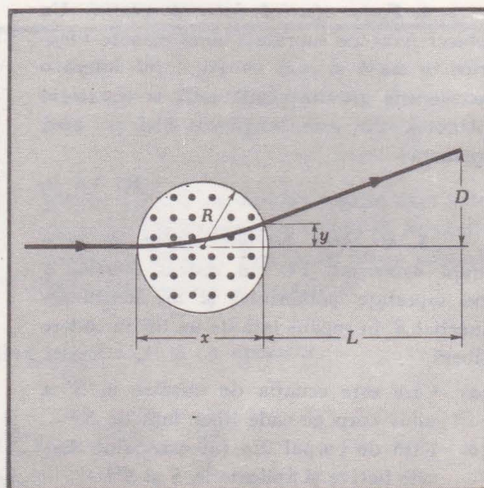


FIG. 4.22



Comparați această valoare cu cea pe care o găsiți în tabele, dicționare de fizică sau manualele de chimie.

(b) Ce timp le-ar lua protonilor să traverseze spațiul de 1 mm?

R: $7{,}2 \times 10^{-9}$ s.

13. *Deflecția magnetică a unui fascicul de electroni.* Deflecția unui fascicul de electroni într-un tub catodic se poate face atît cu mijloace magnetice cît și electrostatice. Un fascicul de electroni de energie W intră într-o regiune cu cîmp magnetic transversal și uniform de inducție B. (Neglijați efectele de margine. Vezi fig. 4.22.)

(a) Dacă x este distanța din punctul in care electronul intră în regiunea cîmpului magnetic și pînă în punctul în care electronul părăsește regiunea, arătați că:

$$y = r\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]$$

unde r este raza de curbură a electronului în cîmpul magnetic transversal. Raza de curbură este raza cercului ce va coincide cu porțiunea curbă a traiectoriei.

(b) Dacă R este raza polilor magnetici, atunci $x \approx 2R$ cînd $r \gg R$. Folosiți dezvoltarea binomială pentru a arăta că $y \approx 2R^2/r$.

14. *Accelerarea într-un ciclotron.* Să presupunem că într-un ciclotron $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ și $E_x = E\cos\omega_c t$; $E_y = -E\sin\omega_c t$; $E_z = 0$ cu E constant. (Într-un ciclotron real cîmpul electric nu este uniform în spațiu.) Vedem că vectorul intensitate a cîmpului electric se rotește cu frecvența circulară ω_c. Arătați că deplasarea unei particule este descrisă de:

$$x(t) = \frac{qE}{M\omega_c^2}(\omega_c t\sin\omega_c t - \cos\omega_c t - 1);$$

$$y(t) = \frac{qE}{M\omega_c^2}(\omega_c t\cos\omega_c t - \sin\omega_c t)$$

unde la $t = 0$ particula este în repaus în origine. Schițați primele cîteva cicluri ale deplasării.

TEME AVANSATE

Viteza și accelerația într-un sistem de coordonate în rotație. Vom considera acum un sistem de referință neinerțial care se rotește cu viteză unghiulară constantă ω în jurul axei z a unui sistem inerțial. Restrîngem discuția la cazul unei mișcări de rotație în jurul axei comune z. (Formulele pentru cazul general pot fi găsite în manuale de mecanică teoretică și sînt date la sfîrșitul acestui paragraf.) Importanța problemei constă în faptul că Pămîntul este un sistem de referință în rotație. În cursul analizei, pe lîngă accelerația centripetă vom considera și accelerația Coriolis, care este importantă pentru mișcarea la scară globală a mărilor și a curenților de aer.

Coordonatele (x_R, y_R, z_R) ale unui punct P față de sistemul în rotație se leagă simplu de coordonatele (x_1, y_1, z_1) ale aceluiași punct față de sistemul inerțial. Studiind geometria figurilor 4.23 și 4.24 vedem că:

$$x_I = x_R\cos\omega t - y_R\sin\omega t$$

$$y_I = x_R\sin\omega t + y_R\cos\omega t \qquad (4.32)$$

$$z_I = z_R.$$

Relațiile dintre componentele vitezei în cele două sisteme de coordonate se pot obține derivînd relațiile (4.32) în raport cu timpul. (Pentru simplitate vom folosi punctul pus deasupra unei mărimi pentru a desemna derivata în raport cu timpul, așa cum s-a spus la pagina 95 din capitolul 3. Astfel $\dot{x} \equiv dx/dt \equiv v_x$ și $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2 \equiv \dot{v}_x \equiv dv_x/dt$.) Avem:

$$\dot{x}_I = \dot{x}_R\cos\omega t - \omega x_R\sin\omega t - \dot{y}_R\sin\omega t - \omega y_R\cos\omega t$$

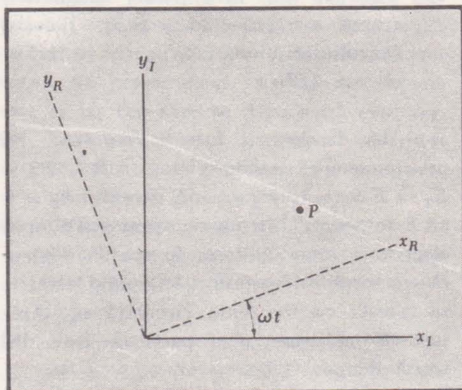


FIG. 4.23. Punctul P aflat în planul xy al unui sistem inerțial (x_I, y_I) și în sistemul în rotație (x_R, x_R). Axele coincid la $t = 0$, iar rotația se face cu viteza unghiulară ω în jurul axei z.

$$\dot{y}_I = \dot{x}_R \sin \omega t + \omega x_R \cos \omega t + \dot{y}_R \cos \omega t - \omega y_R \cos \omega t \quad (4.33)$$

$$\dot{z}_I = \dot{z}_R.$$

Pentru simplitate l-am considerat pe ω constant. De notat că pentru o particulă în repaus față de sistemul în rotație ($\dot{x}_R = \dot{y}_R = \dot{z}_R = 0$) relațiile (4.33) se reduc la:

$$\dot{x}_I = -\omega x_R \sin \omega t - \omega y_R \cos \omega t$$

$$\dot{y}_I = \omega x_R \cos \omega t - \omega y_R \sin \omega t.$$

Similar, pentru o particulă în rotație în sistemul inerțial ($\dot{x}_I = \dot{y}_I = \dot{z}_I = 0$) vom avea (după citeva calcule):

$$\dot{x}_R - \omega y_R = 0; \quad \dot{y}_R + \omega x_R = 0; \quad \dot{z}_R = 0$$

din relațiile (4.33).

Componentele accelerației se pot afla derivind relațiile (4.33) în raport cu timpul:

$$\ddot{x}_I = \ddot{x}_R \cos \omega t - 2\omega \dot{x}_R \sin \omega t - \omega^2 x_R \cos \omega t - \ddot{y}_R \sin \omega t - 2\omega \dot{y}_R \cos \omega t + \omega^2 y_R \sin \omega t;$$

$$\ddot{y}_I = \ddot{x}_R \sin \omega t + 2\omega \dot{x}_R \cos \omega t - \omega^2 x_R \sin \omega t + \ddot{y}_R \cos \omega t - 2\omega \dot{y}_R \sin \omega t - \omega^2 y_R \cos \omega t;$$

$$\ddot{z}_I = \ddot{z}_R. \quad (4.34)$$

Observăm că pentru o particulă în repaus față de sistemul în mișcare relația (4.34) se reduce cu ajutorul relației (4.32) la:

$$\ddot{x}_I = -\omega^2 (x_R \cos \omega t - y_R \sin \omega t) = -\omega^2 x_I \quad (4.35)$$

$$\ddot{y}_I = -\omega^2 (x_R \sin \omega t + y_R \cos \omega t) = -\omega^2 y_I. \quad (4.36)$$

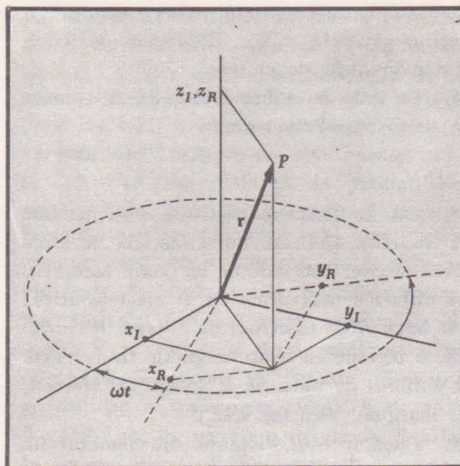


FIG. 4.24. Punctul P poate fi descris în coordonatele x_I, y_I, z_I ale sistemului inerțial sau în coordonatele x_R, y_R, z_R ale sistemului în rotație. Rotația este în jurul axei z.

Relațiile (4.35) și (4.36) pot fi scrise în formă vectorială astfel:

$$\mathbf{a}_I = -\omega^2 \mathbf{r}_I \quad (4.37)$$

unde $\mathbf{a}_I \equiv \ddot{\mathbf{r}}_I$ este accelerația particulei față de sistemul inerțial și $\mathbf{r}_I = x_I \hat{\mathbf{x}}_I + y_I \hat{\mathbf{y}}_I$, ca în relația (4.10). Relația (4.37) reprezintă expresia uzuală a accelerației centripete.

Primii termeni din ecuațiile (4.34) reprezintă tocmai accelerația în sistemul de coordonate în rotație ($\ddot{x}_R$ și $\ddot{y}_R$) proiectată pe axele de coordonate ale sistemului inerțial. Cei de ai doilea termeni depind, totuși, de viteza din sistemul în rotație ($\dot{x}_R$ și $\dot{y}_R$) și vor fi nuli dacă $\dot{x}_R = \dot{y}_R = 0$. Putem să-i înțelegem mai bine, considerînd o particulă proiectată radial spre înafară fără forțe reale acționind asupra ei. Traiectoria ei reală va fi o linie dreaptă radială, ca în figura 4.25, *a*, dar în sistemul în rotație traiectoria sa va arăta ca în figura 4,25, *b*. Această accelerație este numită *accelerație Coriolis*, și forța fictivă pe care o generează se numește *forță Coriolis* (vezi fig. 4.25). Cei de ai treilea termeni din ecuațiile (4.34) sînt tocmai termenii care exprimă accelerația centripetă iar forța fictivă care derivă din ei este *forța centrifugă*. Atîta timp cît

v este mic în comparaţie cu ωr, forţa Coriolis este mică în comparaţie cu forţa centrifugă.

Pentru a ilustra aceste forţe fictive şi a reconcilia consideraţiile din cele două sisteme de referinţă, inerţial şi în rotaţie, să considerăm un avion supersonic zburînd spre est de-a lungul ecuatorului cu o viteză de 880 m/s faţă de pămînt. Această situaţie este ilustrată în figura 4.26. Considerăm că traiectoria avionului urmăreşte suprafaţa Pămîntului; şi cum altitudinea este mică în raport cu dimensiunile Pămîntului, vom considera ca rază a traiectoriei chiar raza Pămîntului.

Să privim întîi situaţia din punctul de vedere al sistemului inerţial. Faţă de acest sistem, avionul se mişcă pe un cerc de rază r cu viteza $\omega r + V$. Această viteză rezultă compunînd mişcarea suprafeţei Pămîntului la ecuator cu viteza avionului relativă la sol. Există, desigur, o forţă centripetă care determină acceleraţia centripetă corespunzătoare acestei traiectorii circulare, iar această forţă centripetă se obţine compunînd forţa de gravitaţie cu forţa ascensională aerodinamică. Putem atunci scrie:

$$-\frac{GMm}{r^2} + f = -\frac{m(\omega r + V)^2}{r} = -m\omega^2 r - 2m\omega V - \frac{mV^2}{r}$$

unde f reprezintă forţa ascensională, m este masa avionului, iar semnul minus desemnează o forţă sau o acceleraţie îndreptate spre centru. Rezolvînd ecuaţia în raport cu f, obţinem:

$$f = \frac{GMm}{r^2} - m\omega^2 r - 2m\omega V - \frac{mV^2}{r}$$

sau

$$f = mg - 2m\omega V - \frac{mV^2}{r}.$$

În cea de-a doua expresie, am recunoscut pur şi simplu că $GMm/r^2 - m\omega^2 r$ este forţa locală efectivă de „gravitaţie" mg la ecuator, după cum s-a arătat la pagina 126.

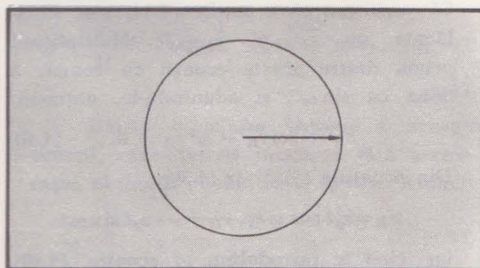


FIG. 4.25. (*a*) Traiectoria unei particule proiectată radial din centru văzută în sistemul de referinţă inerţial.

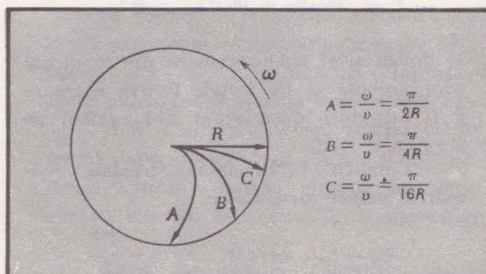


FIG. 4.25. (*b*) Traiectoria particulei proiectată radial din centru văzută în sistemul de referinţă în rotaţie.

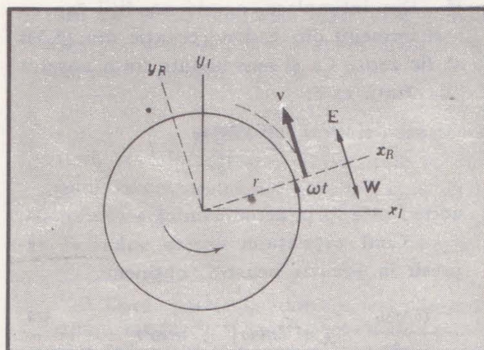


FIG. 4.26. Sistemul inerţial şi sistemul în rotaţie pentru Pămînt, văzute din spaţiul cosmic deasupra Polului nord. x_R şi y_R se află în planul ecuatorial. Vectorul **v** reprezintă viteza avionului supersonic relativă la sol. Zborul se face spre est la înălţime constantă indicată prin curba punctată. Este arătată şi direcţia locală est – vest.

Tragem concluzia că datorită efectelor combinate ale vitezei avionului în raport cu solul precum și a mișcării de rotație a Pămîntului, forța aerodinamică ascensională este mai mică decît mg cu ultimii doi termeni cu semn minus. Dacă folosim valoarea lui V dată mai sus, cu $\omega = 7{,}3 \times 10^{-5}$ rad/s și $r = 6{,}4 \times 10^6$ m găsim $2\omega V = 0{,}1285$ m/s² și $V^2/r = 0{,}1210$ m/s². Acestea trebuie scăzute din $g = 9{,}78$ m/s², accelerația căderii libere la ecuator. Forța ascensională necesară este redusă cu aproape 2,6%.

Să privim acum aceeași situație din punctul de vedere al sistemului în rotație. Vom utiliza prima ecuație din (4.34) și vom alege originea timpului $t = 0$ în momentul cînd axele în rotație coincid cu axele inerțiale. Prima ecuație devine atunci:

$$\ddot{x}_I = \ddot{x}_R - 2\omega\dot{y}_R - \omega^2 x_R.$$

Desigur, $m\ddot{x}_I$ este egal cu forța adevărată F, și urmind forma relației (4.7) putem scrie ecuația noastră în felul următor:

$$F + 2m\omega\dot{y}_R + m\omega^2 x_R = m\ddot{x}_R.$$

Al doilea și al treilea termen din membrul sting trebuie să fie forțele fictive necesare a fi introduse dacă vrem să-l egalăm pe $m\ddot{x}_R$ cu o forță.

Condițiile problemei noastre dau următoarele valori variabilelor:

$$x_R = r;\quad \dot{x}_R = 0;\quad \ddot{x}_R = -\frac{V^2}{r}$$

$$y_R = 0;\quad \dot{y}_R = V;\quad \ddot{y}_R = 0$$

deoarece în sistemul în rotație avionul se deplasează pe o traiectorie curbă cu viteza V. [Din intimplare, aceste condiții fac ca toți termenii din a doua ecuație din (4.34) să fie zero.] Ca și mai înainte forța noastră adevărată este:

$$F = -\frac{GMm}{r^2} + f$$

unde f este forța aerodinamică ascensională.

Cînd substituim aceste valori și expresii în ecuația noastră, obținem:

$$-\frac{GMm}{r^2} + f + 2m\omega V + m\omega^2 r = -m\frac{V^2}{r}.$$

Rezolvînd din nou în raport cu f și scriind, ca mai inainte, $GMm/r^2 - m\omega^2 r = mg$ obținem:

$$f = mg - 2m\omega V - m\frac{V^2}{r}.$$

Acest rezultat este identic cu cel obținut din punctul de vedere al sistemului inerțial. Termenul $2m\omega V$ este tocmai forța Coriolis; ultimul termen mV^2/r este forța centrifugă datorită vitezei avionului pe traiectoria sa curbă. Forța centrifugă datorită rotației Pămîntului a fost inglobată în forța locală atribuită gravitației. Ne vom opri aici cu acest exemplu simplu.

Ca un exemplu mai deosebit (menționat deja la pagina 150) cunoaștem că intr-un sistem inerțial un corp proiectat din centrul de rotație se va deplasa în linie dreaptă spre exterior:

$$x_I = v_0 t;\quad y_I = 0;\quad z_I = 0.$$

În sistemul în rotație avem:

$$v_0 t = x_R \cos\omega t - y_R \sin\omega t \qquad (4.38)$$

$$0 = x_R \sin\omega t + y_R \cos\omega t. \qquad (4.39)$$

Să verificăm că ecuațiile (4.34) sînt satisfăcute cu $\ddot{x}_I = 0$, $\ddot{y}_I = 0$. Multiplicînd prima dintre aceste ecuații cu $\cos\omega t$, a doua cu $\sin\omega t$, și adunîndu-le, obținem:

$$\ddot{x}_R - 2\omega\dot{y}_R - \omega^2 x_R = 0. \qquad (4.40)$$

Din ecuațiile (4.38) și (4.39),

$$x_R = v_0 t \cos\omega t;\quad y_R = -v_0 t \sin\omega t$$

iar cînd le introducem în ecuația (4.40), vedem că este satisfăcută.

Cînd considerăm mișcarea în trei dimensiuni și luăm o direcție arbitrară pentru vectorul viteză unghiulară ω, a sistemului de coordonate obținem:

$$\mathbf{a}_I = \mathbf{a}_R + 2\omega \times \mathbf{v}_R + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = \mathbf{F}/M$$

și astfel:

$$M\mathbf{a}_R = \mathbf{F} - 2M\omega \times \mathbf{v}_R - M\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$$

unde $\mathbf{F}$ este forța adevărată. Atunci:

$-2M\omega \times \mathbf{v}_R$ este forța Coriolis (4.41)

$-m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ este forța centrifugă. (4.42)

Mișcarea unui proton în cîmpuri electrice și magnetice încrucișate. Acest exemplu important poate fi rezolvat destul de ușor, iar interpretarea este mai simplă dacă facem o transformare de coordonate pentru un sistem în mișcare. Fie $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$

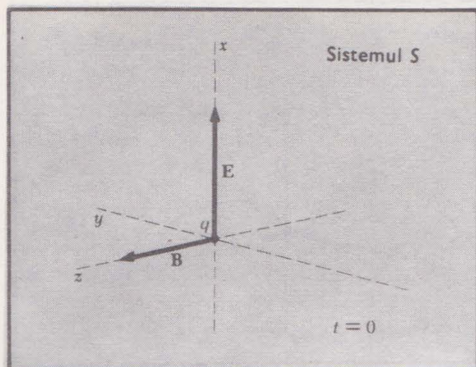


FIG. 4.27. (*a*) Să considerăm o sarcină pozitivă q în repaus în origine și în cîmpurile **E** și **B** încrucișate.

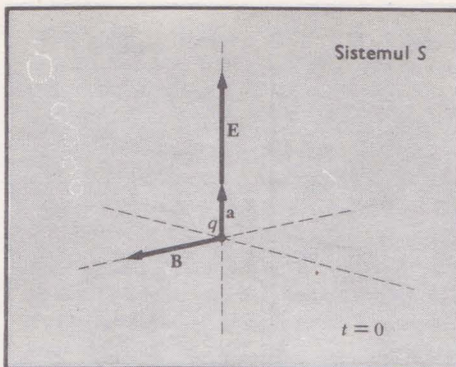


FIG. 4.27. (*b*) Accelerația inițială a lui q este $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/M$.

și $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$, ca în figura 4.27, *a*. Din definițiile forței Lorentz [dată prin relația (3.19)] și a frecvenței giromagnetice ω_c [dată prin relația (3.27)], avem următoarele ecuații de mișcare pentru o particulă încărcată:

$$\dot{v}_x = \frac{e}{M} E + \omega_c v_y ; \quad \dot{v}_y = -\omega_c v_x ; \quad \dot{v}_z = 0 \qquad (4.43)$$

Există o *soluție specială* a acestor ecuații, care descrie mișcarea fără accelerație, obținută punînd $\dot{v}_x = \dot{v}_y = 0$. Atunci:

$$v_x = 0 ; \quad v_y = -\frac{eE}{M\omega_c} = -\frac{E}{B} . \qquad (4.44)$$

Asupra unei particule încărcate care se deplasează cu această viteză nu acționează nici o forță netă deoarece forțele electrică și magnetică se anulează una pe cealaltă. Cîmpurile încrucișate sînt folosite în acest mod ca selector de viteze în cercetarea atomică și nucleară.

Dacă privim acum problema mișcării într-un sistem de coordonate S', care se deplasează cu viteza dată de relația (4.44), vedem că în acest nou sistem de coordonate particula se mișcă uniform pe un cerc. Transformările componentelor vitezei sînt

$$v_x = v'_x ; \quad v_y = -\frac{E}{B} + v'_y . \qquad (4.45)$$

Substituind în ecuația (4.43) obținem (cu $\omega_c = eB/M$):

$$\dot{v}'_x = \omega_c v'_y ; \quad \dot{v}'_y = -\omega_c v'_x . \qquad (4.46)$$

Acestea sînt aceleași cu relațiile (3.24) care descriu o mișcare circulară uniformă.

Astfel, comportarea unei particule poate fi descrisă simplu ca o mișcare circulară uniformă cu viteza unghiulară $\omega_c = Be/M$ în planul $x'y'$ al sistemului S' suprapusă peste mișcarea de translație cu viteza $v_y = -E/B$ a acestui sistem relativ la sistemul laboratorului. În sistemul S' particula „simte" numai cîmpul magnetic; cîmpul electric este zero în acest sistem.

Dacă ne alegem condițiile inițiale astfel încît particula încărcată să fie momentan în repaus față de sistemul laboratorului la $t = 0$, mișcarea care urmează se face pe o cicloidă. Ca și cum particula ar fi un punct de pe periferia unei roți în mișcare cu viteza uniformă E/B de-a lungul axei y[1]. Vom demonstra acum acest fapt, ilustrat în figurile 4.27, *a* la *d*.

În S', condițiile inițiale pentru o viteză corespunzătoare vitezei nule în sistemul laboratorului sînt $v'_x = 0$ și $v'_y = E/B$.

[1] Dacă particula are viteză inițială atunci mișcarea ei va fi aceea a unui punct aflat înăuntrul sau înafara periferiei roții.

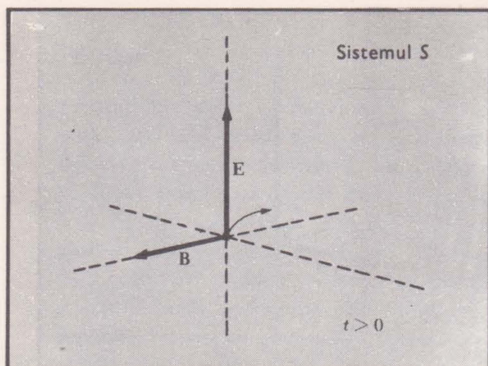


FIG. 4.27. (*c*) Îndată ce q cîștigă viteză în direcția lui **E**, asupra lui acționează forța $\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Orbita se curbează în direcția $-y$

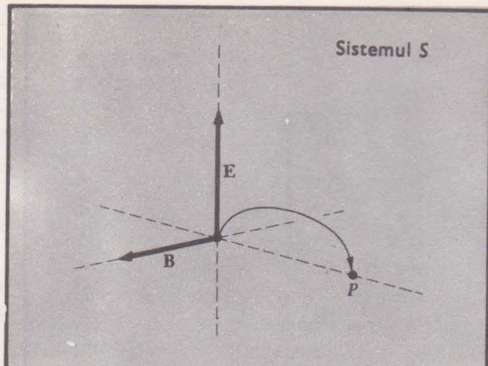


FIG. 4.27. (*d*) q ajunge în cele din urmă în repaus în P, un punct de pe axa y. Pe urmă începe un nou ciclu de mișcare.

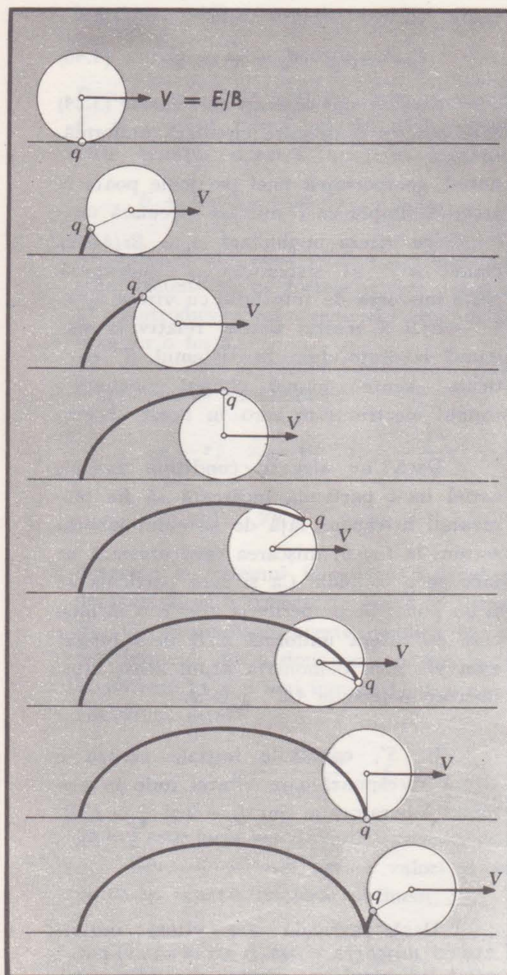
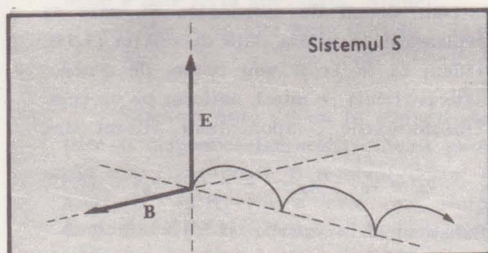


FIG. 4.28. (*a*) Orbita reprezintă o cicloidă comună (dacă particula pornește din repaus), iar q are viteza medie spre dreapta $V=E/B$. Notați că direcția vitezei medii E/B este direcția lui $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$. În a doua temă avansată, $\mathbf{E}\times\mathbf{B}=$ $=E\hat{\mathbf{x}}\times B\hat{\mathbf{z}}=-EB\hat{\mathbf{y}}$, care reprezintă rezultatul relațiilor (4.44) și (4.45).

FIG. 4.28. (*b*) Cicloida comună se obține din mișcarea lui q pe circumferința unui cerc în rostogolire de-a lungul unei drepte.



Soluțiile ecuațiilor (4.46) satisfăcînd acestor condiții inițiale sînt:

$$v'_x = \frac{E}{B} \sin \omega_c t; \quad v'_y = \frac{E}{B} \cos \omega_c t. \quad (4.47)$$

Acestea reprezintă o mișcare circulară uniformă, în sens orar dacă este privită din partea pozitivă a axei z', cu viteza unghiulară ω_c și raza:

$$r = \frac{E}{\omega_c B}. \quad (4.48)$$

Cînd trecem în sistemul laboratorului, ecuațiile (4.47), împreună cu relația (4.45), ne dau

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{E}{B} \sin \omega_c t; \quad (4.49)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{E}{B}(-1 + \cos \omega_c t).$$

Integrarea ecuațiilor (4.49) cu condițiile inițiale $x = y = 0$ la $t = 0$ și folosirea relației (4.48) ne dă:

$$x = r(1 - \cos \omega_c t);$$

$$y = r(-\omega_c t + \sin \omega_c t).$$

Acestea sînt tocmai ecuațiile mișcării unui punct de pe marginea unui disc de rază r rostogolindu-se în direcția negativă a axei y (vezi fig. 4.28, *a* și *b*). În unități CGS viteza sistemului în mișcare este $-cE/B$ și, desigur, $\omega_c = eB/Mc$. Ecuația (4.48) devine:

$$r = \frac{cE}{\omega_c B} = \frac{c^2 ME}{eB^2}.$$

Descrierea mișcării este aceeași.

NOTĂ MATEMATICĂ

Derivata unui produs de vectori. În capitolul 2 am considerat și derivata vectorilor: să ne reamintim în particular că dacă:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

atunci:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\hat{\mathbf{x}} + \dot{y}\hat{\mathbf{y}} + \dot{z}\hat{\mathbf{z}}$$

cu condiția ca vectorii de bază să fie constanți în direcție.

Să obținem acum relația:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}}.$$

Fie $\mathbf{P}(t)$ pentru $\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)$ și să considerăm expresia:

$$\mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t) = \mathbf{A}(t + \Delta t) \times \mathbf{B}(t + \Delta t) -$$

$$- \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) \approx \left[\mathbf{A}(t) + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\Delta t\right] \times \left[\mathbf{B}(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{d\mathbf{B}}{dt}\Delta t\right] - \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) = \Delta t \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}\right] + (\Delta t)^2 \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}\right].$$

Atunci avem:

$$\dot{\mathbf{P}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}}.$$

De notat că ordinea termenilor produsului vectorial în rezultat este importantă. Cu un argument similar avem:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{B}}.$$

LECTURI SUPLIMENTARE

Fizica PSSC (PSSC „Physics") capitolele 20 (§ 9–11), 22, D. C. Heath & Co., Boston, 1965.

Ernst Mach, *Știința mecanicii* („The Science of Mechanics"), capitolul 2, § 6, The Open Court Publishing Co., La Salle, Ill., 1960

Enciclopedia Collier („Collier's Encyclopedia"), 1964. La rubrica Foucault, este prezentată o discuție elementară excelentă asupra pendulului Foucault.

Mary Hesse, *Bibliografie pentru fundamentele filozofice ale mecanicii clasice*, (Resource Letter on Philosophical Foundations of Clasical Mechanics), *Am. J. Phys.*, 32: 905 (1964). Acest articol reprezintă o listă de lucrări aproape completă.

5

Conservarea energiei

Cuprins

LEGILE DE CONSERVARE ÎN LUMEA FIZICĂ

În lumea fizică există un număr de *legi de conservare*, unele exacte iar altele aproximative. O lege de conservare este de obicei consecința existenței unei anumite simetrii în univers. Există legi de conservare care se referă la energie, impuls, moment cinetic, sarcină, număr de barioni (protoni, neutroni și particule elementare mai grele), stranietate, precum și la diverse alte mărimi fizice. În capitolele 3 și 4 am discutat conservarea impulsului. În acest capitol discutăm conservarea energiei. În capitolul 6 vom generaliza discuția și vom considera momentul cinetic. Întreaga analiză va fi formulată aici pentru regimul nerelativist, ceea ce înseamnă că ne vom limita la transformări galileene, la viteze mult mai mici decît viteza luminii și la independența dintre masă și energie. În capitolul 12, după ce vom introduce transformările Lorentz și teoria relativității restrînse, vom da formulările adecvate ale legilor de conservare a energiei și impulsului pentru cazul regimului relativist.

Dacă într-o problemă toate forțele ar fi cunoscute, și dacă am fi destul de inteligenți și am dispune de calculatoare de viteză și capacitate suficiente pentru a calcula traiectoriile tuturor particulelor din ecuațiile de mișcare, atunci legile de conservare nu ne-ar da nici o informație suplimentară. Dar, întrucît în general nu avem la dispoziție toată această informație, și nici nu posedăm abilitatea și mijloacele de calcul necesare, legile de conservare sînt instrumente foarte puternice. De ce sînt legile de conservare instrumente puternice?

1. Legile de conservare sînt independente de detaliile traiectoriei și, adesea, de particularitățile forței respective. Aceste legi sînt deci un mod de a exprima consecințe foarte generale și semnificative ale ecuațiilor de mișcare. O lege de conservare ne poate uneori asigura că un anumit fapt fizic este imposibil. Nu mai irosim astfel timpul, analizînd un pretins dispozitiv cu mișcare perpetuă dacă el constă pur și simplu dintr-un sistem închis de componente mecanice și electrice, sau o schemă de lansare a unui satelit, care folosește în acest scop mișcarea unor greutăți interne.
2. Legile de conservare pot fi utilizate chiar cînd forța este necunoscută, aceasta se aplică în special în fizica particulelor elementare.
3. Legile de conservare se află într-o corelație esențială cu proprietățile de invarianță. În explorarea unor fenomene noi și încă neînțelese, legile de conservare reprezintă adeseori faptele fizice cele mai remarcabile pe care le cunoaștem. Ele pot sugera concepte de invarianță specifice. În capitolul 4 am văzut că legea conservării impulsului ar putea fi interpretată ca o consecință directă a principiului de invarianță galileană.

4. Chiar în cazul în care forța este cunoscută exact, o lege de conservare poate oferi un ajutor însemnat în rezolvarea problemei mișcării unei particule. Mulți fizicieni adoptă o schemă precisă în rezolvarea unei probleme necunoscute: întîi utilizează legile de conservare relevante, una cîte una; numai după aceea, dacă a mai rămas ceva de determinat în problemă, ei recurg la munca de rutină folosind ecuații deferențiale, metode variaționale și perturbative, calculatoare, intuiție și celelalte instrumente de care dispun. În capitolele 7—9 vom utiliza legile de conservare a energiei și impulsului în acest mod.

DEFINIREA CONCEPTELOR

Legea conservării energiei mecanice implică conceptele de *energie cinetică*, *energie potențială* și *lucru mecanic*. Aceste concepte, care pot fi înțelese dintr-un exemplu simplu, apar foarte natural din legea a doua a lui Newton și vor fi tratate în detaliu în cele ce urmează. Pentru început, vom discuta forțele și mișcările doar într-o singură dimensiune, ceea ce simplifică notațiile. Expunerea va fi reluată în cazul a trei dimensiuni, reluarea fiind utilă studentului.

Pentru a prezenta conceptele de lucru mecanic și energie cinetică, vom considera o particulă de masă M deplasîndu-se în spațiul intergalactic și inițial liberă de orice interacțiuni externe. Observăm particula dintr-un sistem de referință inerțial. O forță $\mathbf{F}$ este aplicată particulei la timpul $t = 0$. Forța este menținută apoi constantă în mărime și direcție; direcția este luată de-a lungul axei y. Particula va fi accelerată sub acțiunea forței aplicate. Mișcarea la timpul $t > 0$ este descrisă de legea a doua a lui Newton:

$$F = M\frac{d^2y}{dt^2} = M\ddot{y}^1. \tag{5.1}$$

Astfel viteza după un timp t este:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t \ddot{y}\, dt = \int_0^t \frac{F}{M}\, dt$$

sau:

$$v - v_0 = \frac{F}{M}t, \tag{5.2}$$

unde v_0 este viteza inițială presupusă a fi paralelă cu direcția y.

Observăm că ecuația (5.2) poate fi scrisă ca:

$$Ft = Mv(t) - Mv_0.$$

Membrul drept este variația impulsului particulei în timpul t iar membrul stîng se numește *impulsul forței* în același timp. În cazul în care F este foarte

[1] Folosim aici y în loc de x sau de z doar pentru comoditate în aplicarea rezultatelor la cîmpul gravitațional constant, pentru care în capitolul 3 am folosit coordonata y.

mare, dar timpul în care acţionează este foarte scurt, poate fi convenabil să definim:

$$\text{Impulsul forţei} = \int_0^t F\,\mathrm{d}t = \Delta(Mv). \tag{5.3}$$

Ecuaţia (5.3) ne spune că variaţia impulsului particulei este egală cu impulsul forţei [1].

Dacă poziţia iniţială este y_0, integrînd ecuaţia (5.2) în raport cu timpul găsim:

$$y(t) - y_0 = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t \left(v_0 + \frac{F}{M}t\right)\mathrm{d}t = v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2. \tag{5.4}$$

Putem rezolva ecuaţia (5.2) exprimînd timpul t:

$$t = \frac{M}{F}(v - v_0). \tag{5.5}$$

Introducem acum ecuaţia (5.5) în ecuaţia (5.4) pentru a obţine:

$$y - y_0 = \frac{M}{F}(vv_0 - v_0^2) + \frac{1}{2}\frac{M}{F}(v^2 - 2vv_0 + v_0^2) = \frac{1}{2}\frac{M}{F}(v^2 - v_0^2)$$

astfel încît:

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = F(y - y_0). \tag{5.6}$$

Dacă definim mărimea $\frac{1}{2}Mv^2$ ca fiind *energia cinetică* a particulei, adică energia pe care aceasta o posedă în virtutea mişcării sale, atunci membrul stîng al ecuaţiei (5.6) reprezintă variaţia energiei cinetice. Variaţia este produsă de forţa F, acţionînd pe o distanţă $(y - y_0)$. Se va dovedi util să numim produsul $F(y-y_0)$ *lucrul mecanic efectuat asupra particulei de către forţa aplicată*. Cu aceste definiţii ecuaţia (5.6) afirmă că lucrul mecanic efectuat de o forţă aplicată unei particule este egal cu variaţia energiei cinetice a particulei. Evident, toate acestea sînt doar definiţii, dar definiţiile sînt utile şi ele rezultă natural din legea a doua a lui Newton.

Dacă $M = 0{,}02$ kg şi $v = 1$ m/s, energia cinetică este:

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}(0{,}02)(1) = 10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 10^{-2}\ \text{Joule}.$$

Unitatea de energie în sistemul SI de unităţi se numeşte Joule. Dacă o forţă de 10^{-3} N este aplicată pe o distanţă de 10 m, avem:

$$F(y - y_0) = (10^{-3})\cdot(10) = 10^{-2}\ \text{N}\cdot\text{m} = 10^{-2}\ \text{J}.$$

[1] Multe cursuri avansate de mecanică tratează adeseori despre impulsul forţei. Problema 16 din acest capitol şi problema 10 din capitolul 8 folosesc acest concept.

Un Joule este lucrul mecanic efectuat de către o forță de 1 Newton acționînd pe o distanță de 1 metru. Lucrul mecanic are dimensiunea:

$$[\text{Lucru mecanic}] \sim [\text{forță}]\,[\text{distanță}] \sim [\text{masă}][\text{accelerație}] \times$$

$$\times [\text{distanță}] \sim [\text{masă}]\,[\text{viteză}]^2 \sim \left[M \frac{L}{T^2} L\right] \sim [ML^2T^{-2}] \sim [\text{energie}].$$

Vorbind despre lucru mecanic, trebuie totdeauna să specificăm cine efectuează *lucrul mecanic.* În cazul de mai sus, lucrul mecanic este efectuat de forța care accelerează particula. Asemenea forțe sînt adesea părți integrante ale sistemului pe care îl investigăm; de exemplu, ele pot fi forțe gravitaționale, electrice sau magnetice. Mai tîrziu, cînd vom vorbi despre energia potențială, le vom numi pe acestea *forțe ale cîmpului* sau *forțe ale sistemului;* dar vom considera, de asemenea, forțele aplicate de un agent extern (de exemplu de către noi), și va fi important să distingem lucrul mecanic efectuat de forțele cîmpului de acela efectuat de agentul extern. De exemplu, dacă agentul aplică, în orice moment, o forță egală și opusă forței cîmpului, particula nu va fi accelerată și nu se va produce nici o schimbare în energia cinetică. Lucrul mecanic efectuat de forța cîmpului este exact compensat de lucrul mecanic consumat de agent, după cum ne așteptam, deoarece $F_{ag} = -F$. (Este important de remarcat că excludem efectele forțelor de frecare din discuția prezentă; folosim situații ideale pentru a ne stabili definițiile și conceptele.)

Considerăm acum un corp (particulă), nu în spațiul intergalactic, ci lăsat liber la o înălțime h deasupra suprafeței pămîntului ($y_0 = h$, $v_0 = 0$). Forța gravitațională $F_G = -Mg$ trage corpul în jos. În timp ce corpul cade către suprafața pămîntului, lucrul mecanic efectuat de către greutate este egal cu cîștigul în energia cinetică a corpului (vezi fig. 5.1):

$$L(\text{al greutății}) = F_G \cdot (y - y_0)$$

sau, la suprafața pămîntului ($y = 0$):

$$L(\text{al greutății}) = (-Mg)(0-h) = Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 \quad (5.7)$$

unde v este viteza corpului la atingerea suprafeței pămîntului. Ecuația (5.7) sugerează că putem spune că la înălțimea h corpul posedă *energia potențială* (capacitatea de a efectua lucru mecanic sau de a cîștiga energie cinetică) egală cu Mgh în raport cu suprafața pămîntului.

Ce se întîmplă cu energia potențială cînd o particulă în repaus pe suprafața pămîntului este ridicată la o înălțime h? Pentru a ridica corpul trebuie să

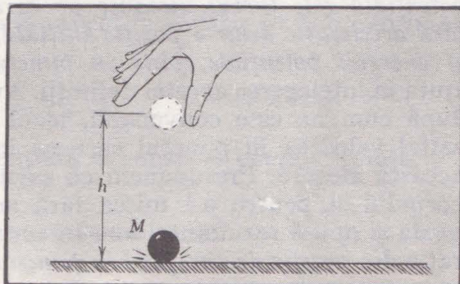


FIG. 5.1. În căderea unui corp aflat inițial în repaus la înălțimea h forța gravitațională efectuează lucrul mecanic Mgh, care este egal cu energia cinetică generată.

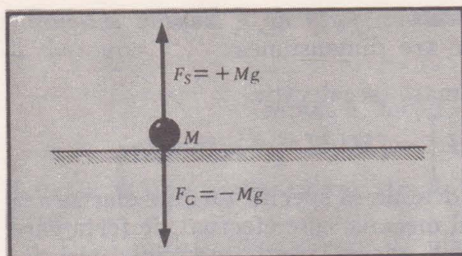


FIG. 5.2. (*a*) Un corp de masă M aflat în repaus pe suprafața pămîntului suportă două forțe egale și de sens contrar: $\mathbf{F}_G$, forța gravitațională atractivă; $\mathbf{F}_s$, forța exercitată asupra lui M de către suprafața pe care se sprijină.

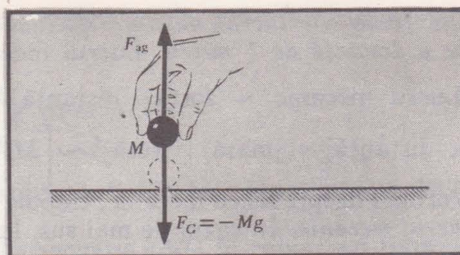


FIG. 5,2. (*b*). Pentru a ridica corpul de masă M cu viteză constantă este necesar să aplicăm o forță $\mathbf{F}_{ag} = Mg$.

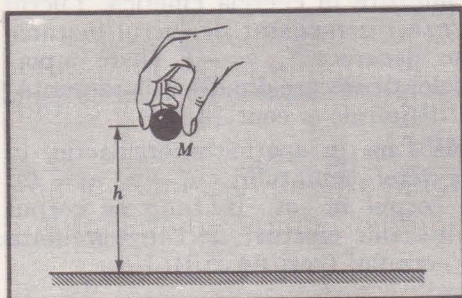


FIG. 5,2. (*c*). Lucrul mecanic consumat pentru a ridica corpul de masă M la înălțimea h este $L = F_{ag} \cdot h = +Mgh$. Energia potențială E_p a masei M a crescut deci cu o cantitate Mgh.

aplicăm o forță îndreptată în sus F_{ag} $(=-F_G)$ asupra corpului. În acest caz, $y_0 = 0$ și $y = h$. Noi efectuăm asupra corpului lucrul mecanic:

$$L(\text{efectuat de noi}) = F_{ag} \cdot (y - y_0) = (Mg)(h) = Mgh \tag{5.8}$$

dînd, în acest fel, corpului energia potențială Mgh pe care, după cum am spus mai înainte, el o are la înălțimea h (vezi fig. 5.2, *a—c*). De notat că numim forța pe care *noi* o exercităm F_{ag}; cu alte cuvinte, noi sîntem identici cu agentul extern. Desigur, este ușor să vorbim despre „noi" și „de către noi" și de aceea acești termeni sînt folosiți în cele ce urmează; dar punctul important de amintit este că agentul extern este introdus conceptual în problemă numai în scopul evaluării energiei potențiale.

În absența forțelor de frecare, putem formula acum o definiție precisă a energiei potențiale a unui corp (particulă) într-un punct particular: *energia potențială este lucrul mecanic pe care îl consumăm pentru a deplasa corpul fără accelerație dintr-o poziție inițială, desemnată în mod arbitrar a fi un zero al energiei potențiale, pînă în punctul de interes*. Cîteva comentarii ne pot ajuta în înțelegerea acestei definiții. Avem libertatea să alegem în mod arbitrar, după cum ne este convenabil, locul în care energia potențială este zero și astfel valoarea în punctul care ne interesează va fi totdeauna raportată la această alegere. Presupunem că există forțe de cîmp care acționează asupra corpului și, pentru a-l mișca fără accelerație, trebuie să exercităm o forță egală și opusă rezultantei lor. În această situație, mișcăm corpul fără accelerație *din poziția de zero pînă în punctul unde vrem să evaluăm energia potențială*.

Lucrul mecanic pe care l-am efectuat este egal cu energia potențială. Deoarece, în absența frecărilor, forța pe care o aplicăm este mereu egală și opusă forțelor cîmpului prezente în problemă, lucrul mecanic pe care îl consumăm este egal cu lucrul mecanic efectuat de către aceste forțe, luat cu semnul minus. Deci, putem la fel de bine să definim energia potențială ca fiind lucrul mecanic efectuat de forțele problemei, forțele cîmpului, atunci cînd mișcă sistemul *din punctul considerat pînă în zeroul arbitrar*. De exemplu, lucrul mecanic efectuat de forța gravitațională [ecuația (5.7)] asupra corpului în cădere este egal cu lucrul mecanic pe care îl efectuăm noi [ecuația (5.8)] împotriva greutății, pentru ridicarea particulei.

În egală măsură este valabilă și definiția energiei potențiale pozitive într-un punct ca fiind energia cinetică generată de forțe în mișcarea liberă a corpului către poziția arbitrară de zero, ca în figura 5.1. Această definiție, astfel formulată, nu se aplică în cazurile în care energia potențială este negativă relativ la zero ; dar, o modificare evidentă a definiției este valabilă. Un exemplu este dat la paginile 183—184.

Încă două idei merită să fie subliniate. Întîi, energia potențială este o funcție doar de poziție, adică de coordonatele corpului sau sistemului [1]. În al doilea rînd, punctul de zero trebuie totdeauna să fie specificat. Numai *variația* energiei potențiale are sens; de exemplu, ea poate fi transformată în energie cinetică sau, invers, se poate crea din energia cinetică. Valoarea absolută a energiei potențiale nu are sens. Deoarece acest lucru este adevărat, alegerea localizării zeroului este arbitrară. În multe cazuri un anumit zero este deosebit de convenabil, de exemplu suprafața pămîntului, o platformă plană, dar alegerea *oricărui alt* zero va da același răspuns la orice problemă fizică.

Dimensiunea lucrului mecanic și a energiei potențiale $[F][L] = [M][L^2]/[T^2]$ este aceeași cu cea a energiei cinetice. Dacă $F_{ag} = 10^{-2}$ N și $h = 1$ m, energia potențială este $10^{-2} \times 1 = 10^{-2}$ J. Notăm energia potențială prin E_p sau U. Dacă în ecuația (5.7) notăm prin v nu viteza după căderea pe o distanță h, ci viteza după căderea pe o distanță $(h-y)$, atunci ecuația analogă ecuației (5.7) este:

$$\frac{1}{2} Mv^2 = Mg(h - y),$$

sau

$$\frac{1}{2} Mv^2 + Mgy = Mgh = E, \qquad (5.9)$$

unde E este o constantă avînd valoarea Mgh. Această situație este ilustrată în figura 5.3. Deoarece E este o constantă, avem în ecuația (5.9) o exprimare a *legii conservării energiei:*

$$E = E_c + E_p =$$

$$= \text{energia cinetică} + \text{energia potențială} = \text{const.} = \text{energia totală}.$$

[1] În probleme mai complicate, studentul poate întîlni funcții utile care să reprezinte energia potențială depinzînd și de alte mărimi.

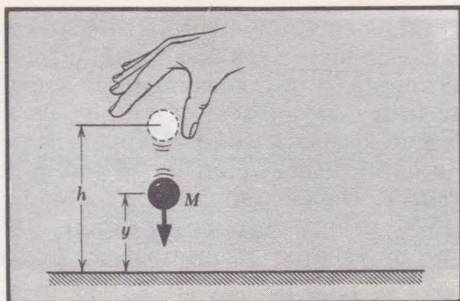


FIG. 5.3. Dacă corpul este lăsat liber, energia potențială E_p descrește, iar energia cinetică E_c crește, dar suma lor rămîne constantă. La înălțimea y: $E_p(y) = Mgy$ și $E_c(y) = \frac{1}{2} M[v(y)]^2 = Mg(h - y)$.

În ecuația (5.9) termenul Mgy este energia potențială, unde am ales $y = 0$ ca zero al energiei potențiale. Simbolul E desemnează energia totală, care este constantă în timp pentru un sistem izolat. Două ilustrări sînt date în figurile 5.4, *a* și *b* și 5.5, *a* și *b*.

Să presupunem că am ales zeroul energiei potențiale la $y = -H$. Atunci avem relația:

$$E' = E_c + E_p = \frac{1}{2} Mv^2 + Mg(y + H) = Mg(h + H),$$

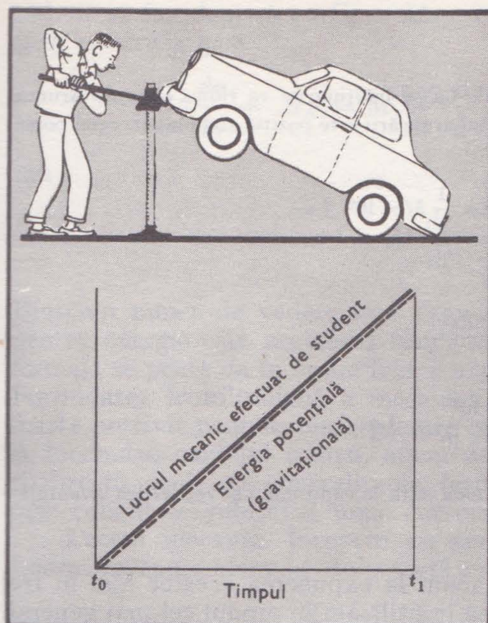
care se reduce la ecuația (5.9) scăzînd termenul MgH din fiecare membru și exemplifică faptul că zeroul energiei potențiale nu afectează răspunsul la problemele fizice.

Uneori este convenabil să numim suma contribuțiilor energiei cinetice și potențiale, $E = E_c + E_p$, *funcția energie*. Contribuția E_c a energiei cinetice este egală cu $\frac{1}{2} Mv^2$. Energia potențială depinde de forța cîmpului care acționează și are proprietatea esențială că $U = E_p = -\int F \mathrm{d}y$, expresie care definește lucrul mecanic atunci cînd forța cîmpului F poate depinde de poziția y. Atunci avem:

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} \tag{5.10}$$

unde F, forța care acționează asupra particulei, rezultă din interacțiile intrinseci ale problemei, cum sînt interacțiile electrice sau gravitaționale și este ceea ce am numit *forța cîmpului* sau *forța problemei*. (În exemplul de mai sus $U = E_p = Mgy$, astfel încît $F = F_G = - Mg$.)

Ecuația (5.10) ilustrează de ce le numim pe acestea forțe *ale cîmpului*. Mărimea U definește un cîmp al energiei potențiale; ea este o funcție scalară de y. Forțele se pot deduce din această funcție de cîmp. Observăm aici că zeroul va apărea în U ca un termen constant, astfel încît atunci cînd forța este obținută din ecuația (5.10), ea este aceeași, independent de constantă.



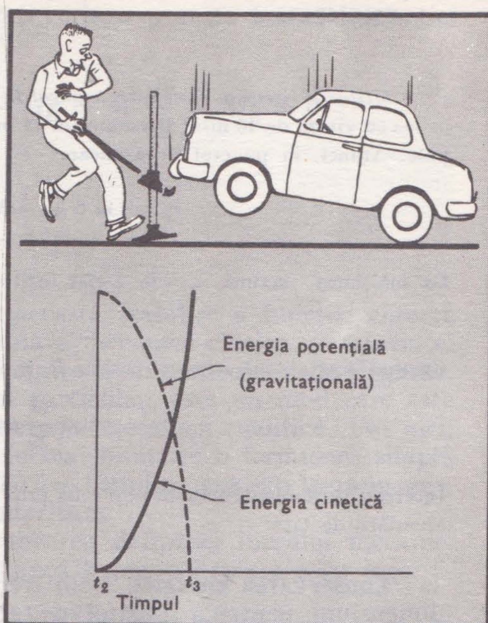
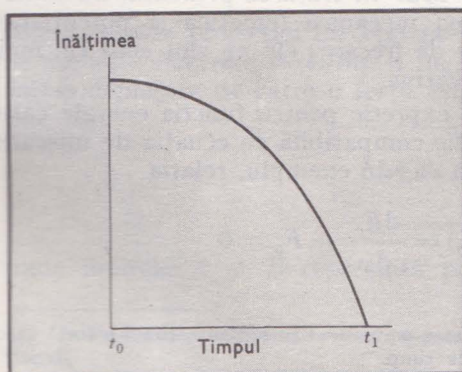


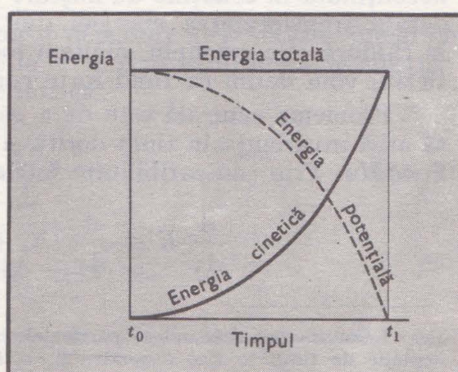
FIG. 5.4. (*a*) Lucrul mecanic consumat de către student cînd ridică cu ajutorul cricului o mașină, pentru a schimba o anvelopă, ca funcție de timp. [Lucrul mecanic efectuat asupra unei mașini mici de 1 000 kg la ridicarea centrului său de masă cu 0,1 m va fi $F \cdot h = Mgh = 10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 10^3$ J.] Lucrul mecanic efectuat apare ca energie potențială gravitațională.

FIG. 5.4. (*b*). Aici cricul a alunecat și mașina cade înapoi. Energia potențială este transformată în energie cinetică. După ce mașina atinge solul, energia cinetică este transformată în căldură în amortizoare, resorturi și anvelope.

FIG. 5.5. (*a*) Înălțimea ca funcție de timp, pentru un corp care a plecat din repaus și se află în cădere spre pămînt.

FIG. 5.5. (*b*) Energia potențială și energia cinetică a corpului în cădere, ca funcții de timp. Energia totală, care este constantă, este suma dintre energia cinetică și energia potențială.





EXEMPLU

Mișcarea liberă a unui corp aruncat în sus. La ce înălțime se va ridica un corp aruncat în sus cu viteza de 10 m/s? Presupunem că nivelul aruncării este poziția zeroului energiei potențiale. Atunci, în punctul de aruncare:

$$E = 0 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M \times 10^2 \text{ J}.$$

La înălțimea maximă, $v = 0$, astfel încît:

$$E = Mgh.$$

Egalînd aceste două expresii pentru E, avem

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \cdot 10} \approx 5 \text{ m}.$$

Încercați să rezolvați această problemă prin metoda dată în capitolul 3 și veți vedea avantajele abordării de față.

Conservarea energiei. Vom trece acum la expunerea acestor idei în trei dimensiuni, pentru a fi astfel în stare să le utilizăm în modul cel mai general. Legea de conservare a energiei afirmă că pentru un sistem de particule cu interacții nedepinzînd explicit [1] de timp, *energia totală a sistemului este constantă*. Acceptăm acest rezultat ca pe un fapt experimental bine stabilit. Mai precis, legea ne spune că există o funcție scalară [cum este funcția $\frac{1}{2}Mv^2 + Mgy$ în ecuația (5.9)], depinzînd de pozițiile și vitezele particulelor constituente, care este invariantă în raport cu schimbarea timpului, cu condiția să nu existe o schimbare explicită a forțelor de interacție în intervalul de timp considerat. De exemplu, masa m sau sarcina elementară e nu trebuie să varieze în timp. În afară de funcția energie, mai există și alte funcții care sînt constante în condițiile specificate aici. (Vom trata alte funcții în capitolul 6, la Conservarea impulsului și a momentului cinetic.) Energia este o constantă scalară a mișcării. Interpretăm expresia *interacție externă* ca incluzînd orice schimbare în legile fizicii sau în valorile constantelor fizice fundamentale (ca g sau e sau m) în intervalul de timp relevant, ca și orice schimbare în condițiile externe, ca de exemplu cîmpurile gravitaționale, electrice sau magnetice. Amintim că legea conservării energiei nu ne dă nici o informație nouă, neconținută în ecuațiile de mișcare $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$. În tratarea prezentă, nu considerăm transformarea energiei din forma mecanică (cinetică și potențială) în căldură. De exemplu, omitem forțele de frecare; ele nu sînt ceea ce, mai tîrziu, vom defini ca fiind forțe conservative.

Problema centrală este de a găsi o expresie pentru funcția energie care să aibă invarianța în timp dorită și să fie compatibilă cu ecuația de mișcare $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$. Prin compatibilitate înțelegem că, de exemplu, relația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}E \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(E_c + E_p) = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}y} - F_y = 0$$

---

[1] Considerăm sistemul cu particulele înghețate permanent în spațiu; atunci o forță care depinde de timp se zice dependentă *explicit* de timp.

trebuie să fie identică cu $F_y = Ma_y$. Puteți verifica aceasta în cazul ecuației (5.9) pentru a găsi

$$Mv\frac{dv}{dy} + Mg = M\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dv}{dy} + Mg = M\frac{dv}{dt} + Mg = 0$$

sau

$$M\frac{dv}{dt} = -Mg.$$

Dintr-un punct de vedere mai avansat, această stabilire a funcției corecte pentru energie este problema fundamentală a mecanicii clasice, și soluția ei formală se poate da în multe feluri, unele dintre ele fiind deosebit de elegante. Formularea hamiltoniană a mecanicii, în particular, este un mod care este foarte potrivit pentru reinterpretare în limbajul mecanicii cuantice. Dar aici, la începutul cursului nostru, avem nevoie mai mult de o formulare simplă și directă decît de generalitatea formulărilor hamiltoniene sau lagrangeene, care constituie subiectul unor cursuri ulterioare [1].

Lucrul mecanic. Începem cu generalizarea definiției lucrului mecanic. Lucrul mecanic efectuat de o forță constantă **F** într-o deplasare $\Delta\mathbf{r}$ este

$$L = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = F\Delta r\cos(\mathbf{F}, \Delta\mathbf{r})$$

în concordanță cu definiția care urmează ecuației (5.6) de mai sus. Să presupunem că **F** nu este constantă, ci este o funcție de poziția **r**. Atunci descompunem drumul în N segmente de dreaptă, astfel încît în cadrul fiecăruia forța $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ este în esență constantă, și scriem următoarea relație:

$$L = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1)\cdot\Delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}(\mathbf{r}_2)\cdot\Delta\mathbf{r}_2 + \ldots + \mathbf{F}(\mathbf{r}_N)\cdot\Delta\mathbf{r}_N = \sum_{j=1}^{N}\mathbf{F}(\mathbf{r}_j)\cdot\Delta\mathbf{r}_j \qquad (5.11)$$

unde simbolul Σ reprezintă suma indicată. Ecuația (5.11) este strict valabilă doar în limita unor deplasări infinitezimale $d\mathbf{r}$, deoarece, în general, o curbă nu poate fi descompusă exact într-un număr finit de segmente și **F** poate să nu fie riguros constantă de-a lungul unui segment.

Limita:

$$\lim_{\Delta\mathbf{r}_j\to 0}\sum_j \mathbf{F}(\mathbf{r}_j)\cdot\Delta\mathbf{r}_j = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$

este integrala proiecției lui $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ pe vectorul deplasare $d\mathbf{r}$. Această integrală se numește *integrala curbilinie* a lui **F** de la A la B. Lucrul mecanic efectuat într-o deplasare de către o forță este definit ca:

$$\boxed{L(A\to B) \equiv \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}} \qquad (5.12)$$

unde limitele A și B reprezintă pozițiile $\mathbf{r}_A$ și $\mathbf{r}_B$.

---

[1] Obținerea ecuațiilor de mișcare lagrangeene necesită cîteva rezultate din calculul variațional.

Energia cinetică. Ne întoarcem acum la particula liberă supusă unor forțe. Vrem să generalizăm ecuația (5.6), pe care o rescriem acum în forma:

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = \mathbf{F}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{y}_0)$$

pentru a include forțe aplicate care variază în direcție și mărime dar sînt cunoscute ca funcții de poziție în regiunea în care are loc mișcarea. Introducînd $\mathbf{F} = M\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ în ecuația (5.12), unde $\mathbf{F}$ este suma vectorială a forțelor, găsim pentru lucrul mecanic efectuat de aceste forțe:

$$L(A \to B) = M\int_A^B \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{5.13}$$

Dar:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \mathbf{v}\,\mathrm{d}t$$

astfel încît:

$$L(A \to B) = M\int_A^B \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{v}\right)\mathrm{d}t, \tag{5.14}$$

unde limitele A și B reprezintă de astă dată momentele de timp t_A și t_B la care particula este în pozițiile desemnate prin A și B. Dar, putem acum rearanja integrandul:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = 2\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{v}$$

astfel încît:

$$2\int_A^B\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{v}\right)\mathrm{d}t = \int_A^B\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2\right)\mathrm{d}t = \int_A^B \mathrm{d}(v^2) = v_B^2 - v_A^2.$$

Introducînd acest rezultat în ecuația (5.14), avem rezultatul important:

$$\boxed{L(A \to B) = \int_A^B \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{1}{2}Mv_B^2 - \frac{1}{2}Mv_A^2} \tag{5.15}$$

pentru o particulă liberă. Aceasta este o generalizare a ecuației (5.6).

Recunoaștem expresia:

$$E_c \equiv \frac{1}{2}Mv^2 \tag{5.16}$$

ca fiind *energia cinetică* definită anterior în ecuația (5.6). Vedem din ecuația (5.15) că definițiile noastre pentru lucrul mecanic și energia cinetică au proprietatea că *lucrul mecanic efectuat asupra unei particule libere de către o forță arbitrară este egal cu variația energiei cinetice a particulei*

$$L(A \to B) = E_{cB} - E_{cA}. \tag{5.17}$$

EXEMPLU

Căderea liberă

(1) Repetăm un exemplu dat mai inainte. Dacă $\hat{\mathbf{y}}$ este un vector normal la suprafața pămîntului și îndreptat în sus, forța gravitațională este $\mathbf{F}_G = -Mg\hat{\mathbf{y}}$, unde g este accelerația gravitațională și are valoarea aproximativă 9,8 m/s². Să calculăm lucrul mecanic efectuat de greutate cînd un corp cu masa de 0,1 kg cade pe o distanță de 0,1 m. Putem lua:

$$\mathbf{r}_A = 0, \quad \mathbf{r}_B = -0{,}1\,\hat{\mathbf{y}}, \quad \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = -0{,}1\,\hat{\mathbf{y}}.$$

Lucrul mecanic efectuat de către forța gravitațională este:

$$L = \mathbf{F}_G \cdot \Delta\mathbf{r} = (-Mg\hat{\mathbf{y}})(-0{,}1\hat{\mathbf{y}}) = (0{,}1)(9{,}8)(0{,}1)(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}}) = 9{,}8 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J}.$$

Notăm că lucrul mecanic L este independent de orice deplasare orizontală Δx. Aici forța gravitațională a jucat rolul forței $\mathbf{F}$.

(2) Dacă în (1) particula are inițial viteza de 1 m/s, care va fi energia cinetică și viteza sa la sfîrșitul căderii de 0,1 m?

Valoarea inițială E_{cA} a energiei cinetice este $\frac{1}{2}(0{,}1)\cdot 1^2 = 5\cdot 10^{-2}$ J; valoarea finală E_{cB}, conform ecuației (5.17), este egală cu lucrul mecanic efectuat asupra particulei de către forța de greutate, plus energia cinetică în A:

$$E_{cB} = L + \frac{1}{2}Mv_A^2 = 9{,}8 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-2} \approx 15 \times 10^{-2};$$

$$v_B^2 = \frac{2\times 15 \times 10^{-2}}{0{,}1} \approx 3$$

$$v_B \approx 1{,}7\ \mathrm{m/s}.$$

Acest rezultat este în concordanță cu ceea ce am fi obținut din aplicarea legii $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$; subliniem, însă, că în metoda de mai sus nu am avut nevoie să specificăm direcția vitezei inițiale de 1 m/s. Dacă viteza inițială ar fi fost în direcția x, ea ar fi rămas constantă și

$$\frac{1}{2}M(v_y^2 + v_x^2)_B - \frac{1}{2}M(v_x^2)_A = 9{,}8 \times 10^{-2}$$

$$v_{yB} \approx \sqrt{2}$$

$$v_B = \sqrt{v_{xB}^2 + v_{yB}^2} = \sqrt{1+2} = 1{,}7\ \mathrm{m/s}.$$

sau, dacă v_y ar fi în direcția y negativă, putem aplica relațiile cunoscute pentru corpurile în cădere

$$h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2;$$

$$v - v_0 = gt;$$

$$h = v_0\frac{v - v_0}{g} + \frac{1}{2}g\left(\frac{v - v_0}{g}\right)^2;$$

$$2gh = v^2 - v_0^2.$$

De aici putem obține din nou aceeași relație între lucru mecanic și energie

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv_B^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2, \text{ deoarece } v_0 = v_A.$$

Acesta este un exemplu care ilustrează faptul că rezultatele obținute din legea de conservare trebuie să fie compatibile cu ecuațiile de mișcare. Aici, folosind conservarea energiei, am obținut același rezultat ca și prin folosirea ecuației $v^2 - v_0^2 = 2gh$, dedusă din ecuația de mișcare $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ (conform capitolului 3).

Energia potențială. Am menționat (pagina 163) că numai *diferențele* energiilor potențiale au sens. Definiția noastră pentru energia potențială indică faptul că diferența dintre energia potențială în punctul B și cea în punctul A este lucrul mecanic pe care *noi* trebuie să îl facem pentru a mișca corpul fără accelerație din A în B, astfel încît

$$\boxed{E_p(\mathbf{r}_B) - E_p(\mathbf{r}_A) = L(A \longrightarrow B) = \int_A^B \mathbf{F}_{ag} \cdot d\mathbf{r}.} \quad (5.18)$$

Diferențele pot fi pozitive sau negative: adică, dacă consumăm un lucru mecanic împotriva forțelor cîmpului, energia potențială crește $E_p(\mathbf{r}_B) > E_p(\mathbf{r}_A)$; dacă lucrul mecanic este cheltuit împotriva noastră de către forțele cîmpului (noi facem un lucru mecanic negativ), energia potențială se micșorează. Se poate vedea că, dacă energia potențială crește mergînd de la A la B, energia cinetică a unei particule libere mișcîndu-se în această direcție va descrește (desigur, cînd F_{ag} nu acționează), în timp ce, dacă energia potențială descrește, energia cinetică va crește. Dacă acum precizăm $E_p(A) = 0$ în ecuația (5.18), atunci valoarea lui $E_p(B)$ este unic definită, cu condiția ca forțele să fie conservative (vezi pagina 177).

EXEMPLU

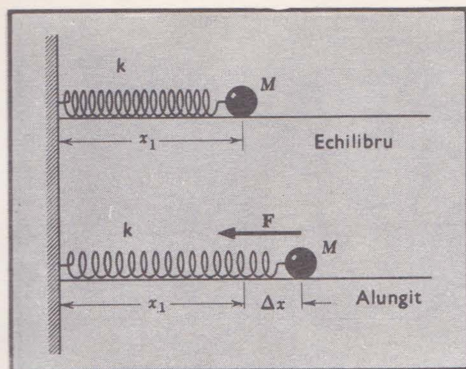
Forța elastică. Transformarea energiei cinetice în energie potențială și reciproc. O particulă este supusă unei *forțe elastice* în direcția x. Forța elastică este o forță direct proporțională cu deplasarea (elongația) măsurată dintr-un anumit punct fix și avînd direcția și sensul prin care tinde să reducă această deplasare (vezi fig. 5.6, $a-c$). Dacă luăm punctul fix ca origine

$$\mathbf{F} = -kx\hat{\mathbf{x}} \text{ sau } F_x = -kx, \quad (5.19)$$

unde k este o constantă pozitivă, numită *constanta elastică*. Această relație reprezintă *legea lui Hooke*. Pentru deplasări suficient de mici, o asemenea forță poate fi produsă de un resort alungit sau comprimat. Pentru deplasările elastice mari trebuie să adăugăm la ecuația (5.19) termeni conținînd puteri superioare ale lui x. Semnul forței este astfel încît particula este mereu atrasă către originea $x = 0$.

(1) Considerăm o particulă atașată resortului și acționăm cu o forță care duce particula dintr-un punct x_1 in alt punct x_2. Care este lucrul mecanic pe care îl consumăm în această deplasare?

Aici forța aplicată particulei este o funcție de poziție. Pentru a calcula lucrul mecanic pe care îl efectuăm, folosim definiția din ecuația (5.12) și avem, folosind $\mathbf{F}_{ag} = -\mathbf{F} = kx\hat{\mathbf{x}}$:



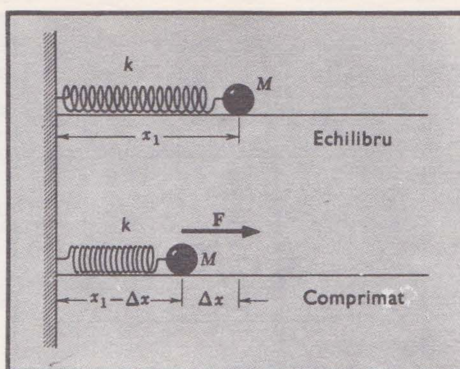


FIG. 5.6. (*a*) Un resort fără masă este legat de un corp de masă M. Dacă resortul este alungit cu o mică cantitate Δx, el exercită asupra corpului M o forță elastică $F = -k\Delta x$ în sensul arătat. Aici k desemnează constanta elastică a resortului.

FIG. 5.6. (*b*) Dacă resortul este comprimat cu o cantitate $-\Delta x$, el exercită asupra lui M o forță elastică egală cu $-k(-\Delta x) = k\Delta x$, după cum se arată.

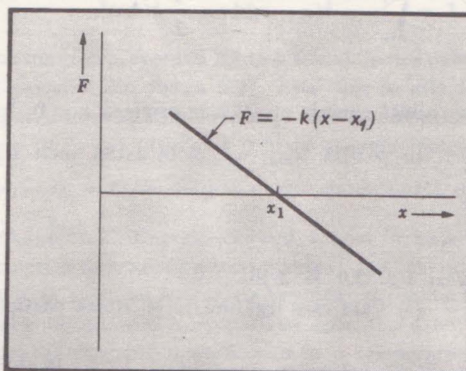


FIG. 5.6. (*c*) Pentru o deplasare mică din x_1, forța elastică este proporțională cu deplasarea.

$$L(x_1 - x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{F}_{ag} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = k\int_{x_1}^{x_2} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,k(x_2^2 - x_1^2).$$

Dacă alegem punctul $x_1 = 0$, poziția de echilibru, ca zero al energiei potențiale, atunci:

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}\,kx^2.} \tag{5,20}$$

Acesta este un rezultat celebru: energia potențială legată de o forță elastică este proporțională cu pătratul deplasării (vezi fig. 5.7 și 5.8).

(2) Dacă particula de masă M este lăsată liberă, în repaus în poziția x_{max}, care este energia sa cinetică în momentul în care ajunge în origine?

Obținem răspunsul, direct din ecuațiile (5.15) și (5.20): lucrul mecanic efectuat de ***resort*** cînd particula se mișcă de la x_{max} pînă în origine este:

$$L(x_{max} \longrightarrow 0) = \frac{1}{2}\,Mv_1^2,$$

unde am folosit faptul că în poziția x_{max} viteza $v = 0$; particula este presupusă a fi în repaus acolo. În origine viteza este v_1. Astfel, cantitatea:

$$\frac{1}{2}\,kx_{max}^2 = \frac{1}{2}\,Mv_1^2$$

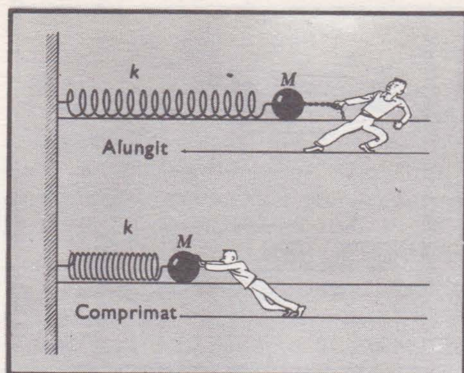


FIG. 5.7. Pentru a alungi (sau comprima) resortul trebuie să exercităm o forță egală și de sens contrar forței elastice. La deplasarea resortului cu o cantitate Δx din poziția de echilibru x_1, efectuăm lucrul mecanic

$$L = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} k(x - x_1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, k(\Delta x)^2.$$

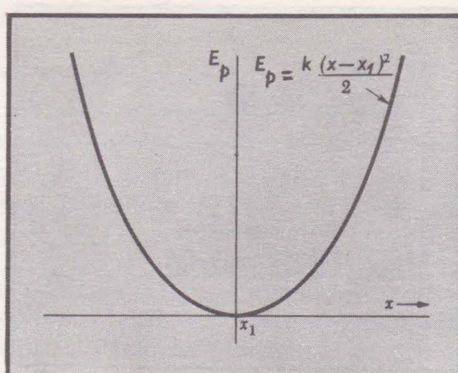


FIG. 5.8. Prin efectuarea acestui lucru mecanic, energia potențială a sistemului resort-masă crește. Un sistem resort-masă deplasat cu $\Delta x = x - x_1$ față de poziția de echilibru are energia potențială $E_p = \frac{1}{2}\, k(\Delta x)^2 =$

$$= \frac{1}{2}\, k(x - x_1)^2.$$

reprezintă energia cinetică în originea $x = 0$. În mod alternativ, putem folosi conservarea energiei. În poziția x_{max}, $E_c = 0$, astfel încît $E_p = \frac{1}{2}\, kx_{max}^2 = E$. Atunci, în punctul $x = 0$:

$$\frac{1}{2}\, Mv_1^2 = E = \frac{1}{2}\, kx_{max}^2, \tag{5.21}$$

(vezi fig. 5.9 și 5.10).

(3) Care este legătura între viteza particulei în origine și deplasarea maximă x_{max}?

$$v_1^2 = \frac{k}{M}\, x_{max}^2$$

sau

$$v_1 = \pm \sqrt{\frac{k}{M}}\, x_{max} \tag{5.22}$$

FIG. 5.9. Dacă sistemul resort-masă este alungit cu Δx și apoi lăsat liber, energia potențială E_p va descrește inițial iar energia cinetică, E_c, va crește.

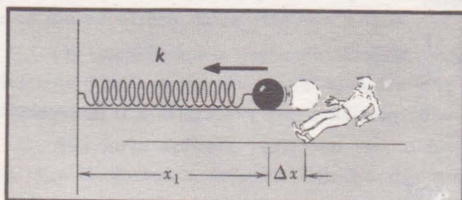
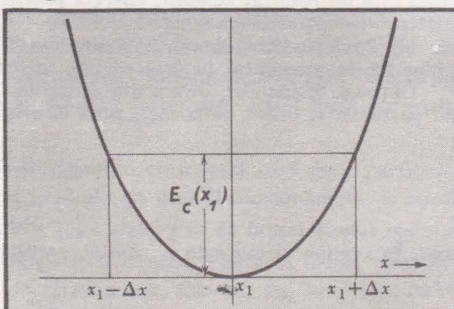


FIG. 5.10. La $x = x_1$, $E_p = 0$ și $E_c\,(x_1) = \frac{1}{2}\, k(\Delta x)^2$ după cum este indicat.



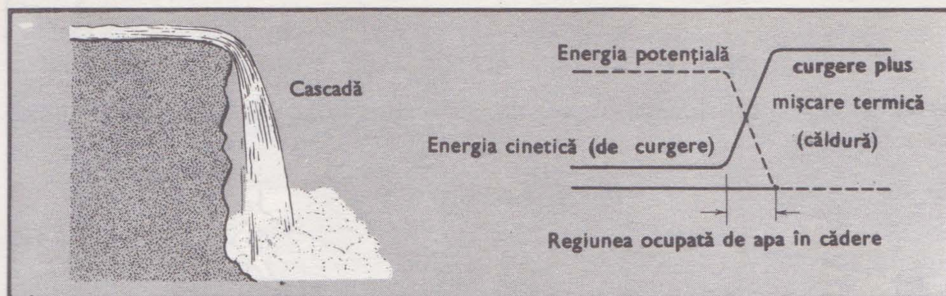


FIG. 5.11. Cascada ca ilustrare a transformării între formele de energie.

EXEMPLU

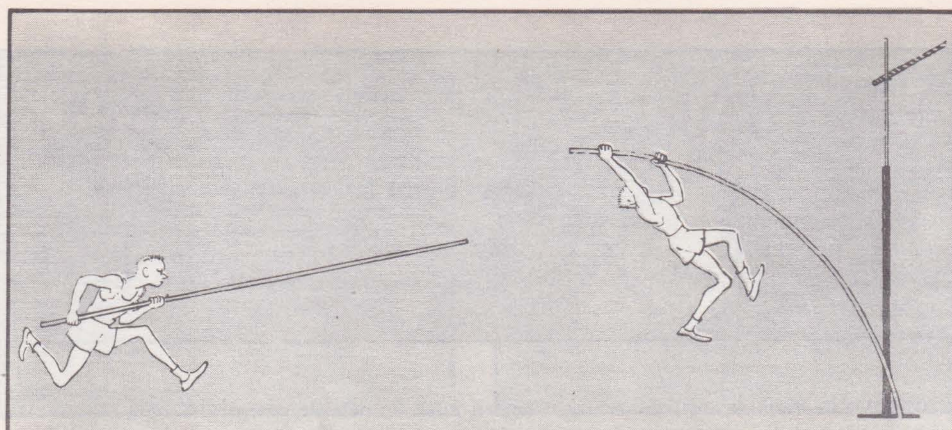
Transformarea energiei într-o cascadă. Transformarea energiei dintr-o formă (potențială) în altă formă (cinetică) este ilustrată în cazul cascadei din figura 5.11. Apa care se află în partea de sus a cascadei are energie potențială gravitațională care în cădere este transformată în energie cinetică. O masă M de apă în cădere de la o înălțime h pierde energia potențială Mgh și cîștigă energia cinetică $\frac{1}{2}M(v^2 - v_0^2) = Mgh$. (Viteza v este determinată de această ecuație dacă viteza inițială v_0 a apei este cunoscută.) Energia cinetică a apei în cădere poate fi utilizată într-o hidrocentrală ca energie cinetică rotațională a unei turbine; sau, energia cinetică a apei în cădere se poate transforma la baza cascadei în energie termică sau căldură. Energia termică este pur și simplu energia mișcării dezordonate a moleculelor apei. (La o temperatură mai inaltă, mișcarea moleculară dezordonată este mai intensă decît la o temperatură mai joasă.)

EXEMPLU

Transformarea energiei în săritura cu prăjina. Un exemplu destul de amuzant de transformare a energiei între diversele ei forme – energie cinetică, energie potențială a prăjinii îndoită elastic și energie potențială datorită ridicării – este oferit de șirul de imagini din figura 5.12 și de explicațiile care le însoțesc.

FORȚE CONSERVATIVE

O forță se numește *conservativă* dacă lucrul mecanic $L(A \to B)$ efectuat de forță cînd deplasează o particulă de la A la B este independent de drumul pe care este deplasată particula între A și B. Dacă $L(A \to B)$ din relația



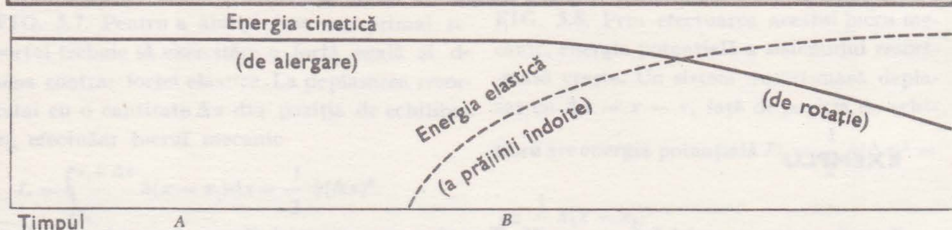
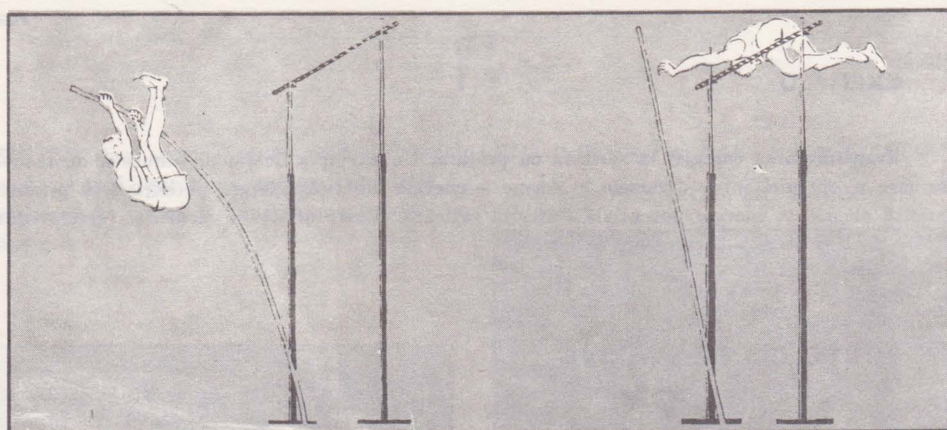
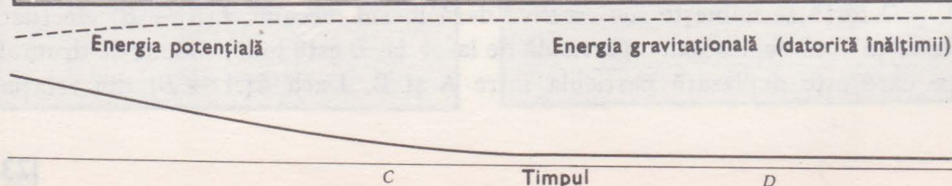


FIG. 5.12. Mișcarea săritorului cu prăjina. În *A* energia sa este în întregime cinetică, legată de viteza de alergare. În *B* săritorul pune capătul anterior al prăjinii pe sol și (în special cu noile prăjini din fibre de sticlă) inmagazinează energie potențială elastică în prăjină prin îndoirea acesteia. În *C* el se ridică în aer. El mai are încă o energie cinetică considerabilă, asociată acum cu viteza sa de rotație în jurul capătului inferior al prăjinii. Are, de asemenea, energie potențială atît de natură gravitațională cît și din restul de energie elastică a prăjinii. În *D*, cînd trece peste ștachetă, energia sa cinetică este mică deoarece se mișcă lent; energia potențială (gravitațională) este mare. Energia totală nu este mereu constantă în săritura cu prăjina din cauza frecărilor (externe și musculare) și din cauză că, pentru îndoirea prăjinii, sportivul efectuează lucru mecanic. Ultima componentă a lucrului mecanic implică lucru mecanic și energie „internă" a corpului care nu au fost considerate în alergare sau ridicarea omului de la sol





(5.15) are o valoare diferită cînd se trece de la un drum la altul (ceea ce se întîmplă dacă ar fi prezentă frecarea), importanța relației (5.15) ar fi puternic diminuată. Admițînd că integrala $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum, avem:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

sau

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

unde $\oint$ reprezintă integrala luată de-a lungul unui drum închis, de exemplu, pornind din A, mergînd la B și apoi revenind la A pe un alt drum.

Putem vedea ușor că o forță centrală este conservativă. O *forță centrală* exercitată de o particulă asupra alteia este o forță a cărei mărime depinde numai de distanța dintre particule și a cărei direcție este de-a lungul dreptei care unește particulele. În figura 5.13 o forță centrală este dirijată din (sau către) centrul din punctul O. Două drumuri (notate 1 și 2) leagă punctele A și B după cum este indicat. Curbele trasate cu linii întrerupte sînt arce de cerc cu centrul în O. Să considerăm cantitățile $\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1$ și $\mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2$ evaluate pe segmentele care leagă aceste cercuri. (Putem considera la fel de bine produsul $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ca fiind proiecția lui $\mathbf{F}$ pe $d\mathbf{r}$ sau a lui $d\mathbf{r}$ pe $\mathbf{F}$.) Mărimile F_1 și F_2 sînt egale pe cele 2 segmente, deoarece acestea se află la distanțe egale de punctul O; proiecțiile $dr \cos\theta$ ale segmentelor de drum pe vectorii respectivi $\mathbf{F}$ sînt egale, deoarece, după cum putem vedea, distanța dintre cercuri, măsurată de-a lungul direcției lui $\mathbf{F}_1$, este egală cu distanța măsurată de-a lungul lui $\mathbf{F}_2$. Prin urmare, pe segmentele de drum considerate, avem:

$$\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2.$$

Dar un argument identic se poate utiliza în mod succesiv pentru orice segmente de drum comparabile, astfel încît

$$\underset{\text{(Drumul 1)}}{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}} = \underset{\text{(Drumul 2)}}{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}} \cdot$$

Pentru cîmpul gravitațional constant, demonstrația este dată în figura 5.14.

Forțele care au proprietatea că lucrul mecanic:

$$L(A \to B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{5.23}$$

este independent de drum se numesc forțe *conservative*. Pentru forțele conservative lucrul mecanic efectuat de-a lungul unui drum închis este *zero*. Să presupunem că forța depinde de viteza cu care este parcurs drumul. (Forța exercitată asupra unei particule încărcate într-un cîmp magnetic, de exemplu, depinde de viteză.) Poate o astfel de forță să fie conservativă? Se întîmplă că forțele fundamentale importante dependente de viteză sînt conservative, deoarece direcția lor este *perpendiculară* pe direcția mișcării particulei, astfel

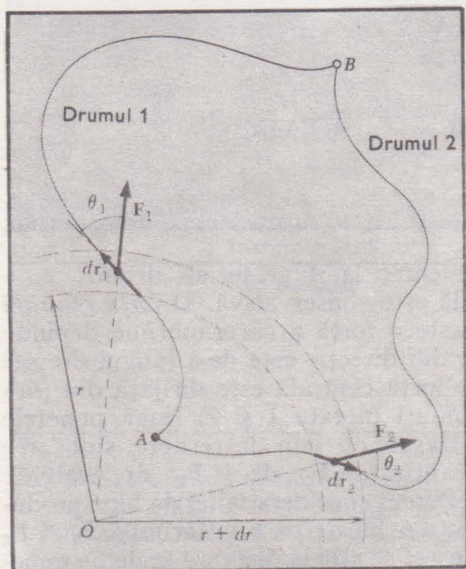


FIG. 5.13. Diagramă ilustrînd evaluarea integralei $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ pentru două drumuri, în cazul în care **F** este o forță centrală.

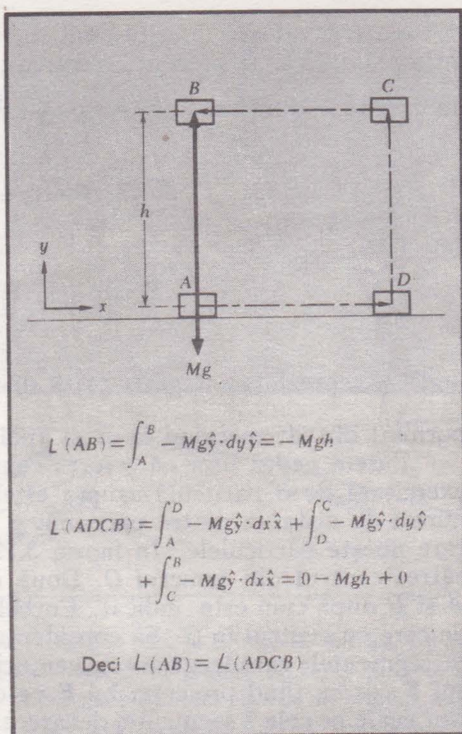


FIG. 5.14. Figură ilustrînd integrala $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ pe două drumuri diferite, în cazul unui cîmp gravitațional constant.

încît produsul $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Putem constata acest lucru pentru forța Lorentz (capitolul 3), care este proporțională cu $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Forțele de frecare nu sînt cu adevărat forțe fundamentale: ele sînt în schimb dependente de viteză și nu sînt forțe conservative.

Toată analiza noastră ia în considerare doar forțe între două corpuri. Aceasta este o presupunere importantă; este posibil ca unii dintre studenții acestui curs să fie solicitați în cariera lor științifică să atace problema forțelor între mai multe corpuri. O discuție a ceea ce este implicat în presupunerea forțelor între două corpuri este dată în volumul 2 (§ 1.6).

Se știe experimental că $L(A \to B)$ este independent de drum pentru forțele gravitaționale și electrice. Acest rezultat pentru interacțiile între particulele elementare este obținut din experiențe de împrăștiere; pentru forțele gravitaționale rezultatul este dedus din precizia cu care sînt calculate mișcările Lunii și ale planetelor, după cum se discută în notele istorice de la sfîrșitul acestui capitol. Știm de asemenea că Pămîntul a efectuat aproximativ 4×10^9 orbite complete în jurul Soarelui fără nici o schimbare importantă a distanței sale pînă la Soare, după cum se apreciază din probe geologice asupra temperaturii la suprafața Pămîntului. Mărturiile geologice relevante se extind în trecut cu aproximativ 10^9 ani și nu pot fi considerate în întregime decisive din cauza numeroșilor factori, incluzînd energia furnizată de Soare, care afectează temperatura, totuși observația este sugestivă. (Alte exemple sînt discutate în notele istorice.)

Sînt necesare cîteva precizări în legătură cu forțele centrale în raport cu cele necentrale. Cînd considerăm interacția dintre două particule există două posibilități: sau particulele nu au alte coordonate în afara pozițiilor lor, sau una ori amîndouă particulele admit o axă care este semnificativă din punct de vedere fizic. În primul caz este *doar* posibil să existe o forță centrală, pe cînd în cel de-al doilea specificarea că particula se mișcă de la A la B este incompletă — trebuie să precizăm, de asemenea, că axa își păstrează aceeași direcție în raport cu un anumit reper. Un magnet în formă de bară are o axă semnificativă din punct de vedere fizic; dacă deplasăm magnetul de-a lungul unui drum închis într-un cîmp magnetic uniform, lucrul mecanic efectuat asupra magnetului poate fi nul sau diferit de zero. Anume, dacă magnetul este adus în final în aceeași poziție și are *aceeași orientare* ca cea din care a plecat, nu se efectuează nici un lucru mecanic. Dacă localizarea este aceeași dar orientarea este diferită, s-a consumat un lucru mecanic nenul. (Lucrul mecanic poate avea semnul plus sau minus.)

Este ușor de văzut că frecarea nu este o forță conservativă. Ea este totdeauna opusă sensului mișcării și astfel lucrul mecanic efectuat de o forță de frecare constantă într-o mișcare de la A la B, pe o distanță d, va fi $F_f \cdot d$; dacă mișcarea este de la B la A, lucrul mecanic va fi tot $F_f \cdot d$. Dar, dacă frecarea este o manifestare a forțelor fundamentale și acestea sînt conservative, cum se explică faptul că frecarea nu este conservativă? Aceasta este o chestiune care depinde de cît de detaliată este analiza noastră. Dacă analizăm toată mișcarea la nivelul atomic al forțelor fundamentale, vom găsi „mișcarea" conservativă; dar dacă privim o parte din mișcare ca producînd căldură, care nu este utilă în sens mecanic, vom considera că a acționat frecarea. Identitatea dintre căldură și energia cinetică dezordonată este tratată în volumul 5. În capitolul 4, în discuția privind conservarea impulsului, am considerat ciocnirea neelastică a două particule. Energia cinetică nu s-a conservat; dar suma dintre energia cinetică și energia de excitare internă pentru cele două particule a fost numită *energie totală* și s-a presupus că ea se conservă, în concordanță cu toate experiențele cunoscute.

Ne întoarcem acum la discuția noastră privind energia potențială. În discuția referitoare la forțele conservative am subliniat (pagina 170) că energia potențială într-un punct poate fi definită în mod unic și, în consecință util, numai în cazul forțelor conservative. Am văzut cum se calculează energia potențială cunoscînd forțele care acționează într-o problemă: alegem un zero și apoi calculăm lucrul mecanic pe care îl efectuăm noi (sau agentul) cînd deplasăm sistemul lent, fără modificarea energiei cinetice, din zero pînă în poziția dorită. Deoarece forța $\mathbf{F}_{ag}$ este mereu egală și de semn contrar cu forța $\mathbf{F}$ a problemei, vedem că știind forțele problemei sîntem capabili să calculăm energia potențială:

$$\int_A^r \mathbf{F}_{ag} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_A^r \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{r} = E_p(\mathbf{r}) - E_p(A) = E_p(\mathbf{r}), \qquad (5.24)$$

presupunînd $E_p(A) = 0$.

Dar, cunoașterea energiei potențiale ne permite că calculăm forțele? Răspunsul este afirmativ. Într-o dimensiune avem:

$$U(x) - U(A) = E_p(x) - E_p(A) = -\int_A^x F \mathrm{d}x \qquad (5.25)$$

de unde, prin derivare în raport cu x, obţinem:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dE_p}{dx} = -F. \tag{5.26}$$

Acest rezultat poate fi verificat prin introducerea relaţiei (5.26) în (5.25):

$$-\int_A^x F dx = \int_A^x \frac{dE_p}{dx} dx = \int_A^x dE_p = E_p(x) - E_p(A). \tag{5.27}$$

Ecuaţia (5.26) este o ilustrare a rezultatului general că forţa este dată de viteza de variaţie în spaţiu a energiei potenţiale luată cu semn schimbat. În trei dimensiuni expresia analoagă ecuaţiei (5.26) este [1]

$$\boxed{\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial E_p}{\partial x} - \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial E_p}{\partial y} - \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial E_p}{\partial z} \equiv -\operatorname{grad} E_p} \tag{5.28}$$

unde „grad" denotă operatorul gradient şi este definit ca

$$\operatorname{grad} \equiv \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{în coordonate carteziene}$$

$$\operatorname{grad} \equiv \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{în coordonate polare în plan.} \tag{5.29}$$

Proprietăţile generale ale operatorului gradient sînt prezentate în volumul 2. Se arată acolo că gradientul unui scalar este un vector a cărui direcţie este cea corespunzînd vitezei maxime de variaţie spaţială a scalarului şi a cărui mărime este egală cu această viteză de variaţie. Gradientul unui scalar U este scris ca grad U sau ∇U. Operatorul ∇ se citeşte „nabla" iar ∇U se citeşte „nabla U".

Aplicarea acestor idei la cazul $dU/dx = 0$, al unei poziţii de echilibru, precum şi la stabilitatea acestui echilibru este arătată în figura 5.15, *a-c*.

Grafice simple ale energiei potenţiale ca funcţie de o coordonată x pot fi adesea foarte instructive. Figurile 5.16, *a-c* oferă astfel de exemple; ele folosesc faptul că energia cinetică E_c nu poate fi negativă. Care ar fi fost mişcarea dacă energia ar fi fost E' în figura 5.16, *b*? Formularea dată de noi legii conservării energiei

energia cinetică + energia potenţială = const.

va fi generalizată în capitolul 12, pentru a include procese în care toată masa, sau o parte din ea, este convertită în energie. Asemenea procese intervin în cea mai mare parte a reacţiilor nucleare. Generalizarea necesară este o consecinţă naturală a teoriei restrînse a relativităţii.

---

[1] Simbolul $\partial/\partial x$ indică derivarea parţială şi implică faptul că y şi z sînt consideraţi constanţi în derivare. Aceeaşi semnificaţie se aplică şi pentru $\partial/\partial y$ şi $\partial/\partial z$. Vezi, de exemplu, pagina 182.

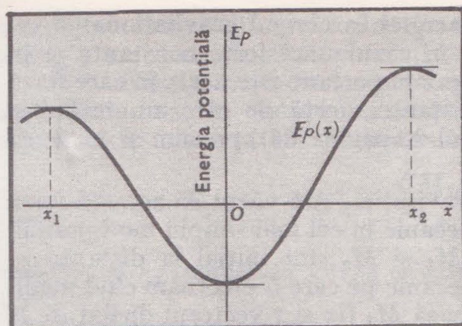


FIG. 5.15. (*a*). O funcție de energie potențială unidimensională $U(x) = E_p(x)$, reprezentată ca funcție de x. În punctele $x = x_1$, O și x_2 avem $dU/dx = 0$ și astfel în aceste puncte forța F este zero. Acestea sînt, în consecință, poziții de echilibru, nu neapărat stabil.

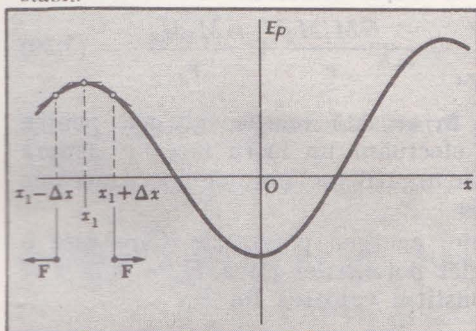


FIG. 5.15. (*b*) În punctul $x_1 - \Delta x$, $dU/dx > 0$ astfel încît $F < 0$ (spre stînga). În $x_1 + \Delta x$, $dU/dx < 0$, astfel încît $F > 0$ (spre dreapta). Deci o mică deplasare din x, are ca rezultat apariția unei forțe care tinde să crească această deplasare, astfel că x_1 este o poziție de echilibru *instabil*.

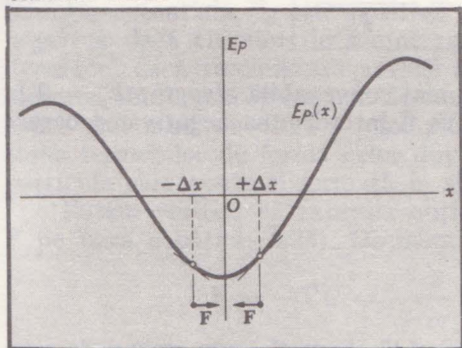


FIG. 5.15. (*c*) În $x = -\Delta x$, $dU/dx < 0$ și F este spre dreapta. În $x = +\Delta x$, $dU/dx > 0$ astfel încît F este spre stînga. Astfel $x = 0$ este o poziție de echilibru ***stabil***. Ce se poate spune despre x_2?

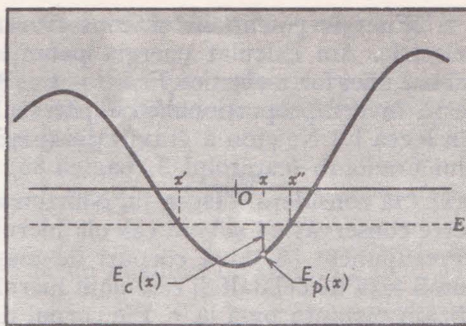


FIG. 5.16. (*a*). Energia totală $E = E_c + E_p = \text{const}$. Astfel, la o energie dată E, mișcarea poate avea loc doar intre x' și x'', punctele „de întoarcere". Între aceste puncte $E_c = Mv^2/2 = E - E_p \geq 0$.

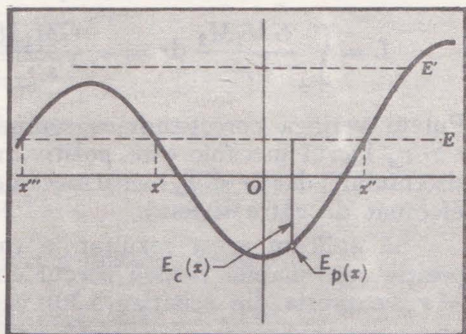


FIG. 5.16. (*b*) Dacă E crește, punctele de întoarcere x' și x'' sînt, în general, deplasate. Acum $E_c(x) = E - E_p(x)$ este mai mare. Acum mișcarea poate avea loc și la stînga lui x''', dacă a început din x'''.

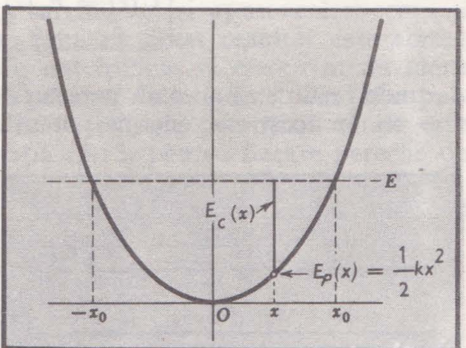


FIG. 5.16. (*c*) Oscilatorul armonic simplu este în echilibru stabil la $x = 0$. La $x = \pm x_0$, $E_c = 0$.

Energia potențială și conservarea energiei în cîmpul gravitațional și cel electric. Am calculat energia potențială în cazul unei forțe constante și în cel al unei forțe elastice $F = -kx$. Alt caz important este acela în care forța este invers proporțională cu pătratul distanței, forță pe care am întîlnit-o în legea lui Newton a gravitației (capitolul 3, pagina 84), precum și în legea lui Coulomb (capitolul 3, pagina 86).

Să considerăm legea lui Newton a gravitației. Am văzut că această forță este conservativă și vom calcula lucrul mecanic în cel mai simplu mod posibil. Presupunem că două corpuri de mase M_1 și M_2 sînt inițial la distanța r_A unul față de celălalt și calculăm lucrul mecanic pe care *îl* efectuăm cînd modificăm distanța pînă la r. Fie corpul de masă M_1 fix și $\mathbf{r}$ vectorul dirijat de la M_1 la M_2, ca în figura 5.17. Dacă mișcăm M_2 la o distanță $\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r}$, ca în figura 5.17, trebuie să consumăm lucrul mecanic:

$$\mathrm{d}L = \mathbf{F}_{ag} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{GM_1M_2}{r^3}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{GM_1M_2}{r^2}\mathrm{d}r \cdot$$

Astfel lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea totală va fi:

$$L = \int_{r_A}^{r} \frac{GM_1M_2}{r^2}\mathrm{d}r = -\frac{GM_1M_2}{r}\bigg|_{r_A}^{r} = -\frac{GM_1M_2}{r} + \frac{GM_1M_2}{r_A}. \qquad (5.30)$$

Putem verifica corectitudinea semnelor în această relație, întrucît pentru $r > r_A$ lucrul mecanic este pozitiv (noi efectuăm un lucru mecanic asupra sistemului); dacă $r < r_A$ lucrul mecanic este negativ (noi obținem lucru mecanic efectuat de către sistem).

Să aplicăm acest rezultat la calculul energiei potențiale. Care este o poziție convenabilă pentru zeroul energiei potențiale? Dacă $E_p = 0$ la $r = r_A$, expresia din ecuația (5.30) va constitui valoarea lui E_p:

$$E_p(r) = -\frac{GM_1M_2}{r} + \frac{GM_1M_2}{r_A}.$$

Observăm acum că $r_A = \infty$ face ca ultimul termen să se anuleze, astfel încît:

$$\boxed{U(r) = E_p(r) = -\frac{GM_1M_2}{r}.} \qquad (5.31)$$

de unde rezultă că aceasta pare a fi cea mai convenabilă alegere: $E_p = 0$ la $r = \infty$. În acest caz, energia potențială va fi întotdeauna negativă, deoarece

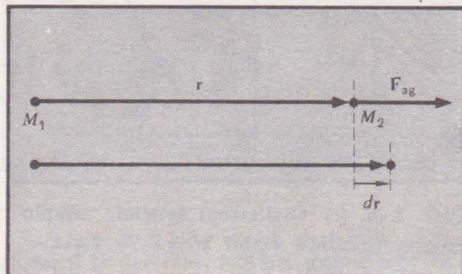


FIG. 5.17. Forța $\mathbf{F}_{ag}$ este egală și de semn contrar cu forța de atracție gravitațională și la o deplasare $\mathrm{d}\mathbf{r}$ efectuează lucrul mecanic $\mathbf{F}_{ag} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = F_{ag} \cdot \mathrm{d}r$.

noi obținem mereu lucru mecanic din partea sistemului dacă lăsăm masele să se apropie lent una de alta, pornind de la infinit.

Putem scrie acum conservarea energiei mecanice pentru un corp de masă M_1 mișcîndu-se în cîmpul gravitațional al unui corp de masă $M(M \gg M_1$, astfel încît mișcarea lui M poate fi neglijată):

$$E_p = \frac{1}{2} M_1 v_A^2 - \frac{GM_1M}{r_A} = \frac{1}{2} M_1 v_B^2 - \frac{GM_1M}{r_B} \tag{5.32}$$

unde v_A și r_A reprezintă viteza și distanța la un moment de timp, v_B și r_B la altul.

Ne întoarcem acum la cazul forței electrice:

$$\mathbf{F} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

pentru două sarcini q_1 și q_2. Fie sarcina q_1 fixă. Calculăm lucrul mecanic pe care îl efectuăm pentru a mișca sarcina q_2 lent de la r_A la r. Forța pe care trebuie s-o exercităm este:

$$\mathbf{F}_{ag} = -\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r}\,.$$

Lucrul mecanic infinitezimal pentru o deplasare $d\mathbf{r}$ este:

$$dL = \mathbf{F}_{ag}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

deoarece $\mathbf{r}$ și $d\mathbf{r}$ sînt paralele. Atunci, lucrul mecanic total este:

$$L = \int_{r_A}^{r} -\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_{r_A}^{r} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_A}\,.$$

Din nou este convenabil să punem $E_p = 0$ la $r = \infty$, astfel încît:

$$\boxed{U = E_p = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\,.} \tag{5.33}$$

Energia potențială E_p este pozitivă dacă sarcinile q_1 și q_2 au același semn și negativă dacă ele sînt de semne opuse. Știm că acest rezultat este corect deoarece, dacă sarcinile au același semn, noi trebuie să efectuăm un lucru mecanic cînd le apropiem una de cealaltă pornind de la infinit. Cînd sînt prezente mai mult de două sarcini punctiforme, energia potențială totală este suma termenilor de forma celor din ecuația (5.33) pentru fiecare pereche de particule care poate fi formată în sistem.

Putem verifica că expresia obținută pentru U este corectă calculînd $\mathbf{F}$ pe baza ecuației (5.28). Obținem pentru forța electrică:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}\right)\hat{\mathbf{r}} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

și pentru forța gravitațională:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{GM_1M_2}{r}\right)\hat{\mathbf{r}} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

Dacă scriem:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

putem calcula pe F_x, F_y și F_z:

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{GM_1M_2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = -\frac{GM_1M_2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{GM_1M_2x}{r^3}$$

sau, în mod similar, pentru cîmpul electric:

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{q_1q_2x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q_1q_2x}{4\pi\varepsilon_0r^3}.$$

Potențialul electrostatic $V(\mathbf{r})$ în punctul $\mathbf{r}$ este definit ca *energia potențială raportată la unitatea de sarcină pozitivă* în cîmpul de forțe al tuturor celorlalte sarcini:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{q} = \int_r^\infty \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}. \qquad (5.34)$$

Aceasta este o mărime foarte utilă. De notat că potențialul este un scalar. Este foarte important să distingem V de energia potențială $E_p(U)$. Trebuie să evitați folosirea, în activitatea experimentală, a aceluiași simbol V pentru potențialul electrostatic ca și pentru energia potențială.

Dacă știm $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ în orice punct, putem găsi potențialul electrostatic $V(\mathbf{r})$ în orice punct. [Aceasta presupune că ne-am hotărît unde să alegem un zero pentru $V(\mathbf{r})$.] Este convenabil să lucrăm cu potențialul $V(\mathbf{r})$, deoarece este un scalar, în timp ce $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ este un vector.

Căderea de potențial sau *diferența de potențial* U între două puncte $\mathbf{r}_2$ și $\mathbf{r}_1$ este definită ca:

$$U = \Delta V = V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1). \qquad (5.35)$$

Aceasta reprezintă variația energiei potențiale electrostatice a unei sarcini pozitive egală cu unitatea cînd este deplasată din punctul $\mathbf{r}_1$ în punctul $\mathbf{r}_2$. Astfel, pentru o sarcină q transportată între aceste puncte, variația energiei potențiale este:

$$E_p(\mathbf{r}_2) - E_p(\mathbf{r}_1) = q[V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1)].$$

Unitatea pentru potențialul electrostatic sau diferența de potențial în sistemul SI este *voltul* (V). Această unitate este larg folosită în viața de toate zilele și în laborator. Un *volt* este egal cu *1 joule/1 coulomb* (J/C). Cîmpul electric în unități SI este măsurat în *volt/metru* (V/m); remarcați că potențialul nu se exprimă în coulombi/metru.

În sistemul gaussian CGS, unitatea pentru potențialul electrostatic este *statvoltul*. Am văzut în capitolul 3 că unitatea pentru intensitatea cîmpului electric este numită *statvolt/centimetru*. Potențialul diferă de cîmp în dimensiune printr-o lungime, astfel că V este măsurat în statvolți. Este, de asemenea, corect că V are dimensiunea [sarcină]/[lungime], astfel încît un nume posibil pentru unitatea de potențial este statcoulomb/cm. Un statvolt este de asemenea egal cu *1 erg/1 statcoulomb*.

Legătura dintre unităţile în sistemul gaussian şi SI este dată de egalitatea:

$$\frac{c}{10^6} \times \text{diferenţa de potenţial în statvolţi} = \text{diferenţa de potenţial în volţi}$$

unde c este viteza luminii în m/s. Sau, aproximativ:

300 × diferenţa de potenţial în statvolţi ≈ diferenţa de potenţial în volţi.

Dăm acum cîteva exemple de probleme în care intervine energia potenţială şi potenţialul, unele dintre ele implicînd interacţii prin forţe centrale de tip gravitaţional şi electric.

EXEMPLU

Viteza (cosmică) de evadare din cîmpul gravitaţional al Pămîntului şi din Sistemul Solar. Calculăm viteza iniţială care trebuie imprimată unei particule de masă M pentru a putea părăsi (1) Pămîntul şi (2) Sistemul Solar. (Neglijăm rotaţia Pămîntului.)

Figura 5.18 *a–f* ilustrează semnificaţia ca şi utilizarea diagramelor energiei potenţiale pentru acest tip de situaţie. Folosind formula (5.32), scriem energia totală E a unei particule de masă M, aflată la o distanţă R_p egală cu raza Pămîntului faţă de centrul acestuia, sub forma:

$$E = \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{GM_pM}{R_p}$$

unde:

$$M_p = 5{,}98 \times 10^{24}\ \text{kg}; \quad R_p = 6{,}4 \times 10^6\ \text{m}; \quad G = 6{,}67 \times 10^{-11}$$

(din capitolul 3, paginile 84–86).

Pentru ca particula să ajungă la distanţă infinită de Pămînt cu cea mai mică viteză posibilă (egală cu zero), energia ei totală trebuie să fie zero, deoarece atît energia cinetică, cît şi poten-

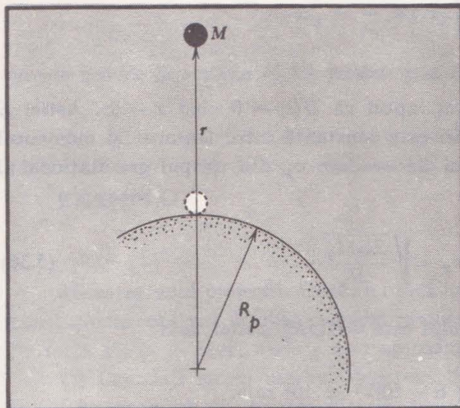


FIG. 5.18. (*a*). Considerăm viteza de evadare necesară unui corp de masă M pentru a părăsi cîmpul gravitaţional al pămîntului, pornind de la suprafaţă.

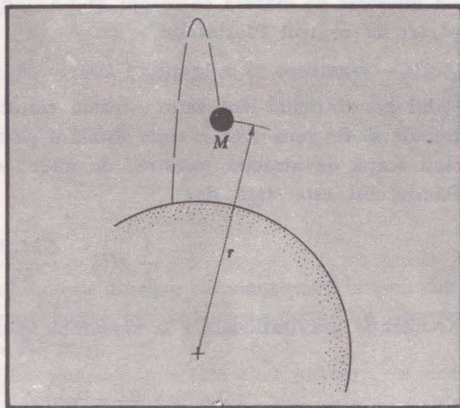


FIG. 5.18. (*b*) Traiectoria în cazul în care energia cinetică este prea mică pentru ieşirea din cîmpul gravitaţional.

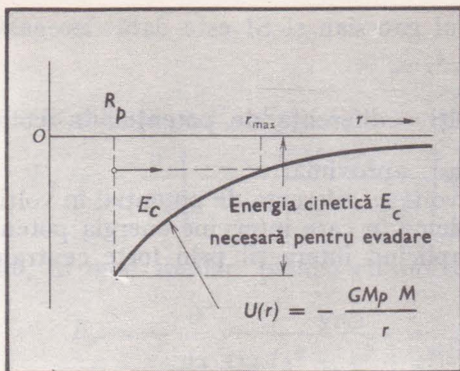


FIG. 5.18. (*c*) Reprezentăm energia cinetică inițială ca fiind prea mică pentru părăsirea cîmpului gravitațional. Pentru a atinge punctul de la infinit, trebuie ca $E_c \geqslant |-U|$.

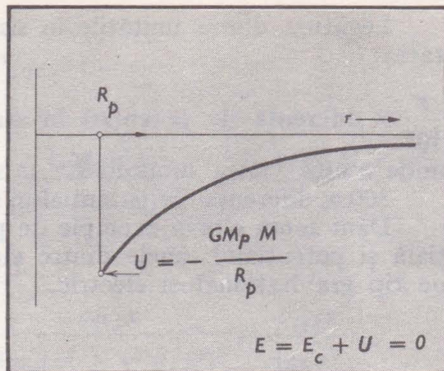


FIG. 5.18. (*d*) Vedem un corp de masă M lansat de la suprafața Pămîntului (raza R_p) cu energia cinetică minimă necesară $E_c = \frac{1}{2} Mv_p^2 = GM_pM/R_p$. Viteza de evadare din cîmpul terestru este notată cu v_p.

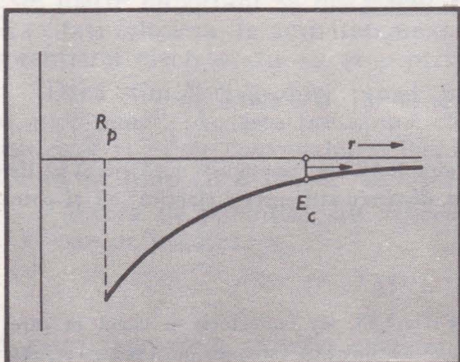


FIG. 5.18. (*e*) La un timp ulterior, energia potențială U a crescut și energia cinetică E_c s-a micșorat pe măsură ce corpul M s-a îndepărtat de centrul Pămîntului.

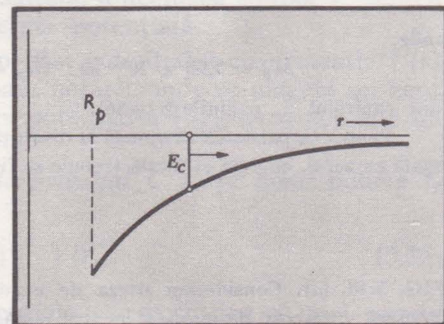


FIG. 5.18. (*f*) Și mai tîrziu, E_c și $|U|$ au scăzut în continuare.

țialul gravitațional sînt zero. Aceasta rezultă din faptul că $U(r) \to 0$ cînd $r \to \infty$. Astfel E trebuie să fie zero dacă energia totală a particulei este constantă între lansare și momentul cînd scapă de atracția terestră; de unde, viteza de evadare v_p din cîmpul gravitațional al Pămîntului este dată de:

$$\frac{1}{2} Mv_p^2 = \frac{GM_pM}{R_p}; \; v_p = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}}. \qquad (5.36)$$

Accelerația gravitațională g la suprafața Pămîntului este GM_p/R_p^2 astfel încît:

$$v_p = \sqrt{2gR_p} \approx (2 \times 10 \times 6 \times 10^6)^{\frac{1}{2}} \approx 10^4 \text{ m/s}.$$

Pentru a scăpa de atracţia exercitată exclusiv de către Soare, o particulă lansată de pe Pămînt (la o distanţă R_{ps} de Soare), are nevoie de o viteză iniţială:

$$v_s = \sqrt{\frac{2GM_s}{R_{ps}}} = \left[\frac{2 \times (7 \times 10^{-10}) \times (2 \times 10^{30})}{1,5 \times 10^{11}}\right]^{\frac{1}{2}} \approx 4 \times 10^4 \text{ m/s},$$

folosind raportul $M_s/M_p = 3,3 \times 10^5$ şi valoarea $R_{ps} = 1,5 \times 10^{11}$ m. Pentru corpuri lansate pe Pămînt, ieşirea din Sistemul solar este mai dificilă decît părăsirea cîmpului gravitaţional terestru.

EXEMPLU

Energia potenţială în apropierea suprafeţei Pămîntului. Energia potenţială gravitaţională a unui corp de masă M la o distanţă r faţă de centrul Pămîntului este, pentru $r > R_p$:

$$E_p(r) = -\frac{GMM_p}{r}$$

unde M_p este masa Pămîntului. Dacă R_p este raza Pămîntului şi y înălţimea de la suprafaţa Pămîntului, vrem să arătăm că:

$$E_p \approx -MgR_p + Mgy \tag{5.37}$$

pentru $y/R_p \ll 1$. Aici $g = GM_p/R_p^2 \approx 9,8$ m/s². Demonstraţia se face astfel. Avem

$$E_p = -GMM_p \frac{1}{(R_p + y)}$$

de mai sus, cu $r = R_p + y$. Împărţim numărătorul şi numitorul prin R_p:

$$E_p = -\frac{GMM_p}{R_p} \frac{1}{(1 + y/R_p)}.$$

Putem acum folosi dezvoltarea din ecuaţia (2.49) (Dwight, 9.04) pentru a scrie ($n = -1$):

$$E_p = -\frac{GMM_p}{R_p}\left[1 - \frac{y}{R_p} + \frac{y^2}{R_p^2} \ldots\right].$$

Fie $g = GM_p/R_p^2$, atunci:

$$E_p = -MgR_p\left(1 - \frac{y}{R_p} + \frac{y^2}{R_p^2} - \ldots\right)$$

care se reduce la ecuaţia (5.37) pentru $y \ll R_p$ şi la ecuaţia (5.8), pînă la constanta $-MgR_p$.

EXEMPLU

Mişcarea unui proiectil. Dăm aici încă un exemplu de mişcare bidimensională într-un cîmp gravitaţional constant. Problema a fost rezolvată mai înainte, folosind legea a doua a lui Newton. Fie forţa $\mathbf{F}_G = -Mg\hat{\mathbf{y}}$, unde g este aproximativ 9,8 m/s².

(1) Calculaţi lucrul mecanic efectuat de către forţa de greutate cînd un corp cu masa de 0,1 kg se mişcă din origine pînă în punctul $\mathbf{r} = 0,50\ \hat{\mathbf{x}} + 0,50\ \hat{\mathbf{y}}$.

$$L = \int_{0;\,0}^{0,5;\,0,5} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = -Mg\hat{\mathbf{y}} \cdot (0,50\,\hat{\mathbf{x}} + 0,5\,\hat{\mathbf{y}}) = -0,1 \times 9,8 \times 0,5 = -4,9 \cdot 10^{-1}\text{ J}.$$

Forța gravitațională efectuează un lucru mecanic negativ; altfel spus, lucrul mecanic este efectuat *împotriva* sa de către un agent extern.

(2) Care este variația energiei potențiale în această deplasare?

$$\mathbf{F}_{ag} = Mg\hat{\mathbf{y}}$$

și deci:

$$\Delta E_p = -L = +4,9 \times 10^{-1}\text{ J}$$

astfel încît energia potențială crește cu $4,9 \times 10^{-1}$ J; vedem că dacă $E_p = 0$ pentru $x = 0$ și $y = 0$ avem:

$$E_p = Mgy.$$

(3) La ce înălțime se va ridica o particulă de masă M aruncată din origine cu viteza v_0 care face un unghi θ cu orizontala?

În cazul de față putem folosi faptul că v_x nu se modifică:

$$E = \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}M(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}M(v_0^2\cos^2\theta + v_0^2\sin^2\theta) = \frac{1}{2}Mv_0^2\cos^2\theta + Mgy_{max};$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

rezultat care poate fi obținut din ecuația (3.9).

EXEMPLU

Cîmpul electrostatic. Care este mărimea cîmpului electric la o distanță de 1Å (1Å = $= 10^{-10}$ m) față de proton?

Din legea lui Coulomb avem:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2} \approx \frac{(9 \cdot 10^9) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})}{(1 \cdot 10^{-10})^2} \approx 1,5 \cdot 10^{11}\text{ V/m}.$$

Cîmpul este dirijat radial și îndreptat de la proton către exterior.

Potențialul. Care este potențialul în acest punct? Din ecuațiile (5.33) și (5.34) avem:

$$V(r) = \frac{1}{q}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qe}{r} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} = 9 \times 10^9\,\frac{1,6 \times 10^{-19}}{1 \times 10^{-10}} \approx 15\text{ V}.$$

Diferența de potențial. Care este diferența de potențial între două puncte situate la o distanță de 1Å și respectiv 0,2Å față de proton?

Potențialul electric la distanța de $1 \cdot 10^{-10}$ m este 15 V iar la $0,2 \cdot 10^{-10}$ m este 75 V. Diferența de potențial va fi $75 - 15 = 60$ V.

Energia unei particule încărcate, dedusă din diferența de potențial. Un proton aflat în repaus este lăsat liber la o distanță de 1Å de alt proton. Care este energia cinetică cînd protonii au ajuns la o distanță infinită unul față de celălalt?

Din conservarea energiei știm că energia cinetică trebuie să fie egală cu energia potențială inițială, care este:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{r} = 9\cdot 10^9\,\frac{(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{1\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}} = 23\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Dacă un proton este menținut în repaus în timp ce celălalt se mișcă, viteza finală a protonului mobil se obține (folosind conservarea energiei) din relațiile:

$$\frac{1}{2}\,Mv^2 = 23\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}\,;$$

$$v^2 = \frac{2\cdot 23\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}}{1{,}67\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}} \approx 27\cdot 10^8\ (\mathrm{m/s})^2$$

sau

$$v \approx 5\times 10^4\ \mathrm{m/s}.$$

Dacă ambii protoni sînt liberi să se miște, fiecare proton va avea aceeași energie cinetică cînd se vor găsi la distanță mare unul față de celălalt, astfel încît:

$$\frac{1}{2}\,Mv_1^2 + \frac{1}{2}\,Mv_2^2 = Mv^2 \approx 23\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

și deci:

$$v \approx \frac{5\times 10^4\ \mathrm{m/s}}{\sqrt{2}} \approx 3{,}5\cdot 10^4\ \mathrm{m/s}.$$

Accelerarea protonului într-un cîmp electric uniform. Un proton aflat inițial în repaus este accelerat de un cîmp electric uniform. Protonul străbate o diferență de potențial de 100 V. Care este energia sa cinetică finală?

Energia cinetică va fi egală cu variația energiei potențiale, care este $e\Delta V$ sau:

$$(1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})\cdot(100\ \mathrm{V}) \approx 1{,}6\cdot 10^{-17}\ \mathrm{J}.$$

EXEMPLU

Electronvoltul. O unitate convenabilă pentru energie în fizica atomică și nucleară este *electronvoltul* (eV), definit ca variația energiei potențiale a unei sarcini egală cu sarcina electronului e, între două puncte între care există o diferență de potențial de un volt, sau ca energia cinetică cîștigată de o sarcină egală cu e cînd străbate o diferență de potențial de un volt. Astfel:

$$1\ \mathrm{eV} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\times 1\ \mathrm{V} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

O particulă alfa (nucleul ^{4}He sau atomul de heliu dublu ionizat) accelerată din repaus de o diferență de potențial de 1 000 V are o energie cinetică egală cu:

$$2e\times 1\,000\ \mathrm{V} = 2\,000\ \mathrm{eV}$$

unde:

$$2\,000\ \mathrm{eV} = (2\cdot 10^3)(1{,}6\cdot 10^{-19}) = 3{,}2\cdot 10^{-16}\ \mathrm{J}.$$

Am văzut că diferența $E_{cB} - E_{cA}$ a energiilor cinetice ale unei particule între două puncte are proprietatea că:

$$E_{cB} - E_{cA} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

unde **F** este forța care acționează asupra particulei. Dar, știm din ecuația (5.25) că:

$$E_{pB} - E_{pA} = -\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

astfel încît adunînd aceste două ecuații avem:

$$(E_{cB} + E_{pB}) - (E_{cA} + E_{pA}) = 0. \quad (5.38)$$

Așadar, *suma dintre energia cinetică și cea potențială este o constantă, independentă de timp.* Rescriind ecuația (5.38) avem pentru un sistem uniparticulă funcția energie:

$$\boxed{E = \frac{1}{2} Mv^2(A) + E_p(A) = \frac{1}{2} Mv^2(B) + E_p(B)} \quad (5.39)$$

unde E este o constantă numită *energia* sau *energia totală* a sistemului. Ecuația (5.32) reprezintă exact această relație pentru cazul energiei potențiale gravitaționale.

Să scriem generalizarea relației (5.39) pentru un sistem de două particule în cîmpul unui potențial extern:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 + E_{p1}(\mathbf{r}_1) + E_{p2}(\mathbf{r}_2) + E_p(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \text{const.} \quad (5.40)$$

Primul termen este energia cinetică a particulei 1; al doilea termen este energia cinetică a particulei 2; al treilea și al patrulea termen reprezintă energiile potențiale ale particulelor 1 și 2 datorită potențialului extern; al cincilea termen este energia potențială datorită interacției între particulele 1 și 2. De notat că $E_p(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ este introdus numai o dată: dacă două particule interacționează, energia de interacțiune este reciprocă!

Dacă particulele 1 și 2 sînt protoni în cîmpul gravitațional al Pămîntului, atunci energia E în relația (5.40) este:

$$E = \frac{1}{2} M(v_1^2 + v_2^2) + Mg(y_1 + y_2) - \frac{GM^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}},$$

unde y este măsurat în sus și $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Ultimul termen este energia coulombiană a celor doi protoni; penultimul termen este energia lor gravitațională mutuală. Raportul ultimilor doi termeni este:

$$\frac{GM^2}{e^2/4\pi\varepsilon_0} = \frac{10^{-10} \times 10^{-54}}{10^{10} \times 10^{-38}} = 10^{-36}$$

arătînd că, deoarece forțele depind de distanță în același mod, forța gravitațională între protoni este extrem de slabă în comparație cu forța electrostatică.

PUTEREA

Puterea P este viteza cu care are loc în timp transferul de energie. Am definit lucrul mecanic efectuat asupra unei particule într-o deplasare $\Delta\mathbf{r}$ de către o forță aplicată, ca fiind:

$$\Delta L = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}.$$

Viteza cu care acest lucru mecanic este efectuat de forţă este:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

La limită, $\Delta t \to 0$, avem puterea:

$$P = \frac{dL}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (5.41)$$

Din puterea $P(t)$ ca funcţie de timp putem scrie lucrul mecanic consumat, ca:

$$L(t_1 - t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt.$$

În sistemul SI unitatea de putere este 1 joule/1 secundă (J/s), unitate care se numeşte *watt* (1 W). În sistemul CGS unitatea de putere este *erg/secundă*. Pentru a găsi puterea în erg/s se înmulţeşte puterea exprimată în waţi prin 10^7. Pentru a obţine puterea în waţi din valoarea exprimată în cai-putere (CP) se înmulţeşte aproximativ prin 736.

PROBLEME

1. *Energie potenţială şi cinetică — corp în cădere*

(*a*) Care este energia potenţială a unui corp cu masa de 1 kg aflat la o înălţime de 1 km deasupra pămîntului? Raportaţi energia potenţială la suprafaţa pămîntului.

R: 9 800 J.

(*b*) Care este energia cinetică a unui corp cu masa de 1 kg lăsat să cadă liber de la o înălţime de 1 km, în momentul în care atinge pămîntul? Se neglijează frecarea.

R: 9 800 J.

(*c*) Care este energia cinetică a aceluiaşi corp la jumătatea drumului în cădere?

(*d*) Care este energia potenţială la jumătatea drumului în cădere? Suma lui (*c*) şi (*d*) trebuie să fie egală cu (*a*) sau (*b*). De ce?

2. *Energia potenţială deasupra pămîntului*

(*a*) Care este energia potenţială $E_p(R_p)$ a unui corp avînd masa de 1 kg aflat la suprafaţa pămîntului dacă se ia energia potenţială zero la distanţă infinită? [De notat că $E_p(R_p)$ este negativă.]

R: $-6{,}25 \cdot 10^7$ J.

(*b*) Care este energia potenţială a unui corp cu masa de 1 kg aflat la o distanţă de 10^5 km faţă de centrul pămîntului, luînd energia potenţială zero la distanţă infinită?

R: $-3{,}98 \cdot 10^6$ J.

(c) Care este lucrul mecanic necesar pentru a deplasa corpul de la suprafața pămîntului într-un punct situat la o distanță de 10^5 km față de centrul pămîntului?

3. *Energia potențială electrostatică*

(a) Care este energia potențială electrostatică a unui electron și a unui proton separați printr-o distanță de 1Å $= 10^{-10}$m luînd energia potențială egală cu zero la separare infinită?

R: $-2{,}3 \cdot 10^{-18}$ J

(b) Care este energia potențială electrostatică a doi protoni aflați la aceeași distanță? (Acordați atenție specială semnului rezultatului.)

4. *Satelit pe orbită circulară*

(a) Care este forța centrifugă exercitată asupra unui satelit mișcîndu-se pe o orbită circulară în jurul Pămîntului la o distanță r de centrul Pămîntului? Viteza satelitului relativă la centrul Pămîntului este v iar masa sa este M.

(b) Egalați forța centrifugă din (a) cu forța gravitațională (M este în echilibru în sistemul în rotație).

(c) Exprimați v în funcție de r, G și M_P.

(d) Care este raportul dintre energia cinetică și cea potențială presupunînd $E_p = 0$ la $r = \infty$?

5. *Energia cinetică a Lunii*. Care este energia cinetică a Lunii, relativ la Pămînt? Datele necesare sînt indicate în tabelul de constante de la paginile 435 — 436.

6. *Resortul anarmonic*. Un resort special are legea forței $F = -Dx^3$.

(a) Care este energia potențială în punctul x presupunînd $E_p = 0$ la $x = 0$?

R: $\frac{1}{4} Dx^4$.

(b) Ce lucru mecanic se efectuează asupra resortului pentru a-l alungi lent de la 0 la x?

7. *Energia potențială gravitațională*

(a) Care este energia potențială în raport cu suprafața pămîntului a unei cochilii de 1 kg aflată pe muchia unui țărm stîncos înalt de 500 m?

(b) Dacă cochilia este aruncată de pe stîncă cu o viteză de 90 m/s, care va fi viteza sa cînd izbește solul? Este afectat răspunsul de unghiul sub care se face aruncarea?

8. *Mașina lui Atwood*. O mașină Atwood a fost descrisă în capitolul 3.

(a) Folosiți ecuația conservării energiei pentru a găsi vitezele celor două corpuri cînd m_2 a coborît pe o distanță y plecînd din repaus.

(b) Din această expresie pentru viteză găsiți accelerația. Comparați cu rezultatul din ecuația (3.40).

9. *Electron pe orbită închisă în jurul protonului*. Să presupunem că un electron se mișcă pe o orbită circulară în jurul unui proton la o distanță de 2×10^{-10} m. Considerăm protonul în repaus.

(a) Exprimați viteza electronului egalînd forța centrifugă cu cea electrostatică.

(b) Care este energia cinetică? Energia potențială? Exprimați valorile în jouli și electronvolți.

R: $E_c = 5{,}8 \cdot 10^{-19}$ J $= 3{,}6$ eV;

$E_p = -11{,}5 \cdot 10^{-19}$ J $= -7{,}2$ eV.

(c) Cîtă energie este necesară pentru a ioniza sistemul, adică pentru a îndepărta electronul la distanță infinită fără energie cinetică finală? (Acordați deosebită atenție diverselor semne.)

10. *Paradoxul resortului*. Ce este greșit în următorul raționament? Considerăm un corp de masă m menținut în repaus în punctul $y = 0$, la extremitatea unui resort nealungit care atîrnă vertical. Corpul este acum atașat resortului, care se va alungi din cauza forței gravitaționale mg care acționează asupra corpului. Cînd corpul a pierdut energia potențială gravitațională

mgy şi resortul a cîştigat aceeaşi cantitate de energie potenţială, astfel incit:

$$mgy = \frac{1}{2} ky^2,$$

corpul va atinge echilibrul. Prin urmare, poziţia de echilibru va fi dată de

$$y = \frac{2mg}{k}.$$

11. *Viteza de evadare de pe Lună.* Folosind $R_L = 1{,}7 \cdot 10^6$ m şi $M_L = 7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg, găsiţi:

(*a*) Acceleraţia gravitaţională pe suprafaţa Lunii.

(*b*) Viteza de evadare de pe Lună.

12. *Energia potenţială a unei perechi de resorturi.* Două resorturi, avînd fiecare lungimea a în stare nedeformată şi constantă elastică k sînt fixate în punctele $(-a,0)$ şi $(+a,0)$ şi unite la celelalte capete. În cele ce urmează, presupunem că ele se pot întinde ori contracta în lungime fără a se îndoi (vezi fig. 5.19).

(*a*) Arătaţi că energia potenţială a sistemului, pentru o deplasare a capetelor unite în punctul de coordonate (x, y), este:

$$E_p = \frac{k}{2}\{[(x+a)^2 + y^2]^{1/2} - a\}^2 + \frac{k}{2}\{[(a-x)^2 + y^2]^{1/2} - a\}^2.$$

(*b*) Energia potenţială depinde de ambele coordonate x şi y şi putem folosi derivarea parţială pentru a evalua forţele relevante. Amintim că derivata parţială a unei funcţii $f(x,y)$ este dată de regulile obişnuite de derivare conform relaţiilor

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x; y = \text{const});$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x = \text{const}; y).$$

Găsiţi componenta forţei F_x şi arătaţi că $F_x = 0$ pentru $r = 0$.

(*c*) Găsiţi F_y pentru $x = 0$. Verificaţi semnele cu grijă pentru a fi siguri că rezultatul are sens.

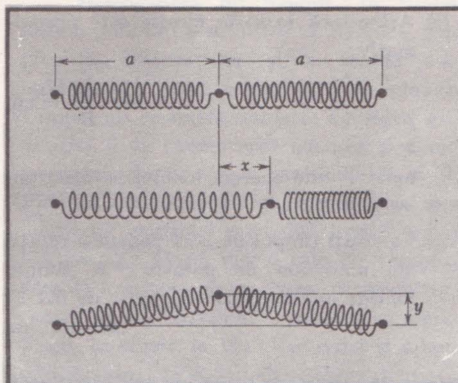


FIG. 5.19.

(*d*) Trasaţi un grafic al energiei potenţiale ca funcţie de r în planul xy, şi găsiţi poziţia de echilibru.

13. *Looping-ul.* Un corp de masă m alunecă în jos pe o pistă fără frecare şi din capătul de jos se ridică pentru a parcurge un cerc vertical de rază R. Găsiţi înălţimea de la care el trebuie să plece din repaus pentru a putea parcurge cercul complet fără a cădea sub acţiunea forţei de greutate. *Indicaţie.* Care trebuie să fie forţa exercitată de către pistă în punctul cel mai înalt?

14. *Spectrometru de masă cu timp de zbor.* Funcţionarea unui spectrometru de masă cu timp de zbor este bazată pe faptul că viteza unghiulară a mişcării elicoidale într-un cîmp magnetic uniform este independentă de viteza iniţială a ionului. În practică, instrumentul produce un puls scurt de ioni şi măsoară electronic timpul de zbor pentru una sau mai multe rotaţii ale ionilor din puls.

(*a*) Arătaţi că pentru ioni de sarcină e, timpul de zbor pentru efectuarea a N rotaţii este aproximativ:

$$t \approx 6\,500 \frac{NM}{B}$$

unde t este exprimat în microsecunde, M în unităţi atomice de masă şi B în tesla (1 uam $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg).

(b) Arătați că raza de girație este aproximativ:

$$R \approx \frac{144\sqrt{VM}}{B}\ \text{cm}$$

unde V este energia ionului în electron-volți.

(c) Calculați timpul de zbor pentru 6 rotații ale unui ion de potasiu ^{39}K simplu ionizat într-un cîmp magnetic de 0,1 T.

R: 152 μs.

15. *Flux de electroni în osciloscop.* Într-un tub osciloscop, electronii sînt accelerați din repaus de o diferență de potențial U_a și trec printre două plăci de deflexie electrostatică. Plăcile, care au o lungime l și se află la o distanță d una față de alta, mențin intre ele o diferență de potențial U_b. Ecranul tubului este situat la o distanță L față de centrul plăcilor. Folosiți relația $e\Delta U = \frac{1}{2}mv^2$ între potențialul de accelerare și viteza v.

(a) Deduceți o expresie pentru deflexia liniară D a petei pe ecran.

(b) Presupunem că $U_a = 400$ V, $U_b = 10$ V, $l = 2$ cm, $d = 0,5$ cm, $L = 15$ cm; care este această deflexie? Aparatul este ca cel din figura 3.6, cu deosebirea că plăcile sînt apropiate.

16. *Impulsul forței*

(a) Calculați impulsul forței pe care o minge o exercită asupra alteia într-o ciocnire frontală complet neelastică a două mingi de cîte 0,5 kg, fiecare minge apropiindu-se de cealaltă cu viteza de 1 m/s.

(b) Care este impulsul forței dacă ciocnirea este elastică?

(c) Dacă presupunem că durata ciocnirii în (a) și (b) este $1 \cdot 10^{-3}$s, găsiți în fiecare caz forța medie:

$$F_m = \frac{\int_0^t F\,dt}{\int_0^t dt},$$

17. *Puterea.* O bandă rulantă este folosită pentru a transporta nisip dintr-un punct în altul. Nisipul, aflat inițial în repaus într-un coș, cade pe banda rulantă care se mișcă orizontal cu viteza v. Neglijînd frecarea și ceea ce se întîmplă la celălalt capăt al benzii, găsiți puterea necesară pentru a menține banda în mișcare, în funcție de v și de masa de nisip $\dot{M} = dM/dt$ care cade pe bandă într-o secundă. Cîtă putere este transformată în energie cinetică pe secundă? (Neglijați energia gravitațională a nisipului căzut.)

R: Mv^2; $\frac{1}{2}$.

NOTE ISTORICE

Descoperirea lui Ceres. (Această relatare ilustrează precizia predicțiilor bazate pe mecanica clasică.)

Prima planetă mică descoperită a fost Ceres, observată vizual de către Piazzi în Palermo, Sicilia, în prima zi a secolului al XIX-lea la 1 ianuarie 1801. Piazzi i-a observat mișcarea timp de cîteva săptămîni dar apoi s-a îmbolnăvit și i-a pierdut urma.

Mai mulți oameni de știință au calculat orbita noii planete din numărul limitat de poziții observate de Piazzi dar numai orbita calculată de Gauss a fost suficient de precisă pentru a prezice unde va trebui să se găsească planeta în anul următor. La 1 ianuarie 1802 planeta Ceres a fost redescoperită de Olbers la o distanță unghiulară de numai 30′ față de poziția prezisă. Pe măsură ce s-au acumulat mai multe observații, Gauss și alți astronomi au putut să îmbunătățească caracteristicile orbitei calculate, și, în anul 1830 poziția planetei a fost la numai 8″ față de localizarea prezisă. Incluzînd perturbațiile majore ale orbitei

lui Ceres produse de Jupiter, Enke a găsit că poate reduce eroarea la o medie de 6″/an. Calcule ulterioare, luînd în considerare mai precis perturbațiile, au dat predicții care diferă de observații numai prin aproximativ 30″ după 30 ani.

Relatări ale acestei descoperiri sînt date în volumul 12 din *Philosophical Magazine*, 1802; de văzut lucrările lui Piazzi (pag. 54), Von Zach (pag. 62), Tilloch (pag. 80) și Lalande (pag. 112). Este amuzant de aflat că o societate de eminenți astronomi din Europa a fost organizată la Lilienthal, la 21 septembrie 1800, cu „scopul expres de a căuta această planetă presupusă a exista între Marte și Jupiter... Planul societății a fost de a împărți întregul zodiac între cei 24 membri...". Datorită întîrzierilor poștale din timpul războiului lui Napoleon, invitația de a participa la echipa de cercetare nu i-a fost transmisă lui Piazzi decît după ce și-a făcut descoperirea. Alte relatări ale descoperirii lui Ceres se găsesc în *Astronomisches Jahrbuch* 1804/5. Calculele lui Gauss sînt în volumul 6 din *Opere* (Werke), pag. 199–211.

Se crede că tradiția astronomică începută în Palermo de abatele Piazzi a ajuns la Lampedusa [eroul romanului „Ghepardul" (The Leopard), scris de descendentul său], prin intermediul abatelui Pirrone, care a fost mentorul spiritual și asistentul astronomic al lui Lampedusa.

Descoperirea lui Neptun. În timpul primei jumătăți a secolului al XIX-lea, cînd precizia observațiilor și a teoriei s-au îmbunătățit, s-a constatat că planeta Uranus nu se mișca conform cu legea gravitației și cu conservarea energiei și a momentului cinetic (vezi capitolele 6 și 9). Planeta era accelerată și încetinită în mod inegal cu cantități mici dar foarte semnificative. Nu exista nici o cale de a explica această comportare pe baza proprietăților cunoscute ale sistemului solar și a legilor fizicii. În sfîrșit, în 1846, Leverrier și Adams au descoperit în mod independent că postularea unei noi planete ipotetice, de o anumită masă și orbită exterioară ca acea a lui Uranus, ar explica complet mișcarea anormală observată [1]. Ei au rezolvat ecuațiile pentru poziția acestei planete necunoscute și, după numai o jumătate de oră de căutare, noua planetă, numită Neptun, a fost găsită de către Galle, la doar 1° de poziția prezisă [2]. În prezent, predicțiile referitoare la pozițiile planetelor mari sînt în concordanță pînă la cîteva secunde de arc cu observațiile, chiar după o extrapolare de mulți ani. Precizia pare a depinde în întregime de completitudinea tratării diverselor efecte perturbatoare.

Este interesant de notat că planeta Pluto, care este și mai departe de Soare, a fost descoperită într-un mod similar, și că elementele 93 și 94 după uraniu (elementul 92) au fost numite neptuniu și plutoniu.

---

[1] „Am demonstrat că nu este posibil să se explice observațiile asupra acestei planete [Uranus] prin teoria atracției universale dacă planeta ar fi supusă numai acțiunii soarelui și a planetelor cunoscute. Dar toate anomaliile observate pot fi explicate pînă la cel mai mic detaliu prin influența unei noi [nedescoperite] planete dincolo de Uranus ... Prezicem [31 august 1846] următoarea poziție pentru noua planetă la 1 ianuarie 1847: longitudinea heliocentrică reală 326°32′". U. J. Le Verrier, Compt. Rend. *23*: 428 (1846).

[2] „I-am scris D-lui Galle la 18 septembrie pentru a-i solicita colaborarea; acest astronom talentat a văzut planeta în aceeași zi (23 septembrie 1846) în care a primit scrisoarea mea .. Longitudinea heliocentrică [observată] 327°24′ s-a redus la 1 ianuarie 1847 ... Diferența [dintre observație și teorie] 0°52′". U. J. Le Verrier, Compt. Rend. *23*: 657 (1846).

„Dl. Le Verrier a văzut noua planetă fără a avea nevoie să privească măcar o dată cerul, a văzut-o în *vîrful stiloului său;* el a determinat prin puterea exclusivă a calculului poziția și mărimea unui corp situat mult dincolo de limitele cunoscute atunci ale sistemului nostru planetar..." Arago, Compt. Rend. *23*; 659 (1846).

Pentru o introducere în magnifica controversă asupra acestei descoperiri, vezi pag. 741–754 ale aceluiași volum din Compt. Rend (Paris); vezi, de asemenea, M. Grosser, *Descoperirea lui Neptun* („The Discovery of Neptune"), (Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1962.)

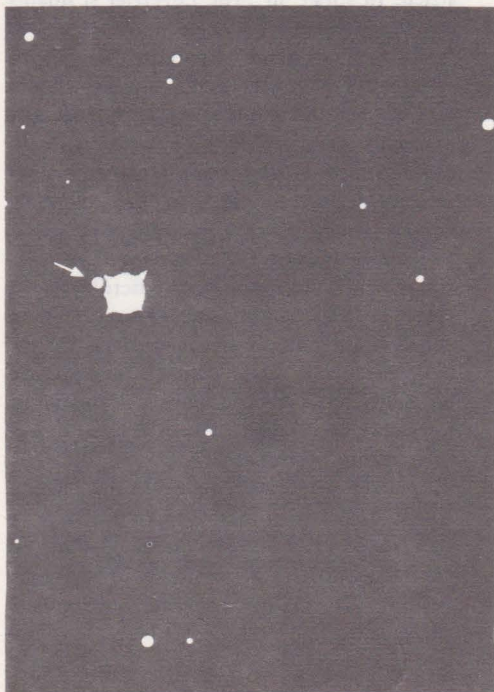
LECTURI SUPLIMENTARE

Fizica PSSC (PSSC „Physics"), capitolele 23 și 24, D. C. Heath and Company, Boston, 1965.

Curs de fizică HPP (HPP, „Project Physics Course"), capitolul 10 (§ 1–4), Holt, Rinehart și Winston, Inc. New York, 1970.

E. P. Wigner, *Simetria și legile de conservare* („Symmetry and Conservation Laws"), *Physics Today* 17 (3): 34 (1964).

Ernst Mach, *Știința mecanicii* („The Science of Mechanics"), capitolul 3 § 2, The Open Court Publishing Company, La Salle, ill., 1960. Asupra istoriei conceptului de energie cinetică („vis viva").



Neptun văzut în reflectorul de 3,048 m al observatorului Lick. Săgeata îl indică pe Triton, un satelit al lui Neptun (fotografie de la Observatorul Lick).

6

Conservarea impulsului și a momentului cinetic

Cuprins

În capitolul 4 am considerat sisteme pentru care a fost valabilă invarianța galileană și am arătat că legea conservării impulsului unui sistem de particule în interacție este o consecință necesară a invarianței galileene și a conservării energiei, cu condiția să nu acționeze nici o forță externă. Conservarea impulsului, o lege verificată cu precizie de experiență, este o parte esențială a „ansamblului de cunoștințe clasice" discutat mai înainte. În acest capitol prezentăm implicațiile conservării impulsului asupra mișcării unui ansamblu de particule. Definim centrul de masă al sistemului de particule și învățăm să privim mișcarea sistemului dintr-un sistem de referință în care centrul de masă este în repaus. Procesele de împrăștiere între perechi de particule constituie cazuri particulare importante. Introducem, de asemenea, conceptul important de moment cinetic, conservarea momentului cinetic și conceptul de moment al forței. Acestea sînt importante în mod deosebit în tratarea corpului rigid, în capitolul 8, și a forțelor centrale, în capitolul 9.

FORȚE INTERNE ȘI CONSERVAREA IMPULSULUI

În tratarea comportării dinamice a unui sistem de particule constatăm că este util să facem distincție între forțele de interacție dintre particulele sistemului și alte forțe datorate unor factori externi, cum ar fi un cîmp gravitațional sau electric, în care se poate afla sistemul de particule. Vom numi forțele dintre particule *forțe interne* ale sistemului.

Forțele interne nu pot afecta impulsul total al ansamblului de particule, unde prin *impuls total* înțelegem suma vectorială:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i. \qquad (6.1)$$

(Demonstrația a fost dată în capitolul 3 și ea va fi reamintită studentului în analiza care urmează.) Considerînd aceste forțe interparticulă ca fiind newtoniene, știm că pentru interacțiunea reciprocă a oricăror două particule forțele satisfac relația:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}.$$

unde $\mathbf{F}_{ij}$ reprezintă forța exercitată asupra particulei i de către particula j și reciproc. Atunci, conform legii a doua a lui Newton, conchidem că în orice interval de timp variația impulsului particulei i produsă de forța $\mathbf{F}_{ij}$ este egală și de sens contrar cu cea produsă asupra particulei j de forța $\mathbf{F}_{ji}$, și astfel variația impulsului datorită interacției mutuale a acestei perechi de particule este zero. Acest raționament este valabil pentru oricare pereche de particule

din sistem, cu condiția ca interacțiunea oricărei perechi să nu fie afectată de prezența altor particule. Astfel tragem concluzia că forțele interne nu pot afecta impulsul total al unui sistem, deoarece suma vectorială a tuturor forțelor interparticulă va fi zero.

În acest paragraf ne-am referit la impulsul total al sistemului. În cele ce urmează vom extinde raționamentul pentru a arăta că forțele interne nu pot să producă nici o variație a momentului cinetic al unui sistem de particule. Recunoașterea acestor două principii de *conservare* în legătură cu forțele interne simplifică considerabil înțelegerea și analiza multor probleme de mișcare colectivă.

CENTRUL DE MASĂ

Poziția $\mathbf{R}_{c.m.}$ a centrului de masă al unui sistem de N particule, în raport cu o origine fixă O este definită ca:

$$\boxed{\mathbf{R}_{c.m.} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathbf{r}_n M_n}{\sum_{n=1}^{N} M_n}} \tag{6.2}$$

Ea este o poziție medie, ponderată în funcție de masele particulelor. Pentru un sistem de două particule

$$\mathbf{R}_{c.m.} = \frac{\mathbf{r}_1 M_1 + \mathbf{r}_2 M_2}{M_1 + M_2} \tag{6.3}$$

după cum este indicat în figurile 6.1 și 6.2.

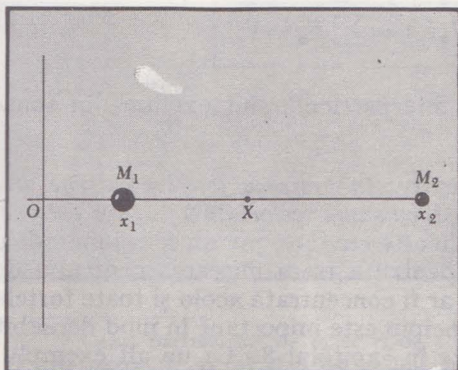


FIG. 6.1. Două corpuri de mase M_1 și M_2 în pozițiile x_1 și x_2 pe axa x, au centrul de masă situat la $X = (M_1 x_1 + M_2 x_2)/(M_1 + M_2)$.

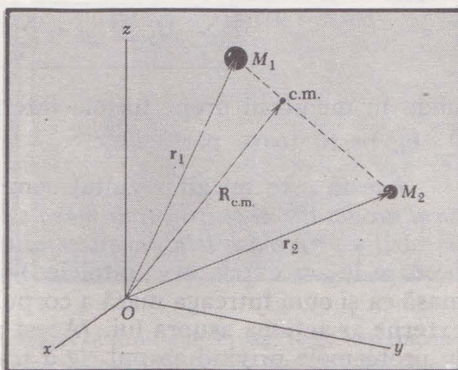


FIG. 6.2. Pentru două corpuri de mase M_1 și M_2 în pozițiile arbitrare $\mathbf{r}_1$ și $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{R}_{c.m.} = (M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2)/(M_1 + M_2)$.

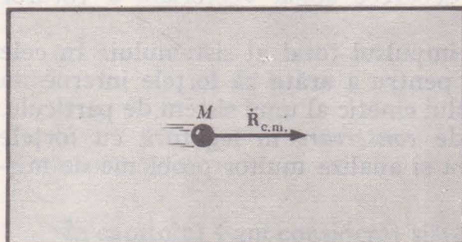


FIG. 6.3. (*a*). În absența forțelor externe, viteza centrului de masă este constantă. Aici un nucleu radioactiv cu viteza $\dot{\mathbf{R}}_{c.m.}$ este pe punctul de a se dezintegra.

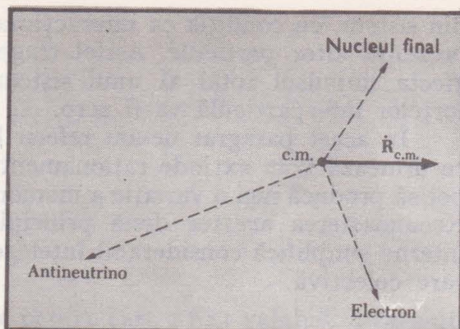


FIG. 6.3. (*b*) Nucleul se dezintegrează în trei particule care pornesc în direcții diferite. Totuși, viteza centrului de masă al acestor trei particule rămîne neschimbată.

Derivăm ecuația (6.2) în raport cu timpul pentru a obține viteza centrului de masă:

$$\dot{\mathbf{R}}_{c.m.} = \frac{\sum_n \dot{\mathbf{r}}_n M_n}{\sum_n M_n} = \frac{\sum_n \mathbf{v}_n M_n}{\sum_n M_n}, \tag{6.4}$$

dar $\sum_n \mathbf{v}_n M_n$ este tocmai impulsul total al sistemului. În absența forțelor externe, impulsul total este constant, astfel încît:

$$\dot{\mathbf{R}}_{c.m.} = \text{const.} \tag{6.5}$$

Aceasta este o proprietate remarcabilă a centrului de masă: *viteza centrului de masă este constantă în absența forțelor externe*. Aceasta este adevărat, de exemplu, în cazul unui nucleu radioactiv care se dezintegrează în zbor (vezi fig. 6.3 *a* și *b*) sau pentru un proiectil care explodează în fragmente într-o regiune în care nu acționează forțe.

Este ușor de arătat, din ecuația (6.4), că accelerația centrului de masă este determinată de forța externă totală care acționează asupra sistemului de particule. Dacă $\mathbf{F}_n$ este forța exercitată asupra particulei n, atunci, derivînd ecuația (6.4) în raport cu timpul, avem:

$$\boxed{\left(\sum_n M_n\right)\ddot{\mathbf{R}}_{c.m.} = \sum_n (M_n \dot{\mathbf{v}}_n) = \sum_n \mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{ext}} \tag{6.6}$$

unde în membrul drept forțele interne interparticulă sînt excluse din suma $\sum_n \mathbf{F}_n$ peste toate particulele.

Acesta este un alt rezultat semnificativ: *în prezența forțelor externe vectorul accelerație al centrului de masă este egal cu suma vectorială a forțelor externe, împărțită prin masa totală a sistemului*. Cu alte cuvinte, putem folosi metodele pe care le-am expus în capitolele 3—5 pentru a trata mișcarea centrului de masă ca și cum întreaga masă a corpului ar fi concentrată acolo și toate forțele externe ar acționa asupra lui. (Acest principiu este important în mod deosebit în problemele privind corpul rigid tratate în capitolul 8.) Ca un alt exemplu,

centrul de masă al Pămîntului și Lunii se mișcă pe o orbită aproximativ circulară în jurul Soarelui. Vom trece acum la ilustrarea utilității centrului de masă tratînd cîteva probleme importante de ciocnire. (Am rezolvat deja cîteva probleme în capitolele 3 și 4).

EXEMPLU

Ciocnirea particulelor care se unesc în urma ciocnirii[1] **(perfect neelastică).** Considerăm ciocnirea a două particule de mase M_1 și M_2 care se unesc și se mișcă solidar după ciocnire. Fie M_2 în repaus pe axa x înaintea ciocnirii și fie viteza $\mathbf{v}_1 = v_1\hat{\mathbf{x}}$ care descrie mișcarea lui M_1 înaintea ciocnirii.

(1) Descrieți mișcarea lui $M = M_1 + M_2$ după ciocnire. Figura 6.4 *a* și *b* ilustrează situația. Indiferent dacă ciocnirea este elastică sau neelastică impulsul total rămîne neschimbat. Ciocnirea considerată aici este neelastică. Componenta x a impulsului inițial este M_1v_1; componența x finală este $(M_1 + M_2)v$. Celelalte componente sînt zero. Din conservarea impulsului avem:

$$M_1v_1 = (M_1 + M_2)v \tag{6.7}$$

astfel încît viteza finală v este dată de:

$$v = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 \tag{6.8}$$

și, deoarece particulele se mișcă împreună, vectorul:

$$\mathbf{X}_{c.m.} = vt\hat{\mathbf{x}}, \quad t > 0$$

descrie mișcarea sistemului după ciocnire. În conformitate cu ecuația (6.5) aceeași relație

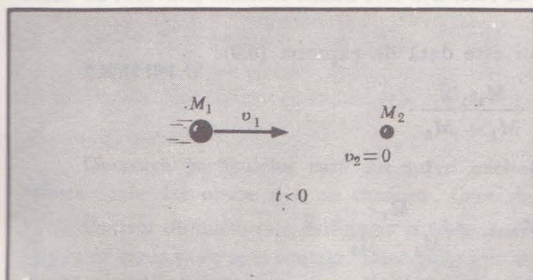


FIG. 6.4. (*a*). Chiar într-o ciocnire neelastică, impulsul trebuie să se conserve. Considerăm o ciocnire în care particulele se unesc în urma ciocnirii. Înainte de ciocnire $p_x = M_1v_1$.

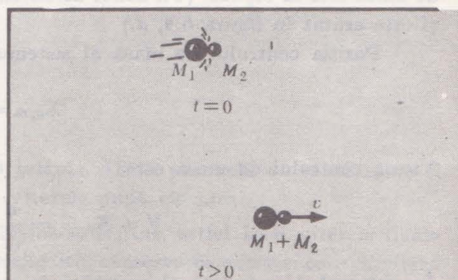


FIG. 6.4. (*b*) După ciocnire $p_x = M_1v_1 = (M_1 + M_2)v$, astfel încît $v = M_1v_1/(M_1 + M_2) < v_1$.

[1] Cazul particulelor de mase egale a fost tratat în capitolul 4 (pag. 143). Veți constata că este instructiv să calculați $\Delta\epsilon$ în ambele sisteme de referință pentru cazul general de aici.

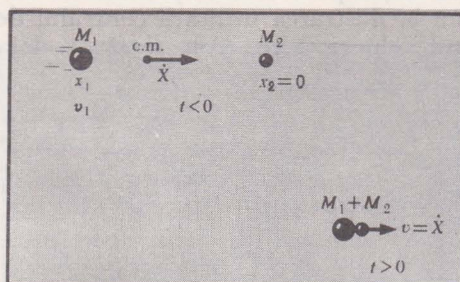


FIG. 6.4. (*c*) $X = (M_1x_1 + M_2x_2)/(M_1 \cdot M_2)$, astfel încît $\dot{X} = M_1v_1/(M_1 + M_2)$. $\dot{X}$ nu variază în timpul ciocnirii.

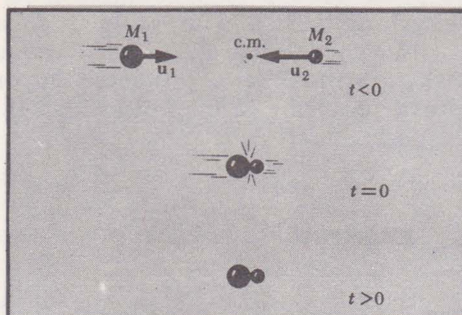


FIG. 6.4. (*d*) În sistemul de referință al centrului de masă, vitezele lui M_1 și M_2 înainte de ciocnire sînt $\mathbf{u}_1$, respectiv $\mathbf{u}_2$. După ciocnire, $(M_1 + M_2)$ este în repaus.

trebuie să descrie mișcarea centrului de masă în orice moment, înainte și după ciocnire; folosind egalitatea (6.7) avem:

$$\mathbf{X}_{c.m.} = vt\hat{\mathbf{x}} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 t\hat{\mathbf{x}} \tag{6.9}$$

relație ilustrată în figura 6.4,*c*.

(2) Care este raportul dintre energia cinetică după ciocnire și energia cinetică inițială? Energia cinetică E_{cf} după ciocnire este:

$$E_{cf} = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\frac{M_1^2}{(M_1 + M_2)^2}v_1^2 = \frac{M_1^2 v_1^2}{2(M_1 + M_2)}. \tag{6.10}$$

Energia cinetică inițială E_{ci} este egală cu $\frac{1}{2}M_1v_1^2$, astfel încît:

$$\frac{E_{cf}}{E_{ci}} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}. \tag{6.11}$$

Restul de energie apare în excitațiile interne și căldură, în sistemul compus după ciocnire. Cînd un meteorit de masă M_1 izbește pămîntul de masă M_2 și rămîne în contact cu el, practic toată energia cinetică a meteoritului apare sub formă de căldură în pămînt, deoarece $M_1 \ll M_1 + M_2$.

(3) Descrieți mișcarea înainte și după ciocnire în sistemul de referință în care centrul de masă este în repaus. (Un astfel de sistem de referință este numit *sistemul centrului de masă* și este arătat în figura 6.4, *d*.)

Poziția centrului de masă al sistemului este dată de expresia (6.9):

$$\mathbf{X}_{c.m.} = \frac{M_1v_1t\hat{\mathbf{x}}}{M_1 + M_2}.$$

Viteza centrului de masă este:

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{X}}_{c.m.} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}_{c.m.} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}v_1\hat{\mathbf{x}}.$$

În sistemul de referință al centrului de masă viteza inițială $\mathbf{u}_1$ a particulei 1 este:

$$\mathbf{u}_1 = v_1\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{V} = \left(1 - \frac{M_1}{M_1 + M_2}\right)v_1\hat{\mathbf{x}} = \frac{M_2}{M_1 + M_2}v_1\hat{\mathbf{x}}.$$

În sistemul de referință al centrului de masă viteza inițială $\mathbf{u}_2$ a particulei 2 este:

$$\mathbf{u}_2 = -\mathbf{V} = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 \hat{\mathbf{x}}.$$

De notat că:

$$M_1\mathbf{u}_1 + M_2\mathbf{u}_2 = \left(\frac{M_1M_2}{M_1 + M_2} v_1 - \frac{M_2M_1}{M_1 + M_2} v_1 \right) \hat{\mathbf{x}} = 0.$$

Se poate vedea avantajul sistemului de referință al centrului de masă; impulsurile particulelor sînt totdeauna egale și de sens contrar.

În timpul ciocnirii, particulele se unesc; noua particulă obținută are masa $M_1 + M_2$ și trebuie să fie în repaus în sistemul centrului de masă. În raport cu sistemul laboratorului, noua particulă are deci viteza $\mathbf{V}$ a centrului de masă, care este exact viteza din ecuația (6.8) obținută pe baza argumentului anterior.

EXEMPLU

Componentele transversale ale impulsului. Două particule de mase egale se mișcă inițial pe traiectorii paralele cu axa x și se ciocnesc. După ciocnire, se observă că una dintre particule are o valoare particulară $v_y(1)$ a componentei y a vitezei. Care este componenta y a vitezei celeilalte particule după ciocnire? (Amintim că fiecare componentă x, y, sau z a impulsului total se conservă separat.)

Înaintea ciocnirii, particulele se mișcau de-a lungul axei x, astfel încît componenta y a impulsului total este zero. Din conservarea impulsului, componenta y a impulsului total trebuie să fie zero și după ciocnire, astfel încît:

$$M[v_y(1) + v_y(2)] = 0$$

de unde:

$$v_y(2) = -v_y(1).$$

Nu putem calcula $v_y(1)$ fără a specifica traiectoriile inițiale și detaliile forțelor în timpul procesului de ciocnire.

EXEMPLU

Ciocnirea particulelor care pot suferi excitații interne. Două particule de mase egale și viteze egale dar opuse $\pm\mathbf{v}_i$ se ciocnesc. Care sînt vitezele după ciocnire?

Centrul de masă este în repaus și trebuie să rămînă în repaus, astfel încît vitezele finale $\pm\mathbf{v}_f$ sînt egale și de sens contrar. Dacă ciocnirea este elastică, conservarea energiei cere ca viteza finală v_f să fie egală cu viteza inițială v_i. Dacă una sau ambele particule sînt excitate intern prin ciocnire, atunci din conservarea energiei rezultă $v_f < v_i$. Dacă una sau ambele particule sînt inițial în stări excitate ale mișcării lor interne și în timpul ciocnirii ele transferă energia de excitare în energie cinetică, atunci v_f poate fi mai mare decît v_i.

EXEMPLU

Ciocnirea elastică generală a particulelor de mase diferite. Aceasta este o problemă celebră. O particulă de masă M_1 se ciocnește elastic cu o particulă de masă M_2 care inițial este în repaus în sistemul de referință al laboratorului. Traiectoria lui M_1 este deviată cu un unghi θ_1 prin ciocnire. Valoarea maximă posibilă a unghiului de împrăștiere θ_1 este determinată de legile conservării energiei și impulsului, independent de detaliile interacției dintre particule. Problema noastră este de a găsi $(\theta_1)_{max}$. Vom vedea că, la o anumită etapă a calculului, este convenabil să privim ciocnirea din sistemul de referință în care centrul de masă este în repaus.

Notăm vitezele inițiale in sistemul laboratorului (fig. 6.5) prin:

$$\mathbf{v}_1 = v_1\hat{\mathbf{x}}; \quad \mathbf{v}_2 = 0$$

și vitezele finale (după ciocnire) prin $\mathbf{v}_1'$ și $\mathbf{v}_2'$. Legea conservării energiei cere ca intr-o ciocnire elastică energia cinetică totală înainte de ciocnire să fie egală cu energia cinetică totală după ciocnire. Astfel:

$$\frac{1}{2}M_1v_1^2 = \frac{1}{2}M_1v_1'^2 + \frac{1}{2}M_2v_2'^2 \tag{6.12}$$

unde am ținut seamă de condiția inițială $\mathbf{v}_2 = 0$. Legea conservării impulsului aplicată componentei x a impulsului cere ca:

$$M_1v_1 = M_1v_1' \cos\theta_1 + M_2v_2' \cos\theta_2. \tag{6.13}$$

Dacă intervin numai două particule, procesul poate fi considerat a avea loc în întregime în planul xy. Legea conservării impulsului aplicată componentei y a impulsului dă:

$$0 = M_1v_1' \sin\theta_1 - M_2v_2' \sin\theta_2, \tag{6.14}$$

deoarece inițial componenta y a impulsului a fost zero.

Este perfect posibil, cu prețul însă al unor calcule greoaie, să rezolvăm ecuațiile (6.12)—(6.14) simultan pentru orice mărime care ne interesează. Aceste ecuații exprimă întregul conținut al legilor de conservare. Dar este considerabil mai elegant și mai instructiv să privim ciocnirea din sistemul de referință al centrului de masă. Întîi găsim viteza $\mathbf{V}$ a centrului de masă în raport cu sistemul laboratorului. Poziția centrului de masă este definită ca:

$$\mathbf{R}_{c.m.} = \frac{M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2}{M_1 + M_2},$$

după cum s-a arătat mai înainte in formula (6.3). Prin derivare, obținem viteza $\mathbf{V}$ a centrului de masă:

$$\dot{\mathbf{R}}_{c.m.} = \frac{M_1\dot{\mathbf{r}}_1 + M_2\dot{\mathbf{r}}_2}{M_1 + M_2}; \quad \mathbf{V} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\mathbf{v}_1 \tag{6.15}$$

unde am exprimat rezultatul in funcție de vitezele $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ înainte de ciocnire, cu $\mathbf{v}_2 = 0$ [Observați că aceasta este pur și simplu ecuația (6.4) scrisă pentru condițiile de acum.]

Notăm cu $\mathbf{u}_1$ și $\mathbf{u}_2$ vitezele inițiale în sistemul de referință care se mișcă solidar cu centrul de masă și cu $\mathbf{u}_1'$, $\mathbf{u}_2'$ vitezele finale. Vectorii viteză în sistemul de referință al laboratorului sînt legați de cei din sistemul centrului de masă (fig. 6.6) prin relațiile:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{V} \qquad & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 + \mathbf{V} \\ \mathbf{v}_1' &= \mathbf{u}_1' + \mathbf{V} \qquad & \mathbf{v}_2' &= \mathbf{u}_2' + \mathbf{V}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Legile de conservare ne permit să înțelegem imediat anumite caracteristici ale ciocnirii. Conservarea impulsului în sistemul centrului de masă cere ca unghiul de împrăștiere al particulei 1 să fie egal cu cel al particulei 2; adică, traiectoriile trebuie să fie coliniare atît înainte cît și după ciocnire. În caz contrar, centrul de masă nu ar putea rămîne în repaus în sistemul de referință pe care îl utilizăm, așa cum trebuie să rămînă, în absența unor forțe externe care să

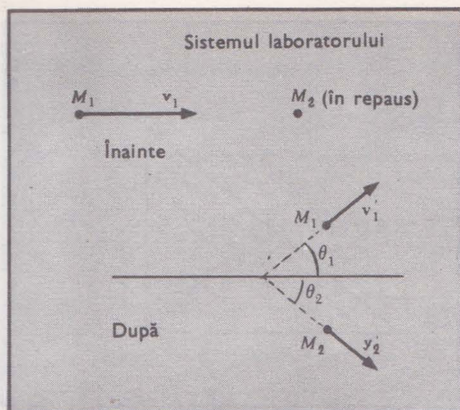


FIG. 6.5. O ciocnire între M_1 și M_2 nu este obligatoriu limitată la o singură dimensiune. În sistemul laboratorului, M_2 este în repaus înaintea ciocnirii.

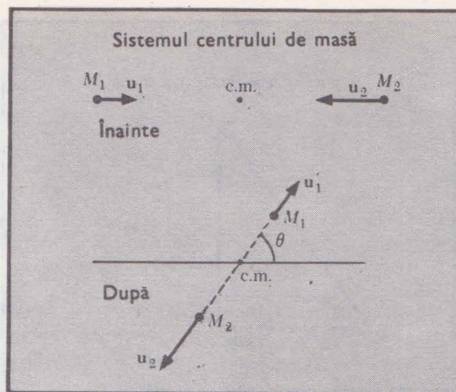


FIG. 6.6. În sistemul centrului de masă M_1 și M_2 trebuie să plece în direcții opuse după ciocnire. Toate unghiurile $0 \leq \theta \leq \pi$ sînt posibile, iar pentru o ciocnire elastică $|\mathbf{u}_1'| = |\mathbf{u}_1|$ și $|\mathbf{u}_2'| = |\mathbf{u}_2|$.

acționeze asupra particulelor. În plus, dacă energia cinetică se conservă, mărimea vitezelor în sistemul centrului de masă nu trebuie să varieze; astfel încît într-o ciocnire elastică $u_1' = u_1$ și $u_2' = u_2$. Descrierea cinematică în sistemul centrului de masă se constată a fi remarcabil de simplă, fără nici o restricție asupra unghiului de împrăștiere $\theta_{c\cdot m}$. impusă de legile de conservare. (Ultima afirmație nu este, în general, adevărată pentru unghiurile de împrăștiere θ_1 și θ_2 în sistemul laboratorului.)

Să revenim la sistemul laboratorului. Avem, scriind pentru comoditate θ în loc de $\theta_{c.m.}$:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{v_1' \sin \theta_1}{v_1' \cos \theta_1} = \frac{u_1' \sin \theta}{u_1' \cos \theta + V}$$

unde am folosit faptul că componenta y a vitezei finale a particulei 1 este identică în cele două sisteme de referință. Mai departe, $u_1 = u_1'$ presupunînd că ciocnirea este elastică, astfel încît:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + V/u_1}. \tag{6.17}$$

Ecuațiile (6.15) și (6.16) pot fi acum combinate pentru a da relațiile:

$$\mathbf{V} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{V}); \quad \mathbf{V} = \frac{M_1}{M_2}\mathbf{u}_1$$

de unde ecuația (6.17) devine:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + M_1/M_2}. \tag{6.18}$$

Figura 6.7 *a* și *b* ilustrează această expunere.

Vrem să aflăm valoarea lui $(\theta_1)_{max}$. Dacă $M_1 > M_2$, aceasta poate fi aflată grafic din ecuația (6.18) sau folosind calculul diferențial pentru a determina valoarea maximă a lui tg θ_1 ca funcție de θ. Vedem din relația (6.18) că pentru $M_1 > M_2$ numitorul nu poate fi niciodată

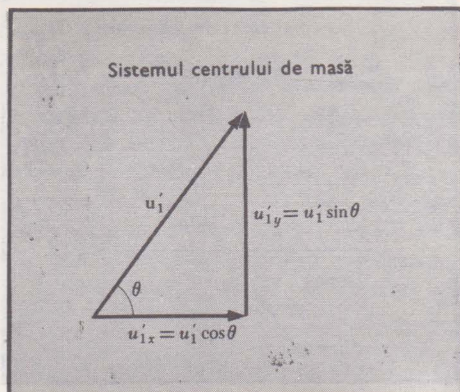


FIG 6.7 (*a*) Viteza finală u_1' a lui M_1 în sistemul centrului de masă este descompusă în componentele x și y, în figură.

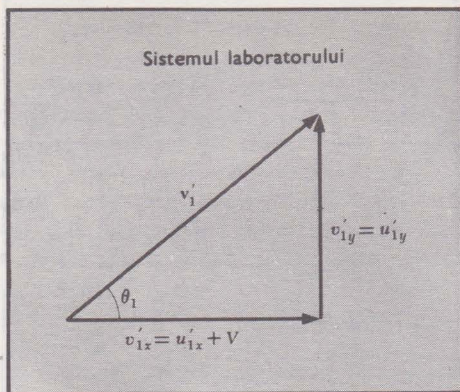


FIG. 6.7. (*b*) În sistemul laboratorului componentele x și y ale lui v_1' sînt cele indicate. Evident (amintiți-vă că $u_1' = u_1$)

$$\mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + V/u_1} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + M_1/M_2}.$$

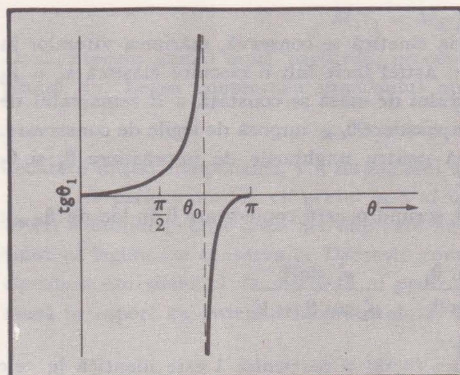


FIG. 6.8. (*a*). Pentru $M_1 < M_2$, $\mathrm{tg}\,\theta_1 = \sin\theta/(\cos\theta + M_1/M_2)$ tinde către infinit pentru $\theta = \theta_0 = \arccos(-M_1/M_2)$. Toate unghiurile $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ sînt posibile.

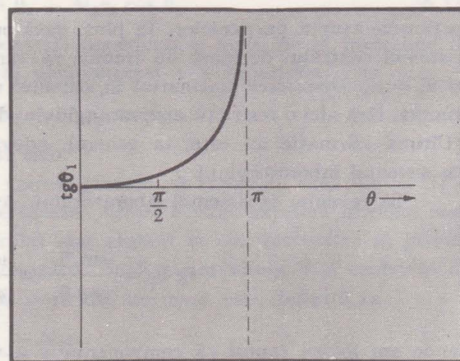


FIG. 6.8. (*b*) Pentru $M_1 = M_2$, $\mathrm{tg}\,\theta_1$ tinde către infinit pentru $\theta = \pi$. Astfel, toate unghiurile $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ sînt posibile ca rădăcini ale ecuației pentru $\mathrm{tg}\,\theta_1$.

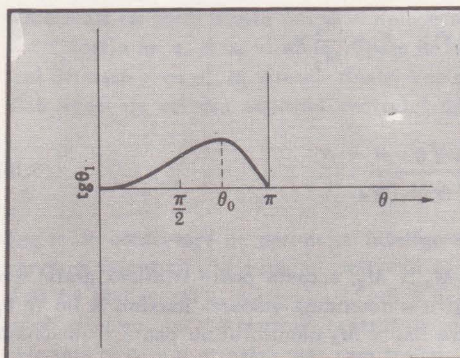


FIG. 6.8. (*c*) Pentru $M_1 > M_2$, $\mathrm{tg}\,\theta_1$ nu tinde niciodată către infinit. Astfel, $0 \leq \theta_1 \leq \arcsin(M_2/M_1) < \pi/2$.

zero și $(\theta_1)_{max}$ trebuie să fie mai mic decît $\frac{\pi}{2}$. Dacă $M_1 = M_2$, atunci $(\theta_1)_{max} = \frac{\pi}{2}$. Dacă $M_1 < M_2$, orice valoare a lui θ_1 este permisă. Figura 6.8, *a–c* ilustrează grafic aceste relații.

SISTEME CU MASĂ VARIABILĂ

În capitolul 3 am exprimat legea a doua a lui Newton sub forma:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

unde $\mathbf{p}$ este impulsul $M\mathbf{v}$. Pentru obiecte de masă constantă, aceasta devine relația familiară $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$, dar există o clasă de probleme de mecanică în care masa unui obiect în mișcare poate să nu fie constantă și în aceste cazuri este necesar să recunoaștem dependența de timp a lui M cînd exprimăm $d\mathbf{p}/dt$. Legea a doua devine, în acest caz:

$$\mathbf{F} = \frac{dM}{dt}\mathbf{v} + M\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{6.19}$$

Numeroase probleme interesante și importante sînt tratate pe baza ecuației (6.19), ca de pildă mișcarea rachetelor, frînarea mișcării sateliților de către atmosferă și mișcările unor obiecte cum ar fi lanțurile, pentru care porțiunea care se mișcă poate varia în timp. Vom analiza în continuare cîteva exemple.

EXEMPLU

Frînarea unui satelit datorită prafului cosmic. Pe un satelit aflat într-un spațiu lipsit de forțe se depune praf care staționează în cosmos, cu o viteză $dM/dt = cv$, unde M este masa și v viteza satelitului; c este o constantă care depinde de aria secțiunii transversale străbătute. Care este decelerația?

Considerăm problema din sistemul de referință în care praful interplanetar este în repaus (vezi fig. 6.9). Impulsul sistemului total constînd din satelit și praf este constant, deoarece nici o forță externă nu este prezentă în problemă. Ecuația (6.19) ne permite atunci să scriem:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(M\mathbf{v}) = \dot{M}\mathbf{v} + M\dot{\mathbf{v}} = 0$$

sau, deoarece mișcarea este unidimensională iar $\dot{M} = cv$, decelerația este:

$$\dot{v} = -\frac{cv^2}{M}.$$

(Un exemplu este problema 16 de la sfîrșitul acestui capitol.)

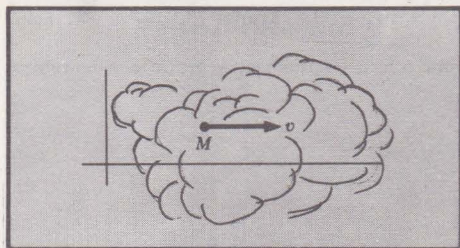


FIG. 6.9. Obiect mișcîndu-se printr-un nor de praf, raportat la sistemul de referință legat de nor.

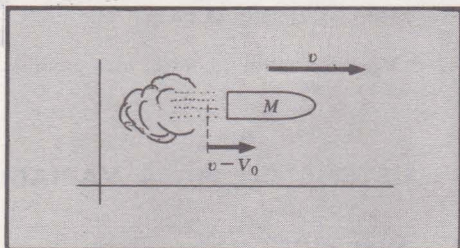


FIG. 6.10. Un vehicul se mișcă cu viteza v într-un sistem inerțial; gazul expulzat cu viteza de evacuare V_0 se mișcă cu viteza $v - V_0$.

Este posibil să privim această problemă și altfel, considerînd că o forță de rezistență datorată prafului acționează în mod constant și încetinește satelitul. Forța de rezistență va fi opusă (legea a treia a lui Newton) forței exercitate de către satelit asupra mediului de praf, in timp ce il străbate. La orice moment, forța exercitată asupra mediului va fi egală cu viteza de variație a impulsului *transmis* particulelor de praf, care este $v\dfrac{dM}{dt}$ sau cv^2. Forța de rezistență asupra satelitului este in consecință $-cv^2$, iar decelerația satelitului se va obține din legea a doua a lui Newton aplicată în mod obișnuit:

$$M\dot{v} = f_{rez} = -cv^2; \quad \dot{v} = -\frac{cv^2}{M}.$$

EXEMPLU

Problema vehiculului spațial. Un vehicul spațial proiectează în urma sa combustibil ars cu o viteză $\mathbf{V}_0$ in raport cu vehiculul; viteza de variație a masei vehiculului este $\dot{M} = -\alpha$, o constantă. Să se scrie și să se rezolve ecuația de mișcare a vehiculului spațial, neglijînd gravitația.

Fie $\mathbf{v}$ viteza vehiculului la timpul t. Viteza combustibilului raportată la un sistem de referință inerțial (*nu* sistemul vehiculului) este $-\mathbf{V}_0 + \mathbf{v}$. Presupunem că $\mathbf{V}_0$ și $\mathbf{v}$ sînt opuse, astfel încît problema este unidimensională, după cum se arată în figura 6.10.

În absența oricăror forțe externe, impulsul sistemului total constînd din vehicul și gazele arse este constant. Astfel $F = dp/dt = 0$ și putem scrie:

$$\frac{dp}{dt} = M\dot{v} - v\alpha + (v - V_0)\alpha = 0, \tag{6.20}$$

relație in care termenii au următoarele interpretări fizice:

$M\dot{v}$ = viteza cu care vehiculul cîștigă impuls datorită accelerării;

$-v\alpha$ = viteza cu care vehiculul pierde impuls datorită pierderii de masă;

$(v - V_0)\alpha$ = viteza cu care crește impulsul norului de gaze arse. Ecuația (6.20) se simplifică dînd:

$$M\dot{v} = \alpha V_0. \tag{6.21}$$

Deoarece viteza cu care are loc pierderea de masă este o constantă, $-\alpha$, masa vehiculului la timpul t este:

$$M = M_0 - \alpha t$$

unde M_0 este masa inițială la timpul $t = 0$. Ecuația (6.21) devine:

$$(M_0 - \alpha t)\dot{v} = \alpha V_0.$$

Pentru a obține viteza vehiculului ca funcție de timp exprimăm:

$$\dot{v} = \frac{\alpha V_0/M_0}{1 - \alpha t/M_0}$$

și integrăm, cu presupunerea că $v = v_0$ la $t = 0$, pentru a obține:

$$v = v_0 + V_0 \ln \frac{M_0}{M_0 - \alpha t}. \tag{6.22}$$

Termenul αt nu devine niciodată egal cu M_0, deoarece vehiculul nu constă numai din combustibil; dar el poate fi pînă la 90% combustibil. Ecuația (6.22) pune în evidență avantajul propulsării combustibilului cu viteză mare. Maximum de eficiență în propulsare ar fi obținut cu fotoni, adică lumină, pentru care $V_0 = c$. Dar, pe de altă parte, este greu să se epuizeze în acest fel o masă mare de combustibil!

EXEMPLU

Forța datorată unui lanț în cădere. O ilustrare familiară este furnizată de forța exercitată asupra unei platforme staționare de către un lanț uniform și flexibil suspendat vertical care cade pe platformă. Considerăm că un astfel de lanț este suspendat inițial de unul din capete, celălalt capăt atingînd platforma. În figura 6.11 lanțul este arătat imediat după ce este lăsat liber, adică după ce a coborît pe o distanță s și o porțiune din lanț de această lungime a căzut pe platformă.

Forța totală îndreptată în sus, exercitată de către platformă asupra lanțului trebuie, pe de o parte, să suporte partea din lanț care a ajuns în repaus și, pe de altă parte, să reducă în mod continuu la zero impulsul elementelor de lanț care sosesc. Aceste două contribuții sînt exprimate prin [1]:

$$f = \rho g s + \rho \dot{s}^2$$

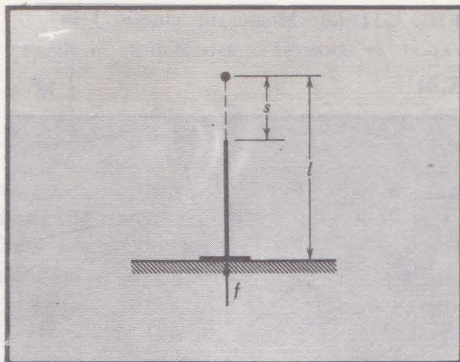


FIG. 6.11. Un lanț în cădere, de densitate liniară ρ. În intervalul de timp dt un element de masă ρds ajunge pe platformă, mișcîndu-se cu viteza $\dot{s}$. Astfel, viteza de variație a impulsului lanțului datorită căderii pe platformă este $\rho(ds/dt) \cdot \dot{s}$ sau $\rho\dot{s}^2$. Platforma trebuie, de asemenea, să suporte greutatea $\rho g s$ a porțiunii de lanț căzute.

[1] $(\rho ds)ds/dt$ este impulsul masei ρds care este redus la zero în timpul dt. Deci, viteza de variație a impulsului $= \rho(ds/dt) \cdot ds/dt = \rho\dot{s}^2$.

unde ρ este densitatea liniară (adică masa pe unitatea de lungime) a lanțului. Dar, deoarece partea în cădere liberă a lanțului are accelerația g, avem $\dot{s}^2 = 2gs$. În consecință:

$$f = 3\rho gs.$$

Astfel, la orice moment, platforma exercită o forță de trei ori mai mare decît greutatea porțiunii din lanț care a căzut pe ea.

(Este instructiv să priviți această problemă in alte moduri, ca de exemplu considerind accelerația centrului de masă al lanțului sub influența gravitației și a forței exercitată asupra sa de către platformă. Rezultatul de mai sus se obține ușor.)

CONSERVAREA MOMENTULUI CINETIC

Ne ocupăm acum de importantul concept de *moment cinetic.* Momentul cinetic **J** al unei singure particule în raport cu un punct fix arbitrar (fix într-un sistem de referință *inerțial*) luat ca origine este definit ca:

$$\boxed{\mathbf{J} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \equiv \mathbf{r} \times M\mathbf{v}} \tag{6.23}$$

unde **p** este impulsul (vezi fig. 6.12 *a* și *b*). Unitatea pentru momentul cinetic în SI este $kg \cdot m^2/s$ sau $J \cdot s$ iar în CGS $g \cdot cm^2/s$ sau $erg \cdot s$. Componenta lui **J** de-a lungul oricărei drepte (sau axe) trecînd prin punctul de referință fix este numită adeseori momentul cinetic al particulei în raport cu această axă.

Dacă forța **F** acționează asupra particulei, definim *momentul forței* în raport cu același punct fix, ca:

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \tag{6.24}$$

FIG. 6.12 (*a*). Momentul cinetic J *în raport cu punctul O* este definit în figură.

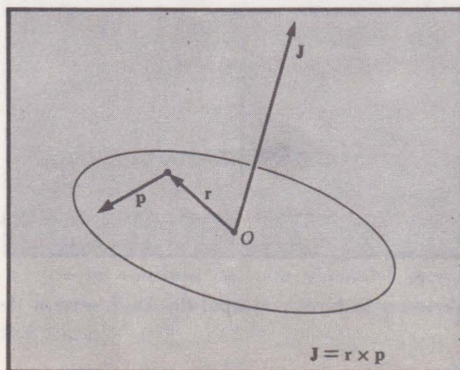
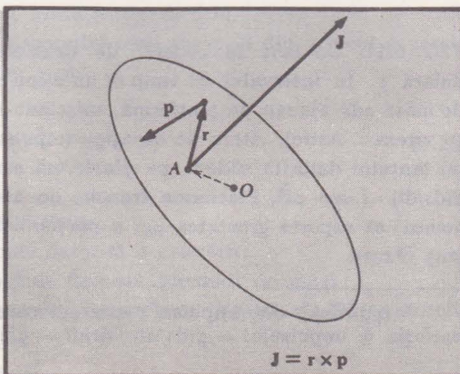


FIG. 6.12. (*b*) Momentul cinetic *în raport cu alt punct A* este diferit chiar pentru *aceeași* particulă, cu același impuls p.



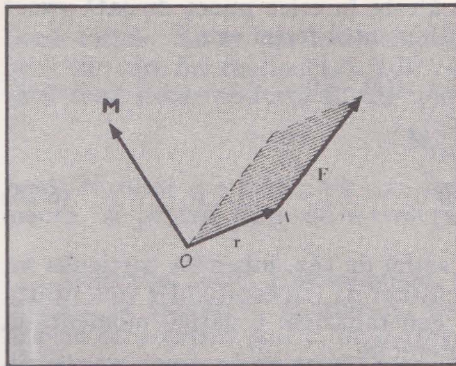


FIG. 6.13. Momentul **M** efectiv în punctul O, al forței **F** aplicate în punctul A, avînd vectorul de poziție **r**, este $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. **M** are direcția normalei la planul definit de $\mathbf{r}$ și **F**.

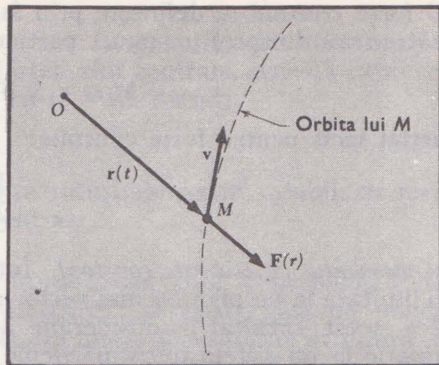


FIG. 6.14. Particula M, supusă unei forțe centrale de respingere $\mathbf{F}(r)$, cu centrul în O. Deoarece momentul forței $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$, avem $\mathbf{J} = \text{const}$. **J** este un vector perpendicular pe planul hîrtiei.

(Această mărime a apărut, după cum vă puteți aminti, în capitolul 2.) Unitatea pentru momentul forței în SI este $\text{N} \times \text{m}$ iar în CGS $\text{dyn} \times \text{cm}$. Figura 6.13 ilustrează relația (6.24). Derivînd ecuația (6.23), avem:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Dar:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times M\mathbf{v} = 0$$

și, folosind legea a doua a lui Newton într-un sistem de referință inerțial:

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}.$$

Obținem astfel rezultatul important:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{M}} \qquad (6.25)$$

Viteza de variație în timp a momentului cinetic este egală cu momentul forței.

Dacă momentul forței $\mathbf{M} = 0$, atunci $\mathbf{J} = \text{const}$. *Momentul cinetic este constant în absența unui moment al forței;* aceasta este o formulare a *legii conservării momentului cinetic.* De remarcat că legea conservării momentului cinetic nu se referă numai la particule care se mișcă pe orbite închise. Ea se aplică în egală măsură în cazul orbitelor deschise (ca în fig. 6.14) și al proceselor de ciocnire.

Considerăm o particulă supusă unei forțe centrale de forma:

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} f(r).$$

O forţă *centrală* se defineşte prin faptul că este în orice punct dirijată exact către (sau dinspre) un punct particular. Momentul forţei este:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} f(r) = 0$$

astfel încît pentru forţe centrale:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 \qquad (6.26)$$

şi momentul cinetic este constant. Într-un astfel de caz, mişcarea particulei va fi limitată la un plan normal vectorului constant **J**. (În capitolul 9 vom utiliza des acest rezultat.) Considerăm acum generalizarea ecuaţiei momentului cinetic la un sistem de N particule în interacţie.

Momentele forţelor interne au rezultanta egală cu zero. Forţele de interacţiune care pot fi prezente între particulele unui sistem dau naştere unor momente interne. Vom arăta acum că acestea au o rezultantă nulă, astfel încît numai momentele forţelor externe pot modifica momentul cinetic al unui sistem de particule.

Incluzînd toate forţele, scriem momentul total al forţelor:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \qquad (6.27)$$

unde prin i sînt indiciate particulele sistemului, iar n este numărul total al particulelor care compun sistemul. Dar forţa $\mathbf{F}_i$ asupra particulei i este datorată parţial agenţilor externi sistemului şi parţial interacţiilor ei cu alte particule; astfel:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i + \sum_{j=1}^{n}{}' \mathbf{f}_{ij}$$

unde $\mathbf{f}_i$ reprezintă forţa externă iar $\mathbf{f}_{ij}$ este forţa exercitată asupra particulei i de către particula j. Notaţia Σ' indică faptul că termenul $j = i$ este exclus deoarece forţa unei particule asupra ei însăşi nu are sens aici. Aceasta ne permite să scriem ecuaţia (6.27) sub forma:

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{f}_i + \sum_j{}' \mathbf{f}_{ij}\right) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i + \sum_i \sum_j{}' \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}$$

unde ultimul termen cu suma dublă este suma vectorială a momentelor forţelor interne ale sistemului, pe care o vom nota $\mathbf{M}_{int}$.

O examinare mai atentă a expresiei lui $\mathbf{M}_{int}$ arată că aceasta poate fi descompusă într-o sumă dublă de perechi de termeni:

$$\mathbf{M}_{int} = \sum_i \left[\sum_j{}' (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji})\right] \qquad (6.28)$$

unde pentru fiecare valoare a lui i sumăm peste toate valorile lui j, excluzînd $j = i$. (Această descompunere se recunoaşte uşor tratînd un sistem constînd dintr-un număr mic de particule; vezi probl. 5.) Dar, în conformitate cu legea a treia a lui Newton, $\mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f}_{ij}$ şi ecuaţia (6.28) devine:

$$\mathbf{M}_{int} = \sum \left[\sum_j{}' (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij}\right].$$

Dacă forţele dintre particule sînt dirijate de-a lungul direcţiei care uneşte perechile care interacţionează, adică dacă forţele sînt centrale, această expresie va fi zero, deoarece forţa $\mathbf{f}_{ij}$ este paralelă cu $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Astfel:

$$\mathbf{M}_{int} = 0. \tag{6.29}$$

Acest rezultat (pe care nu-l vom demonstra totuşi aici) este valabil, de asemenea, şi pentru forţe de interacţie necentrale.

Momentul forţei gravitaţionale. O chestiune importantă în problemele de mişcare la suprafaţa pămîntului este următoarea: se poate găsi un punct într-un corp extins (adică, un corp compus din mase punctiforme sau dintr-o distribuţie continuă de masă), astfel încît momentul tuturor forţelor gravitaţionale în raport cu acest punct să fie zero? De exemplu, dacă un băţ uniform este fixat la un capăt, forţa gravitaţională va avea un moment în raport cu acest capăt, cu excepţia cazului în care băţul este vertical. Unde trebuie fixat băţul astfel încît momentul să fie nul? Evident, în acest caz simplu băţul trebuie fixat în centru, dar să tratăm problema în cazul general.

Considerăm un punct O, ca în figura 6.15:

$$\mathbf{M}_0 = \sum \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g}.$$

Deoarece $\mathbf{g}$, acceleraţia gravitaţională, este constantă, putem rescrie această expresie ca:

$$\mathbf{M}_0 = (\sum m_i\mathbf{r}_i) \times \mathbf{g}.$$

Dar:

$$\sum m_i\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{c.m.} \cdot \sum m_i.$$

Prin urmare, dacă O este centrul de masă:

$$\sum m_i\mathbf{r}_i = 0 \quad \text{şi} \quad \mathbf{M}_0 = 0.$$

Acest punct este numit adeseori centru de greutate; el este identic cu centrul de masă cu condiţia ca acceleraţia gravitaţională $\mathbf{g}$ să fie aceeaşi în orice punct al corpului.

Dacă punctul nu este centrul de masă, care va fi valoarea lui $\mathbf{M}$? Ştim că:

$$\sum \mathbf{F}_i = \sum m_i\mathbf{g} = M\mathbf{g} = \mathbf{F}_e \tag{6.30}$$

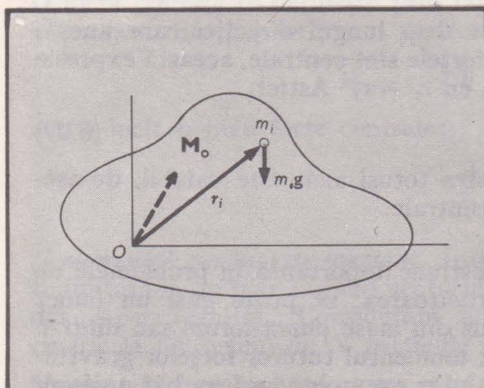
unde M este masa totală. Se poate exprima momentul în raport cu un punct A în figura 6.16 simplu, în funcţie de această forţă $M\mathbf{g}$?

$$\mathbf{M}_A = \sum \mathbf{r}_{Ai} \times m_i\mathbf{g} = \sum(\mathbf{R}_{AO} + \mathbf{r}_{Oi}) \times m_i\mathbf{g} = \mathbf{R}_{AO} \times \sum m_i\mathbf{g} =$$
$$= \mathbf{R}_{AO} \times M\mathbf{g} = \mathbf{R}_{c.m.} \times M\mathbf{g} \tag{6.31}$$

unde am folosit faptul că $\Sigma m_i\mathbf{r}_{Oi} = 0$, deoarece punctul O este centrul de masă. Vedem, aşadar, că efectul total al forţelor de greutate poate fi înlocuit prin acela al unei singure forţe $M\mathbf{g}$ acţionînd în centrul de masă (vezi probl. 6).

Momentul cinetic în raport cu centrul de masă. Momentul cinetic total al unui sistem de particule în raport cu un punct arbitrar fix într-un sistem de referinţă inerţial, luat ca origine, este, din ecuaţia (6.23)

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{N} M_i\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i. \tag{6.32}$$



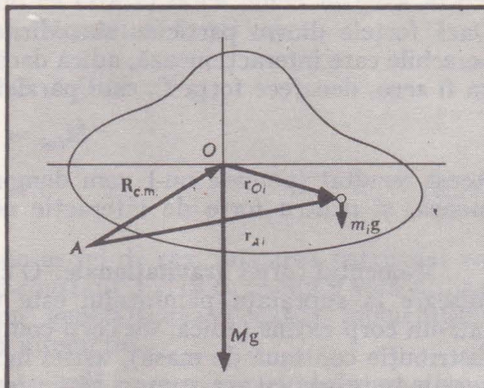


FIG. 6.15. Momentul forţei gravitaţionale, $m_i g$, în raport cu O este $\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}$.

FIG. 6.16. Momentul forţei gravitaţionale în raport cu A poate fi exprimat ca $\mathbf{R}_{c.m.} \times M\mathbf{g}$, unde O este centrul de masă.

Ca şi în cazul unei singure particule, valoarea lui $\mathbf{J}$ depinde de punctul pe care îl alegem ca origine O. Notînd cu $\mathbf{R}_{c.m.}$ vectorul de poziţie al centrului de masă în raport cu originea O, scriem $\mathbf{J}$ într-o formă convenabilă şi importantă, adunînd şi scăzînd cantitatea:

$$\sum_i M_i \mathbf{R}_{c.m.} \times \mathbf{v}_i$$

la expresia din ecuaţia (6.32). Astfel:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{N} M_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{c.m.}) \times \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{N} M_i \mathbf{R}_{c.m.} \times \mathbf{v}_i = \mathbf{J}_{c.m.} + \mathbf{R}_{c.m.} \times \mathbf{P} \quad (6.33)$$

unde $\mathbf{J}_{c.m.}$ este momentul cinetic *în raport* cu centrul de masă iar $\mathbf{P} \equiv \Sigma M_i \mathbf{v}_i$ este impulsul total. Termenul $\mathbf{R}_{c.m.} \times \mathbf{P}$ este momentul cinetic legat de mişcarea centrului de masă în jurul originii. Acest termen depinde de alegerea originii, în timp ce $\mathbf{J}_{c.m.}$ este independent de această alegere. În fizica moleculei, a atomului sau a particulelor elementare este util să numim $\mathbf{J}_{c.m.}$ momentul cinetic de *spin* sau simplu *spin*.

Utilizînd $\mathbf{M}_{int} = 0$, avem din ecuaţiile (6.25) şi (6.33):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{J}_{tot} = \mathbf{M}_{ext} \quad (6.34)$$

$$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J}_{c.m.} + \mathbf{R}_{c.m.} \times \mathbf{P} \quad (6.35)$$

Aici $\mathbf{J}_{c.m.}$ este momentul cinetic în raport cu centrul de masă, în timp ce $\mathbf{R}_{c.m.} \times \mathbf{P}$ este momentul cinetic al centrului de masă în raport cu originea arbitrară. Este, de obicei, o idee foarte bună să alegem originea în centrul de masă. Atunci ecuaţia (6.34) poate fi scrisă ca:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{J}_{c.m.} = \mathbf{M}_{ext}.$$

Dacă nu acţionează forţe externe, atunci $\mathbf{M}_{ext} = 0$, iar $\mathbf{J}_{c.m.}$ este constant.

Am văzut că mişcarea centrului de masă este determinată de forţa externă totală care acţionează asupra corpului. Vedem acum că rotaţia în jurul centrului de masă este determinată de momentul total al forţelor externe. (În capitolul 8, vom utiliza în mod deosebit acest rezultat.)

Semnificaţia geometrică a momentului cinetic al unei particule aflate pe o orbită care înconjoară originea este sugerată în figura 6.17. Vectorul arie $\Delta\mathbf{S}$ al triunghiului este dat de:

$$\Delta\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}.$$

Atunci:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2M}\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{1}{2M}\mathbf{J}. \tag{6.36}$$

Am văzut că, în cazul forţelor centrale, pentru o alegere convenabilă a originii, $\mathbf{J} =$ constant.

Dacă într-o problemă de mişcare a unei planete originea este luată în Soare, atunci, neglijînd perturbaţiile produse de alte planete, momentul cinetic al planetei este constant. În cazul forţelor centrale, vedem din ecuaţiile (6.26) şi (6.36) că:

1. Orbita se află conţinută într-un plan;
2. Viteza cu care este măturată aria este constantă — aceasta este una dintre cele trei legi ale lui Kepler (discutate în capitolul 9).

Primul rezultat provine din faptul că $\mathbf{r}$ şi $\Delta\mathbf{r}$ sînt într-un plan perpendicular pe $\mathbf{J}$ iar $\mathbf{J}$ este constant în mărime şi direcţie într-un cîmp central.

Planetele se mişcă pe orbite eliptice în jurul Soarelui care se află într-un focar. Pentru ca momentul cinetic să se conserve, fiecare planetă trebuie să se mişte mai repede în punctul de apropiere maximă decît în punctul cel mai îndepărtat de Soare. Acest rezultat decurge din faptul că în aceste puncte $\mathbf{r}$ este perpendicular pe $\mathbf{v}$ şi momentul cinetic este Mvr. Din conservarea momentului cinetic valorile lui Mvr în aceste puncte trebuie să fie egale, astfel încît valoarea mai mică a lui r este asociată cu o valoare mai mare a lui v (vezi fig. 6.18).

Pentru o particulă care se mişcă pe o orbită circulară, viteza $\mathbf{v}$ este perpendiculară pe $\mathbf{r}$, astfel încît:

$$J = Mvr = M\omega r^2. \tag{6.37}$$

Pentru o particulă care se deplasează pe o dreaptă aflată la distanţa b de origine, studentul va trebui să demonstreze singur că:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times M\mathbf{v} = Mvb\hat{\mathbf{u}}$$

unde $\hat{\mathbf{u}}$ este un vector unitate perpendicular pe planul definit de dreapta pe care are loc mişcarea şi de origine.

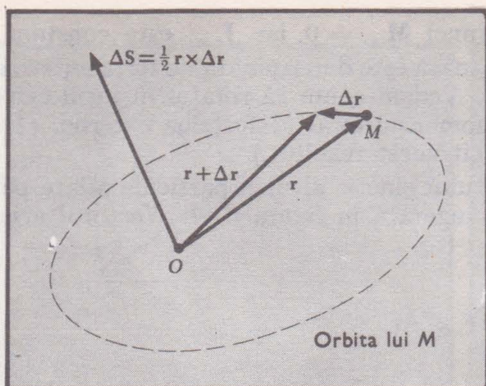


FIG. 6.17. Semnificația geometrică a momentului cinetic în funcție de aria măturată în unitatea de timp.

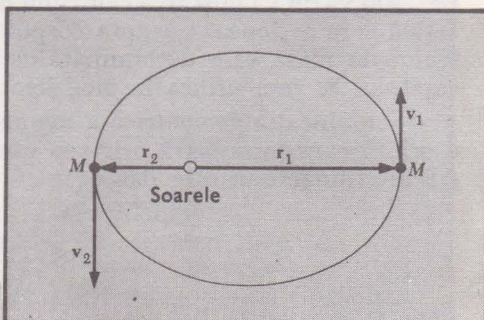


FIG. 6.18. Planeta M are moment cinetic constant în raport cu Soarele. Astfel, $Mr_2v_2 = Mr_1v_1$, unde r_1 = cea mai mare distanță pînă la Soare și r_2 = cea mai mică distanță pînă la Soare. Toate orbitele planetare au excentricități mult mai mici decît este indicat aici. Figura este exagerată, pentru claritate.

EXEMPLU

Împrăștierea protonului pe un nucleu greu. Un proton se apropie de un nucleu foarte greu de sarcină Ze. La distanță infinită de nucleu protonul are energia $\frac{1}{2}M_pv_0^2$. Dreapta obținută prin *extrapolarea liniară* la distanțe mici a traiectoriei de la distanțe mari ar trece la o distanță minimă b de nucleu, ca în figura 6.19. Această distanță este numită *parametru de ciocnire*. Care este distanța de maximă apropiere a protonului pe orbita reală? (Masa nucleului greu se consideră infinită, astfel încît energia sa de recul poate fi neglijată, adică nucleul poate fi considerat staționar.)

Momentul cinetic inițial al protonului în raport cu nucleul este M_pv_0b, unde v_0 este viteza inițială a protonului. La distanța de apropiere maximă, notată cu s, momentul cinetic este M_pv_ss, unde v_s este viteza în acest punct. Forța este centrală, astfel încît momentul cinetic se conservă și deci:

$$M_pv_0b = M_pv_ss, \quad v_s = \frac{v_0b}{s}$$

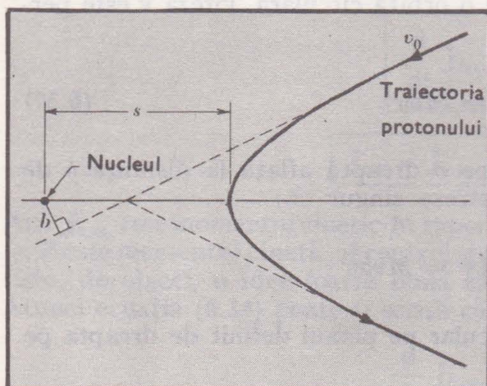


FIG. 6.19. Mișcarea unui proton în cîmpul coulombian al unui nucleu greu. Traiectoria este o hiperbolă (vezi cap. 9). Distanța de maximă apropiere este s. Parametrul de ciocnire b este distanța dintre nucleu și extrapolarea liniară a porțiunii inițiale a traiectoriei.

Subliniem că am considerat nucleul greu în repaus.

Energia protonului se conservă de asemenea în ciocnire. Energia inițială este în întregime cinetică și este egală cu $\frac{1}{2} M_p v_0^2$. Energia în punctul de maximă apropiere este:

$$\frac{1}{2} M_p v_s^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 s}$$

unde primul termen este energia cinetică iar cel de-al doilea energia potențială. Astfel, legea conservării energiei ne spune că:

$$\frac{1}{2} M_p v_s^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 s} = \frac{1}{2} M_p v_0^2.$$

Eliminîndu-l pe v_s, obținem:

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 s} = \frac{1}{2} M_p v_0^2 \left[1 - \left(\frac{b}{s} \right)^2 \right].$$

Această ecuație poate fi rezolvată în raport cu s. (Observăm că legile de conservare ne-au spus o mulțime de lucruri despre procesul de ciocnire.) În sistemul CGS ultimele trei expresii devin

$$\frac{1}{2} M_p v_s^2 + \frac{Ze^2}{s}; \quad \frac{1}{2} M_p v_s^2 + \frac{Ze^2}{s} = \frac{1}{2} M_p v_0^2 \quad \text{și} \quad \frac{Ze^2}{s} = \frac{1}{2} M_p v_0^2 \left[1 - \left(\frac{b}{s} \right)^2 \right].$$

(Metodele din capitolul 9 dau soluția completă a acestei probleme.)

Invarianța la rotații. Exact la fel cum am găsit că legea conservării impulsului a fost o consecință a invarianței galileene și a conservării energiei, putem deduce că legea conservării momentului cinetic este o consecință a invarianței energiei potențiale față de rotația sistemului de referință (sau a sistemului fizic însuși). Dacă există un moment nenul al forțelor externe, vom efectua, în general, un lucru mecanic împotriva acestui moment, pentru a roti sistemul. Dacă efectuăm lucru mecanic, energia potențială trebuie să varieze. Dacă energia potențială U este nemodificată în timpul rotației, nu există moment al forțelor externe. Aceasta implică faptul că momentul cinetic se conservă.

Raționamentul se poate prezenta analitic. Considerăm efectul unei rotații asupra unui sistem de particule, prin care vectorul de poziție $\mathbf{r}$ al fiecărei particule este transformat în $\mathbf{r}'$. Lungimea lui $\mathbf{r}$ rămîne, desigur, neschimbată. Afirmăm că legea conservării momentului cinetic este o consecință a relației:

$$U(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \ldots, \mathbf{r}_N') = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N).$$

Această relație implică restricții asupra modului în care U depinde de vectorii $\mathbf{r}$. O posibilitate de a satisface relația este ca U să depindă numai de diferențele vectoriale ale vectorilor $\mathbf{r}$, astfel că pentru un sistem simplu de numai două particule putem scrie:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Operația de rotație schimbă direcția lui $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ dar nu și mărimea sa. Funcția U va fi invariantă dacă depinde doar de mărimea diferenței, adică de distanța care separă particulele și nu de direcția vectorului de separare; astfel:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|).$$

Această relaţie este echivalentă cu o formulare a omogenităţii şi izotropiei spaţiului.

Pentru o funcţie energie potenţială de această formă se verifică faptul că $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, şi că aceste forţe sînt dirijate de-a lungul dreptei $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Astfel, forţa este centrală şi momentul forţei este nul. Aceasta asigură că momentul cinetic se va conserva. Pentru N particule, invarianţa la rotaţii a energiei potenţiale este asigurată dacă U depinde numai de mărimile distanţelor dintre particule.

Potenţialul resimţit de un electron sau ion individual într-un cristal nu este invariant la rotaţii, deoarece cîmpul electric produs de ceilalţi ioni în cristal este puternic neuniform sau neomogen. Aşadar, nu ne vom aştepta să găsim, în general, o lege de conservare pentru momentul cinetic al păturilor electronice ale unui ion într-un cristal, cu toate că momentul cinetic se conservă pentru acelaşi ion considerat în spaţiul liber. Neconservarea momentului cinetic electronic al ionilor în cristale a fost observată în studii asupra ionilor paramagnetici în cristale şi efectul se numeşte *îngheţarea* momentului cinetic orbital [1].

Momentul cinetic $\mathbf{J}$ al Pămîntului este constant în raport cu Soarele considerat ca origine, deoarece $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ pentru orice masă punctiformă de pe Pămînt, unde $\mathbf{F}$ este forţa gravitaţională care acţionează între Soare şi masa punctiformă.

EXEMPLU

Acceleraţia unghiulară care însoţeşte contracţia. O particulă de masă M este legată de un fir (fig. 6.20) şi constrînsă să se mişte într-un plan orizontal (planul liniei întrerupte). Particula se roteşte cu viteza v_0 cînd lungimea firului este r_0. Ce lucru mecanic se efectuează cînd firul este scurtat pînă la lungimea r?

Forţa exercitată asupra particulei de către fir este radială, astfel încît *momentul forţei este zero*, în timp ce lungimea firului este micşorată.

În consecinţă, momentul cinetic trebuie să rămînă constant cînd firul este scurtat:

$$Mv_0r_0 = Mvr. \tag{6.38}$$

Energia cinetică în r_0 este $\frac{1}{2}Mv_0^2$; în r ea a crescut la:

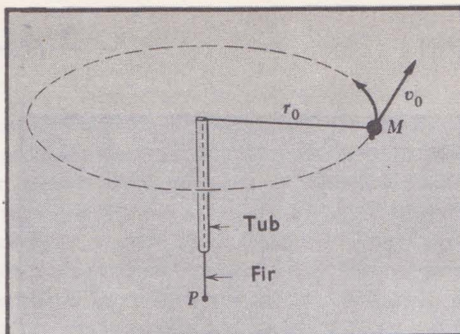
$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \tag{6.39}$$

deoarece de mai sus rezultă $v = v_0r_0/r$. În consecinţă, lucrul mecanic L efectuat din exterior pentru a scurta firul de la r_0 la r este:

$$L = \frac{1}{2}Mv_0^2\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 1\right].$$

[1] Se foloseşte termenul „îngheţare" deoarece neconservarea momentului cinetic face ca, de obicei, una din componentele sale, de exemplu proiecţia pe axa z, să fie oscilantă în jurul valorii zero (vezi Ch. Kittel, Introducere în fizica corpului solid, Ed. tehnică, Bucureşti, 1972, pagina 544). (N.T.)

FIG. 6.20. Un corp de masă M descrie o mişcare circulară de rază r_0 şi viteză v_0. El este legat de un fir care trece printr-un tub. Distanţa r_0 poate fi micşorată trăgînd de fir în punctul P



Acest lucru mecanic poate fi calculat direct din:

$$\int_{r_0}^{r} \mathbf{F}_{cp} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{r_0}^{r} F_{cp} dr.$$

Vedem că momentul cinetic acţionează asupra mişcării radiale ca o forţă efectivă de respingere: noi trebuie să efectuăm un lucru mecanic *suplimentar* asupra particulei pentru a o aduce de la distanţe mari la distanţe mici *dacă* cerem ca momentul cinetic să se conserve în timpul acestui proces.

Comparaţi această comportare cu aceea a unei particule în rotaţie la capătul unui fir care se înfăşoară liber pe un băţ fix, neted, de diametru finit. De ce energia cinetică este de astă dată constantă în timp ce firul se înfăşoară? (Vezi probl. 12 de la sfîrşitul capitolului.)

EXEMPLU

Forma galaxiei. Rezultatul exemplului precedent are probabil o legătură cu forma galaxiei. Să considerăm o masă foarte mare de gaz M avînd iniţial un anumit moment cinetic [1], ca în figura 6.21,*a*. Gazul se contractă din cauza interacţiei sale gravitaţionale. Pe măsură ce volumul ocupat de gaz devine din ce în ce mai mic, conservarea momentului său cinetic implică o creştere a vitezei unghiulare şi deci energia sa cinetică creşte. Dar tocmai am văzut că pentru a produce o creştere a vitezei unghiulare este necesar un lucru mecanic. De unde provine această energie cinetică? Ea poate proveni numai din energia gravitaţională a gazului.

Pentru a rezolva probleme de acest tip, fizicienii folosesc adesea consideraţii legate de energie. O particulă de masă M_1 în regiunile exterioare ale galaxiei va avea o energie potenţială gravitaţională datorată interacţiei sale cu galaxia de ordinul de mărime:

$$-\frac{GM_1M}{r}, \qquad (6.40)$$

unde r este distanţa pînă în centrul galaxiei iar M este masa galaxiei. Cînd r devine din ce în ce mai mic, această energie potenţială gravitaţională devine din ce în ce mai negativă, dar energia cinetică din ecuaţia (6.39) devine din ce în ce mai pozitivă; de fapt, ea devine pozitivă mai rapid decît devine negativă expresia (6.40). Tratăm această energie cinetică dependentă de rază ca şi cum ar fi o contribuţie la energia potenţială şi o numim *energie potenţială centrifugă* (vezi probl. 13). Condiţia de echilibru este minimul sumei celor doi termeni, după

[1] Nu este posibil la nivelul actual de cunoştinţe să se poată spune de unde a provenit gazul şi nici de ce o masă dată de gaz a trebuit să aibă un moment cinetic. O cantitate de materie fără moment cinetic se va condensa ca o sferă.

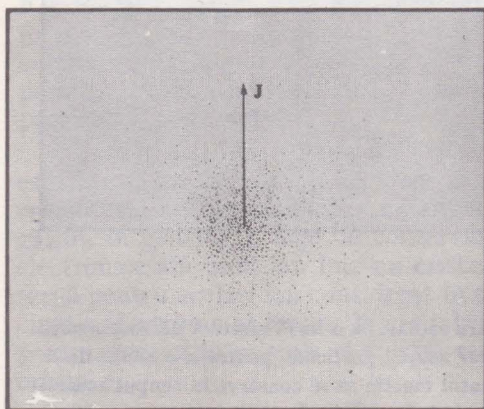


FIG. 6.21, (*a*). Un nor inițial, difuz, de gaz, avînd un anumit moment cinetic.

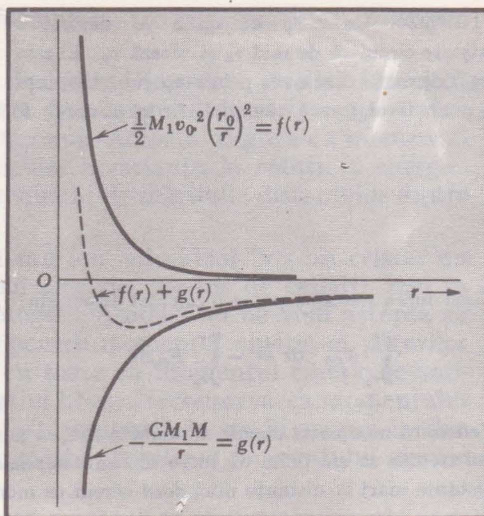


FIG. 6.21, (*b*). Contracția galaxiei în plan normal vectorului **J** este limitată, deoarece „energia potențială" centrifugă $f(r)$ crește foarte rapid cînd $r \to 0$. Astfel, $f(r) + g(r)$ are un minimum la o valoare finită a lui r, după cum se arată.

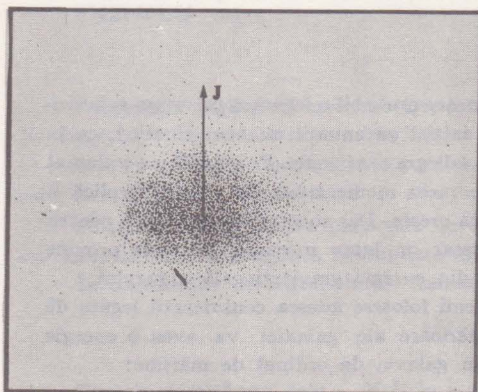


FIG. 6.21, (*c*). Galaxia începe să se turtească pe măsură ce se contractă și se rotește mai rapid.

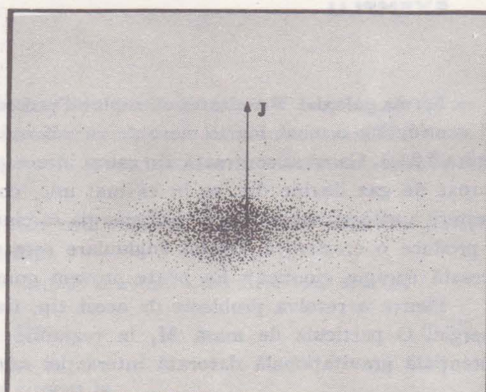


FIG. 6.21, (*d*). În final ea capătă o formă de „clătită", cu un miez central mai mult sau mai puțin sferic.

cum se arată în figura 6.21,*b*. Din capitolul 5 ne amintim că derivata unei energii potențiale este o forță, astfel că minimul în suma acestor două energii corespunde la a egala cu zero suma a două forțe. Această condiție este:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[-\frac{GM_1M}{r}+\frac{1}{2}M_1v_0^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]=0$$

$$\frac{GM_1M}{r^2}-M_1v_0^2\frac{r_0^2}{r^3}=0$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{GM_1M}{r^2} = M_1 \frac{v^2}{r} \qquad (6.41)$$

cînd înlocuim v_0r_0/b prin v din ecuația (6.38). Recunoaștem ecuația (6.41) ca fiind exact condiția ca forța centripetă datorită gravitației să egaleze produsul dintre masă și accelerația centripetă.

Dar norul de gaz se poate comprima într-o direcție paralelă cu axa momentului cinetic total fără ca valoarea momentului cinetic să se modifice. Contracția este produsă de atracția gravitațională; cîștigul de energie în timpul contracției trebuie să fie disipat într-un mod oarecare, și aceasta se crede că are loc prin radiație. Norul poate deci să se strîngă aproape complet în direcția paralelă cu **J**, în timp ce contracția în plan ecuatorial este limitată (vezi fig. 6.21 *c* și *d*). Acest model de evoluție galactică este suprasimplificat; deocamdată nu există un model acceptat în mod general.

Diametrul galaxiei noastre este de ordinul lui $3 \cdot 10^4$ parseci sau 10^{21} m (1 parsec $= 3{,}084 \cdot 10^{16}$ m). Grosimea galaxiei în vecinătatea soarelui depinde oarecum de modul în care este definită această grosime, dar marea majoritate a stelelor se îngrămădesc în jurul planului median într-o grosime de aproximativ 10^{19} m (cîțiva parseci). Astfel galaxia este puternic turtită. Masa galaxiei se consideră aproximativ de $2 \cdot 10^{11}$ ori mai mare decît masa soarelui, sau:

$$(2 \cdot 10^{11})(2 \cdot 10^{30}) = 4 \cdot 10^{41} \text{ kg}.$$

O estimare a masei se poate face din ecuația (6.41) înlocuind valorile cunoscute ale lui v și r pentru soare. Soarele este situat către marginea exterioară a galaxiei la aproximativ $3 \cdot 10^{20}$ m de axa galaxiei. Viteza orbitală a soarelui în jurul centrului galaxiei este de aproximativ $3 \cdot 10^5$ m/s; din ecuația (6.41) deducem ca o estimare a masei galaxiei:

$$M = \frac{v^2r}{G} \approx \frac{(10^{11})(3 \cdot 10^{20})}{7 \cdot 10^{-11}} \approx 4 \cdot 10^{41} \text{ kg}.$$

Am neglijat efectul maselor situate la distanță mai mare decît soarele față de centrul galaxiei.

Momentul cinetic al Sistemului Solar. Figura 6.22 arată momentele cinetice ale cîtorva componente ale Sistemului Solar. Să facem, ca o verificare pentru noi, o estimare a uneia dintre valorile date. Considerăm planeta Neptun, a cărei orbită este foarte aproape de una circulară. Distanța medie dintre Neptun și Soare este dată în lucrările de referință ca $5 \cdot 10^{12}$ m. Perioada de revoluție a lui Neptun în jurul Soarelui este de 165 ani $\approx 5 \cdot 10^9$ s. Masa lui Neptun este de aproximativ $1 \cdot 10^{26}$ kg. Momentul cinetic al lui Neptun în raport cu Soarele este deci:

$$J = Mvr = M\frac{2\pi r}{T}r = \frac{(10^{26})(6)(25 \cdot 10^{24})}{5 \cdot 10^9} \approx 30 \cdot 10^{41} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s},$$

în concordanță aproximativă cu valoarea $26 \cdot 10^{41}$ kg · m²/s indicată în figura 6.22. Direcția lui **J** este aproximativ aceeași pentru toate planetele mari.

Momentul cinetic al lui Neptun *în raport cu propriul său centru de masă* este mult mai mic. Momentul cinetic al unei sfere uniforme în rotație este de ordinul de mărime *MvR*, unde *v* este viteza de rotație la suprafață iar *R* este raza. În realitate, deoarece masa unei sfere nu este concentrată la o distanță *R* de axă, ci este distribuită, acest rezultat trebuie să fie redus, în cazul unei

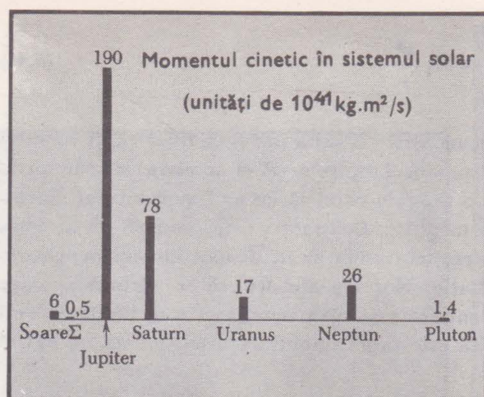


FIG. 6.22. Distribuția momentului cinetic în sistemul solar, în raport cu centrul soarelui. Simbolul Σ desemnează suma celor patru planete: Mercur, Venus, Pămînt și Marte. Remarcați contribuția relativ mică a rotației Soarelui în jurul propriei sale axe.

distribuții uniforme, printr-un factor numeric care, în capitolul 8, se găsește a fi $\frac{2}{5}$. Astfel:

$$J_{c.m.} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2\pi M R^2}{T}$$

unde $T = 2\pi R/v$ denotă perioada de rotație a planetei în jurul axei sale. Pentru Neptun $T = 6 \cdot 10^4$ s și $r \approx 2{,}4 \cdot 10^7$ m, de unde:

$$J_{c.m.} = \frac{(0{,}4)\,(6)\,(10^{26})\,(6 \cdot 10^{14})}{6 \cdot 10^4} \approx 2 \cdot 10^{36} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

care este neglijabil în comparație cu momentul cinetic în raport cu Soarele.

O estimare similară a lui $J_{c.m.}$ pentru Soare dă $6 \cdot 10^{41}$ kg·m²/s. Rotația Soarelui în jurul unei axe care trece prin centrul său este răspunzătoare pentru numai 2% din momentul cinetic total în Sistemul Solar. O stea mai fierbinte tipică poate avea un moment cinetic de 100 ori mai mare decît al Soarelui. Se pare deci că formarea unui sistem planetar este un mecanism efectiv pentru extragerea de moment cinetic de la o stea care se răcește. Dacă fiecare stea formează un sistem planetar, parcurgînd etapele evoluției sale în mod asemănător cu Soarele, ar trebui să existe peste 10^{10} stele cu planete în galaxia noastră.

PROBLEME

1. *Momentul cinetic al unui satelit*
(*a*) Care este momentul cinetic (raportat la centrul orbitei) al unui satelit de masă M_s care se mișcă pe o orbită circulară de rază r? Rezultatul trebuie să se exprime numai în funcție de r, G, M_s, M_p (masa Pămîntului)

R: $J = (GM_p M_s^2 r)^{1/2}$.

(*b*) Pentru $M_s = 100$ kg, care este valoarea numerică în unități SI a momentului cinetic în cazul unei orbite de rază egală cu dublul razei Pămîntului?

2. *Efecte ale frecării asupra mișcării sateliților.*
(*a*) Care este efectul frecării atmosferice asupra mișcării unui satelit pe o orbită

circulară (sau aproape circulară)? De ce frecarea crește viteza satelitului?

(*b*) Frecarea mărește sau micșorează momentul cinetic al satelitului măsurat în raport cu centrul Pămîntului? De ce?

3. *Relația dintre energie și moment cinetic pentru un satelit.* Exprimați în funcție de momentul cinetic J energia cinetică potențială și totală a unui satelit de masă M pe o orbită circulară de rază r.

R: $E_c = \frac{J^2}{2Mr^2}$; $E_p = -J^2/Mr^2$;

$E = -J^2/2Mr^2$.

4. *Electron legat de un proton.* Un electron se mișcă în jurul unui proton pe o orbită circulară de rază $0{,}5$ Å $= 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ m.

(*a*) Care este momentul cinetic orbital al electronului în raport cu protonul?

R: $1 \cdot 10^{-34}$ Js.

(*b*) Care este energia totală (exprimată în jouli și în electronvolți)?

(*c*) Care este energia de ionizare, adică energia care trebuie furnizată electronului pentru a-l separa de proton?

5. *Rezultanta momentelor forțelor interne este nulă.* Considerăm un sistem izolat format din trei particule 1, 2 și 3 (arătate în fig. 6.23), care interacționează prin forțele *centrale* $F_{12} = 1 \cdot 10^{-5}$ N, $F_{13} = 0{,}6 \cdot 10^{-5}$ N și $F_{23} = 0{,}75 \cdot 10^{-5}$ N, unde F_{ij} reprezintă forța asupra particulei i cînd interacționează cu particula j. Luați două puncte diferite și arătați că, pentru fiecare, rezultanta momentelor forțelor în raport cu acel punct este nulă.

6. *Forțele care acționează asupra unei scări.* O scară de masă 20 kg și lungime 10 m se sprijină pe un perete vertical fără frecare la un unghi de 30° cu verticala. Scara, de construcție uniformă, este împiedicată să alunece din cauza frecării cu solul. Care este mărimea, în newtoni, a forței exercitată de scară asupra peretelui? (*Indicație*: utilizați faptul că momentele forțelor trebuie să aibă rezultantă nulă pentru scara în repaus.)

R: 57 N.

7. *Energia cinetică a centrului de masă.* În ciocnirea unei particule de masă m_1 și viteză v_1, cu o particulă staționară de masă m_2, nu toată energia cinetică poate fi transformată în căldură sau energie internă. Ce fracțiune din ea poate fi transformată astfel? Arătați că această energie este exact egală cu energia cinetică în sistemul centrului de masă.

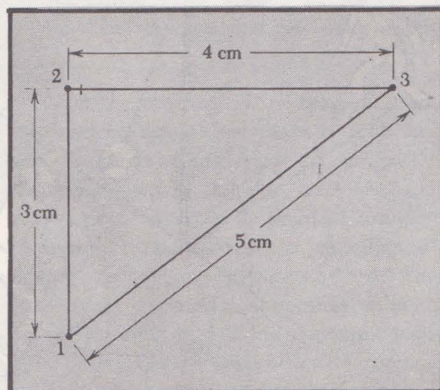
8. *Lanț în cădere.* Un lanț de masă M și lungime l este încolăcit pe marginea unei platforme. O porțiune foarte mică de la un capăt este împinsă în afara marginii și începe să cadă sub acțiunea greutății, trăgînd în afara platformei o parte din ce în ce mai mare din lanț. Presupunem că viteza fiecărui element rămîne zero pînă în momentul în care este antrenat în mișcare cu viteza porțiunii în cădere. Găsiți viteza, atunci cînd de pe platformă a căzut o porțiune din lanț de lungime x.

R: $v^2 = \frac{2}{3} gx$.

Cînd întreaga lungime l a părăsit platforma, ce fracțiune din energia potențială inițială a fost transformată în energie cinetică de translație a lanțului?

9. *Momentul cinetic în ciocnirea a două particule.* Un neutron de energie 1 MeV trece pe lîngă un proton la o asemenea distanță încît momentul cinetic al neutronului relativ la proton este aproximativ

FIG. 6.23.



10^{-33} J · s. Care este distanța de apropiere maximă? (Neglijăm energia de interacție între cele două particule.)

R: $\approx 4 \cdot 10^{-14}$ m.

10. *Coeficientul de restituire.* Coeficientul de restituire r pentru două corpuri este definit ca fiind viteza cu care corpurile se îndepărtează raportată la viteza cu care ele s-au apropiat, $0 \leq r \leq 1$. El poate fi folosit în probleme de ciocnire, pentru a furniza soluția care altfel ar putea fi obținută printr-o relație care implică energia.

(*a*) Arătați că dacă coeficientul de restituire între o minge și un plan orizontal, masiv și neted, este r, înălțimea la care mingea se va ridica după n salturi este $h_0 r^{2n}$, unde h_0 este înălțimea de la care mingea a căzut.

(*b*) Arătați că pentru o ciocnire frontală a două corpuri de mase m_1 și m_2 cu coeficientul r, pierderea de energie cinetică este produsul dintre $(1 - r^2)$ și energia cinetică în sistemul centrului de masă.

11. *Ciocnirea unei particule de o halteră.* Două corpuri de mase egale M sînt legate printr-o vergea rigidă de masă neglijabilă și lungime a. Centrul de masă al acestui sistem de tip halteră este staționar în spațiul lipsit de forțe de gravitație și sistemul se rotește în jurul centrului de masă cu viteză unghiulară ω. Unul dintre corpurile în rotație izbește frontal un al treilea corp staționar de masă M și cele două corpuri rămîn lipite.

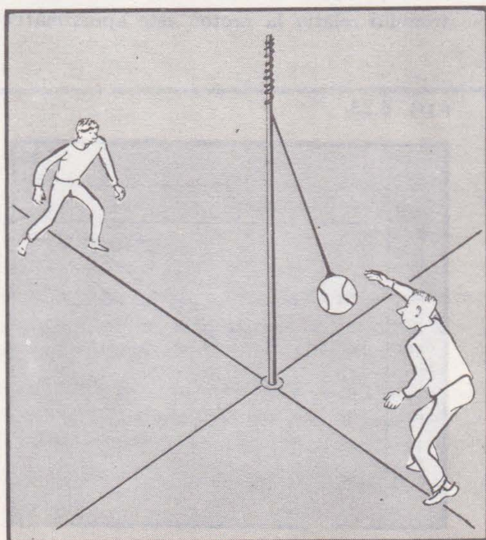
(*a*) Localizați centrul de masă al sistemului compus din cele trei particule la un moment imediat anterior ciocnirii? Care este viteza centrului de masă? (*Observație*: aceasta nu este viteza punctului de pe vergeaua rigidă care coincide instantaneu cu centrul de masă.)

(*b*) Care este momentul cinetic al sistemului de trei particule în raport cu centrul de masă la un moment imediat anterior ciocnirii? Dar imediat după ciocnire?

(*c*) Care este viteza unghiulară a sistemului după ciocnire în raport cu centrul de masă?

(*d*) Care sînt energiile cinetice inițială și finală?

FIG. 6.24.



12. *Momentul cinetic al unei mingi atîrnate de o sfoară.* În jocul reprezentat în figura 6.24 se cere să se lovească mingea suficient de tare și de repede pentru a răsuci sfoara de care mingea este atîrnată într-un sens în jurul stîlpului vertical, înainte ca jucătorul advers să o poată răsuci în sens contrar. Jocul este captivant iar dinamica mișcării mingii este complicată. Să examinăm un tip simplu de mișcare în care mingea se mișcă într-un plan orizontal pe o spirală de rază descrescătoare, pe măsură ce sfoara se răsucește în jurul stîlpului după o singură lovitură care îi imprimă mingii o viteză inițială v_0. Lungimea sforii este l iar raza stîlpului este $a \ll l$.

(*a*) Care este centrul instantaneu de rotație?

(*b*) Există un moment al forței nenul în raport cu axa ce trece prin centrul stîlpului? Se conservă momentul cinetic?

(*c*) Presupuneți că energia cinetică se conservă și calculați viteza ca funcție de timp.

(*d*) Care este viteza unghiulară după ce mingea a efectuat cinci revoluții complete?

R: $\omega = (l - 10\pi a)\, v_0/[a^2 + (l - 10\pi a)^2]$.

13. *Energia potențială centrifugă efectivă.* Este convenabil să utilizăm coordonate polare r, θ, pentru mișcarea într-un plan perpendicular pe o axă de rotație (vezi fig. 2.21).

(*a*) Arătați că viteza într-un astfel de sistem de coordonate se poate scrie ca:

$$\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

unde v_r este dr/dt, viteza de variație a lungimii r, iar:

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}.$$

(*b*) Arătați că energia cinetică a unei particule în acest sistem de coordonate este:

$$E_c = \frac{1}{2} M(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$$

unde $\omega = d\theta/dt$.

(*c*) Arătați că energia totală este:

$$E = U(r) + \frac{1}{2} M\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2Mr^2}$$

unde J este momentul cinetic al particulei în raport cu axa fixă normală la planul mișcării. [*Indicație*: amintiți-vă ecuația (6.37).]

(*d*) Deoarece forța este centrală nu există un moment al forței asupra particulei și J este o constantă a mișcării. Termenul $J^2/2Mr^2$ este numit uneori energia potențială centrifugă. Arătați că energia potențială centrifugă legată de o forță radială îndreptată spre exterior este egală cu J^2/Mr^3.

(*e*) Dacă $U = \frac{1}{2} kr^2$, arătați că $U(r)$ este legată de o forță radială îndreptată spre interior, egală cu $-kr$.

(*f*) Arătați din (*d*) și (*e*) că echilibrul acestor forțe este echivalent cu condiția $\omega^2 = k/M$.

14. *Rachetă în cîmpul Pămîntului.* Într-o rachetă de masă inițială M_0 se arde o cantitate ajustabilă de combustibil βg/s. Acest combustibil este expulzat direct în jos cu o viteză V_0.

(*a*) Găsiți β ca funcție de timp pentru ca racheta să poată rămîne staționară în spațiu la o distanță mică deasupra solului.

(*b*) Presupunînd că masa combustibilului utilizat într-o secundă rămîne constantă la o valoare α dar este mai mare decît în (*a*), găsiți viteza rachetei în sus ca funcție de timp.

R: cu $M = M_0 - \alpha t$ și $\alpha = dM/dt$, rezultă $v = -gt + V_0 \ln[M_0/(M_0 - \alpha t)]$.

(*c*) Comparați această viteză în cazul $M = \frac{3}{4} M_0$ cu acea dată în ecuația (6.22). Calculați aceste două viteze dacă $V_0 = 1{,}65 \cdot 10^3$ m/s și $\alpha = 2M_0 g V_0$.

15. *Patinatori pe gheață, rotindu-se la capetele unei corzi.* Doi patinatori pe gheață, fiecare cîntărind 70 kg, se deplasează în sensuri opuse cu viteze de 6,5 m/s, fiind separați printr-o distanță de 10 m perpendiculară pe vitezele lor. Cînd sînt exact unul în dreptul celuilalt, fiecare apucă cîte un capăt al unei corzi lungă de 10 m.

(*a*) Care este momentul cinetic al patinatorilor în raport cu centrul corzii înainte ca ei să apuce capetele acesteia? Dar după?

(*b*) Fiecare patinator trage acum de capătul său de coardă pînă cînd lungimea acesteia devine 5 m. Care este viteza fiecărui patinator?

(*c*) Dacă coarda se rupe exact cînd patinatorii au ajuns la o distanță de 5 m, care este masa maximă care se poate suspenda vertical de coardă, fără ca aceasta să se rupă?

(*d*) Calculați lucrul mecanic efectuat de fiecare patinator la descreșterea distanței dintre ei și arătați că acesta este egal cu variația energiei sale cinetice.

16. *Încetinirea unui vehicul spațial.* Un vehicul spațial are masa de 200 kg și aria secțiunii transversale 2 m². El se deplasează într-o regiune fără un cîmp gravitațional apreciabil, printr-o atmosferă rarefiată a cărei densitate este $2 \cdot 10^{-12}$ kg/m³, cu viteza inițială $7{,}6 \cdot 10^3$ m/s. (Acestea ar fi valorile aproximative pentru un satelit aflat la 500 km deasupra suprafeței Pămîntului.) Presupunem că condițiile

din exemplul de la pagina 205 se aplică, adică tot gazul pe care vehiculul îl întîlnește rămîne fixat pe el?

(a) Calculați valoarea lui c. Considerați masa gazului primit într-o secundă.
R: $c = 4 \times 10^{-12}$ kg/m.

(b) Folosind conservarea impulsului $Mv = M_0v_0$, găsiți ecuația diferențială pentru v ca funcție de t și constantele problemei.
R: $dv/dt = -cv^3/M_0v_0$.

(c) Rezolvați ecuația în raport cu v și găsiți timpul necesar pentru ca satelitul să-și micșoreze viteza pînă la 0,9 din viteza sa inițială.
R: $t \approx 24$ ani

LECTURI SUPLIMENTARE

Fizica PSSC (PSSC „Physics"), capitolul 22, D. C. Heath and Company, Boston, 1965.

Curs de fizică HPP (HPP „Project Physics Course"), capitolul 9, Holt, Rinehart și Winston, Inc. New York, 1970.

7

Oscilatorul armonic: proprietăți și exemple

Cuprins

Oscilatorul armonic constituie un exemplu de mişcare periodică de importanţă excepţională, deoarece serveşte drept model exact sau aproximativ pentru multe probleme din fizica clasică şi cuantică. Sistemele clasice care sînt descrise pe baza oscilatorului armonic includ orice sistem stabil scos puţin din starea de echilibru, ca de exemplu:

1. un corp fixat de un resort în limita micilor amplitudini de oscilaţie;
2. un pendul simplu în limita unghiurilor mici de oscilaţie;
3. un circuit electric compus dintr-o inductanţă şi o capacitate, pentru curenţi suficient de mici, astfel încît elementele de circuit să fie liniare.

Un element de circuit electric sau mecanic se zice că este liniar dacă răspunsul este direct proporţional cu forţa externă. Marea majoritate a fenomenelor din fizică (dar nu toate fenomenele interesante) sînt liniare, dacă domeniul de variaţie al mărimilor care intervin este luat suficient de mic, exact la fel cum cele mai multe curbe pe care le întîlniţi pot fi considerate linii drepte pentru un domeniu de valori suficient de mic.

Cele mai importante proprietăţi ale oscilatorului armonic sînt următoarele:

1. frecvenţa mişcării este independentă de amplitudinea oscilaţiei, în domeniul de liniaritate;
2. efectele mai multor forţe externe pot fi suprapuse liniar.

În acest capitol vom trata proprietăţile oscilatorului armonic. Vom considera atît mişcarea liberă, cît şi cea forţată, cu şi fără amortizare, deşi principalele elemente ale mişcării forţate sînt date ca o temă avansată la sfîrşitul acestui capitol. De asemenea, vom trata ca o temă avansată efectele unor interacţii neliniare mici, deoarece este util să vă familiarizaţi cu astfel de tipuri de mişcări.

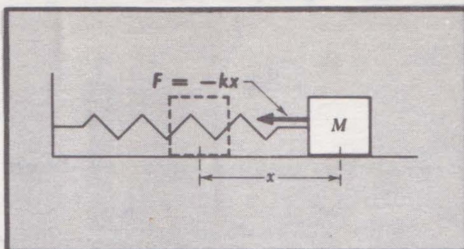
CORP FIXAT DE UN RESORT

În capitolul 5 am discutat energia potenţială într-un resort comprimat sau alungit în care forţa este direct proporţională cu comprimarea sau alungirea:

$$\mathbf{F} = -kx\hat{\mathbf{x}}$$

unde x este pozitiv în cazul unei alungiri şi negativ în cazul unei comprimări. Care este mişcarea unui corp de masă M sub acţiunea unei astfel de forţe?

FIG. 7.1. Resort alungit acționind asupra unui corp de masă M. În poziția figurată cu linii întrerupte resortul este nealungit.



În mod ideal ne putem imagina, ca în figura 7.1, că acest corp se mișcă pe un plan fără frecare:

$$\frac{M\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx, \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{kx}{M}. \tag{7.1}$$

(Această ecuație este discutată în notele matematice de la sfîrșitul acestui capitol. Cititorii nefamiliarizați cu soluția vor trebui să studieze aceste note înainte de a trece mai departe.)

Soluția poate fi exprimată sub forma:

$$\boxed{x = A \sin(\omega_0 t + \Phi)} \tag{7.2}$$

unde:

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{M}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.3}$$

La $t = 0$, $x = x_0 = A \sin \Phi$ și $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v_0 = \omega_0 A \cos \Phi$, de unde se pot determina A și Φ. Figura 7.2 ilustrează mișcarea. Mărimea A se numește *amplitudine* iar Φ *faza* mișcării. Frecvența și perioada sînt date de:

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{k}{M}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad T = \frac{1}{\nu} = 2\pi\left(\frac{M}{k}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.4}$$

Acest rezultat era de așteptat: cu cît resortul este mai rigid, adică cu cît k este mai mare, cu atît frecvența este mai ridicată; cu cît masa este mai mare, cu atît frecvența este mai joasă.

Putem aborda, de asemenea, această problemă din punctul de vedere al conservării energiei [vezi ecuația (5.21)]:

$$\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} M\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E. \tag{7.5}$$

Folosind faptul că A este valoarea lui x pentru $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$, rezultă $E = \frac{1}{2}kA^2$ și

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{k}{M}\right)^{\frac{1}{2}} (A^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.6}$$

Soluția acestei ecuații este:

$$\left(\frac{k}{M}\right)^{\frac{1}{2}} t = \arcsin\frac{x}{A} + \text{const},$$

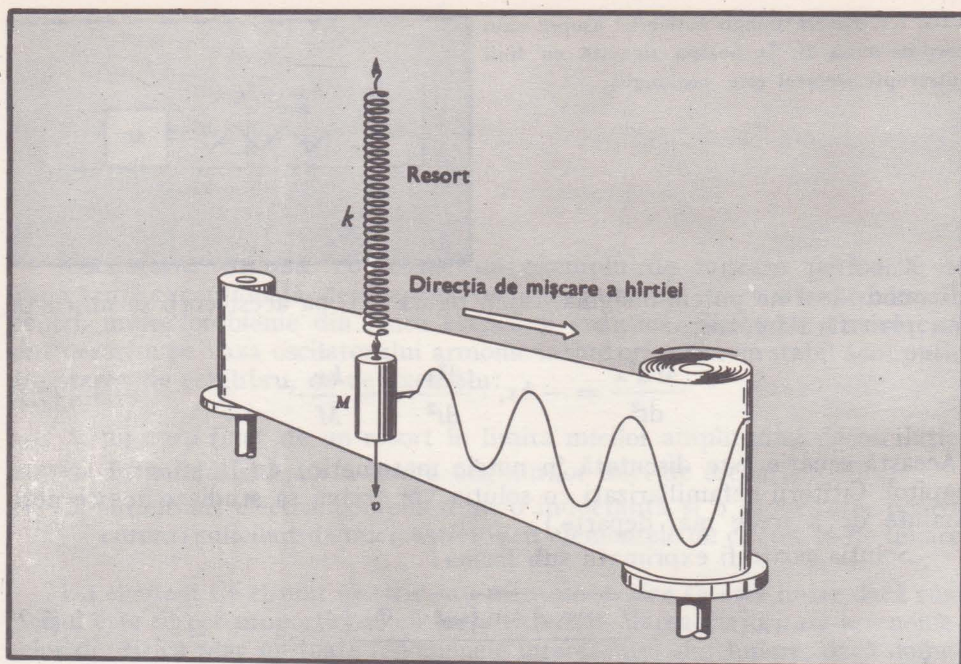


FIG. 7.2. Un oscilator armonic simplu constînd dintr-un corp de masă M şi un resort fără greutate de constantă elastică k. O peniţă ataşată lui M va trasa o curbă sinusoidală pe o bandă de hîrtie care trece cu o viteză constantă prin M.

ceea ce coincide cu relaţia (7.2):

$$x = A \sin\left[\left(\frac{k}{M}\right)^{\frac{1}{2}} t + \Phi\right],$$

dacă constanta este luată egală cu $-\Phi$. În mod alternativ am fi putut să derivăm ecuaţia (7.5) în raport cu timpul, obţinînd relaţia:

$$M\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + kx\frac{dx}{dt} = 0$$

care se reduce la ecuaţia (7.1). (Problemele 2—4 de la sfîrşitul acestui capitol sînt aplicaţii ale acestor idei.)

PENDULUL SIMPLU

Pendulul simplu constă dintr-un corp punctiform de masă M fixat la capătul inferior al unei tije sau al unui fir fără masă, de lungime L, articulată la capătul superior, care se mişcă într-un plan vertical, după cum se arată în figura 7.3. Ştim din observaţie că această mişcare este asemănătoare cu cea a unui corp fixat de un resort. Ne putem pune întrebarea: care este frecvenţa? Cel mai direct mod de a formula problema este să aplicăm în această

situație particulară legea $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$. Din figura 7.3 vedem că distanța s de-a lungul arcului, viteza și accelerația lui M sînt respectiv:

$$s = L\theta,\ v = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt} = L\dot{\theta},\ a = \frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Există două forțe în problemă: forța gravitațională și forța exercitată de către tijă sau fir. Totuși, firul nu exercită nici o forță de-a lungul lui s și deci trebuie să considerăm numai componenta lui mg de-a lungul lui s. Din figura 7.3 vedem că aceasta este $mg \sin\theta$, îndreptată în sensul descreșterii lui θ. În consecință, pentru această dimensiune legea $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ se reduce la:

$$mg\sin\theta = -mL\frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{7.7}$$

Dar dezvoltarea în serie a lui $\sin\theta$ este:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \cdots \tag{7.8}$$

astfel încît pentru θ mic putem scrie:

$$mg\sin\theta = mg\,\theta$$

și ecuația (7.7) devine:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta. \tag{7.9}$$

Această ecuație este identică cu ecuația (7.1), cu g/L în loc de k/M și θ în locul lui x. Deci:

$$\boxed{\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \Phi)} \tag{7.10}$$

unde:

$$\boxed{\omega_0 = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{7.11}$$

și frecvența pe care ne-am propus s-o găsim este, din ecuațiile (7.4) și (7.11), $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/L}$.

Amplitudinea, sau valoarea maximă a lui θ este θ_0; $\theta_0 \sin\Phi$ este valoarea lui θ la $t = 0$ iar $\omega_0\theta_0 \cos\Phi$ este valoarea lui $d\theta/dt$. Cît de mare poate să fie θ_0, astfel ca presupunerea noastră $\sin\theta = \theta$ să fie încă valabilă? Tabelul 7.1 dă cîteva valori ale perioadei pentru diferite amplitudini. Evident, amplitudinea poate depăși 20°, înainte ca valoarea reală a amplitudinii să

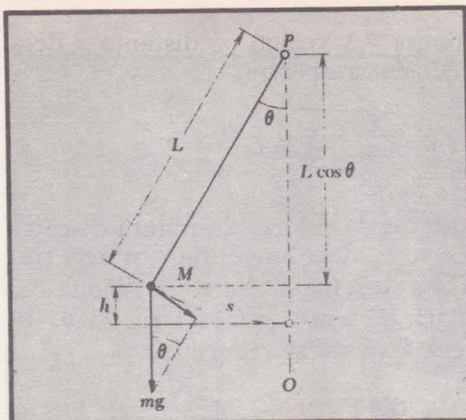


FIG. 7.3. Pendulul simplu constă dintr-o masă punctiformă M la capătul unui fir fără masă de lungime L. Pendulul se rotește în jurul unei axe care trece prin P și este perpendiculară pe planul hîrtiei. Dreapta OP este verticală, s este lungimea arcului dintre O și poziția lui M.

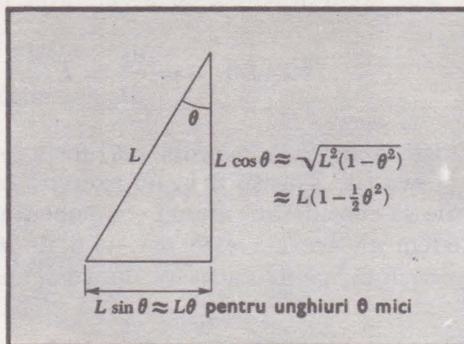


FIG. 7.4. Teorema lui Pitagora, împreună cu dezvoltarea binomială, ilustrează de ce pentru $\theta \ll 1$ rad, $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$.

difere printr-un singur procent de rezultatul obținut în aproximația amplitudinii mici.

TABELUL 7.1

Amplitudinea, în grade	Perioada $\div 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
0	1,0000
5	1,0005
10	1,0019
15	1,0043
20	1,0077
30	1,0174
45	1,0396
60	1,0719

Să considerăm, de asemenea, metoda conservării energiei pentru rezolvarea problemei. Cînd firul este deviat cu un unghi θ, corpul de masă M este ridicat pe o distanță:

$$h = L - L\cos\theta,$$

după cum se vede din analiza figurilor 7.3 și 7.4. Energia potențială a corpului de masă M în cîmpul gravitațional al Pămîntului este:

$$E_p(h) = Mgh = MgL\,(1 - \cos\theta)$$

în raport cu poziția (verticală) nedeviată, luată ca zero al energiei potențiale. Energia cinetică a pendulului este:

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2,$$

unde $v = L\dot{\theta}$ leagă viteza v de viteza $\dot{\theta}$ de variație a unghiului de deviere.

Energia totală este:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} ML^2\dot{\theta}^2 + MgL(1 - \cos\theta). \qquad (7.12)$$

Din legea conservării energiei știm că această sumă trebuie să fie constantă. Utilizăm acest fapt, plus micimea unghiului pentru a obține o soluție pentru frecvența mișcării. Avem:

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 ...$$

Astfel, pentru $\theta \ll 1$ rad, putem să neglijăm termenii în θ^4 și puterile superioare și să aproximăm energia în ecuația (7.12) prin:

$$E = \frac{1}{2} ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} MgL\theta^2. \qquad (7.13)$$

Rezolvînd ecuația (7.13) pentru θ găsim:

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{2E - MgL\theta^2}{ML^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2E}{MgL} - \theta^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (7.14)$$

Notăm punctele de întoarcere ale mișcării prin θ_0 și $-\theta_0$; amplitudinea oscilației este θ_0. În aceste puncte pendulul este instantaneu în repaus și energia sa cinetică este zero. Figura 7.5 ilustrează acest fapt. Din ecuația (7.13) cu $\dot{\theta} = 0$ avem:

$$E = \frac{1}{2} MgL\theta_0^2, \quad \theta_0^2 = \frac{2E}{MgL}.$$

Astfel, putem scrie din nou ecuația (7.14) sub forma:

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}(\theta_0^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}$$

sau:

$$\frac{d\theta}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Această ecuație este identică cu (7.6) și dăm mai jos cîteva proprietăți ale soluției.

Dacă condiția inițială sau faza mișcării sînt astfel încît θ are valoarea θ_1 la $t = 0$, atunci:

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^t dt.$$

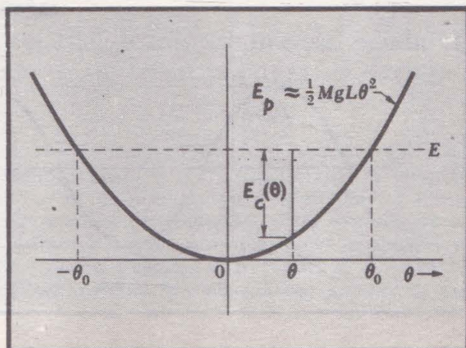


FIG. 7.5. Graficul energiei potențiale, ca funcție de θ. Pendulul oscilează între limitele θ_0 și $-\theta_0$. În aceste „puncte de întoarcere", $E_c = 0$ și $E_p = E$. La $\theta = 0$, $E_p = 0$ și $E_c = E$. Pentru $\theta \ll 1$ rad, $E_p \approx \frac{1}{2} MgL\theta^2$.

Integrala din membrul stîng este dată în Dwight 320.01 și obținem:

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}} = \left[\text{arc sin} \frac{\theta}{\theta_0}\right]_{\theta_1}^{\theta} = \text{arc sin} \frac{\theta}{\theta_0} - \text{arc sin} \frac{\theta_1}{\theta_0} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} t. \qquad (7.15)$$

Știm că $\sin \text{arc sin} (\theta/\theta_0) = \theta/\theta_0$, astfel încît putem rescrie ecuația (7.15) sub forma:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \sin\left[\left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} t + \text{arc sin} \frac{\theta_1}{\theta_0}\right]$$

sau:

$$\theta = \theta_0 \sin (\omega_0 t + \Phi)$$

unde identificăm pulsația (frecvența unghiulară) ω_0 și faza Φ cu:

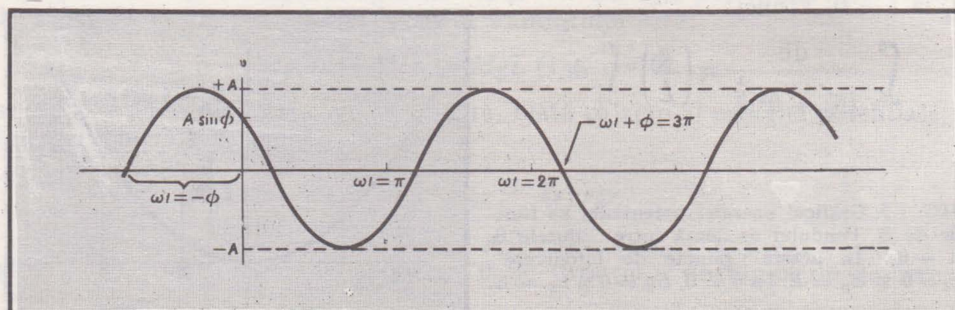
$$\omega_0 = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad \Phi = \text{arc sin} \frac{\theta_1}{\theta_0}\cdot$$

Aceste relații sînt în concordanță cu rezultatele date în ecuațiile (7.10) și (7.11).

Deși mărimea Φ din ecuațiile (7.2) sau (7.10) are dimensiune de unghi, ea nu este un unghi pe care să îl puteți vizualiza imediat. Este important să înțelegem mărimile A și Φ în cazul unui corp fixat de un resort și θ_0 și Φ în cazul pendulului. Figurile 7.6 și 7.7 ilustrează semnificațiile respective pentru aceste două cazuri. Toate cazurile de oscilații libere vor avea aceleași tipuri de constante, deși putem adeseori să alegem momentul pe care îl numim $t = 0$, astfel încît să facem ca valoarea lui Φ să fie egală cu zero sau $\pi/2$.

1. A și θ_0 sînt amplitudinile maxime de oscilație; adică, mișcarea are loc de la $+A$ la $-A$ sau de la $+\theta_0$ la $-\theta_0$.
2. În funcție de unghiul $\omega_0 t$, Φ este un unghi astfel ales încît dacă $\omega_0 t = -\Phi$, atunci elongația x sau unghiul θ trebuie să fie zero și să crească de la valori negative către valori pozitive. Acesta este, desigur, alt mod de a spune că la $t = 0$, $x = A \cdot \sin \Phi$ sau $\theta = \theta_0 \sin \Phi$. Notați că în figurile 7.6 și 7.7 axa orizontală măsoară nu timpul, ci produsul $\omega_0 t$.

FIG. 7.6. Funcția $x = A \sin (\omega t + \Phi)$ reprezentată în funcție de ωt, cu $\Phi \approx 3\pi/4$. La $t = 0$, $x = A \sin \Phi$, valoare care este indicată, iar $dx/dt = \omega A \cos \Phi$, valoare negativă. (Observație: am omis pentru simplitate indicele lui ω_0.)



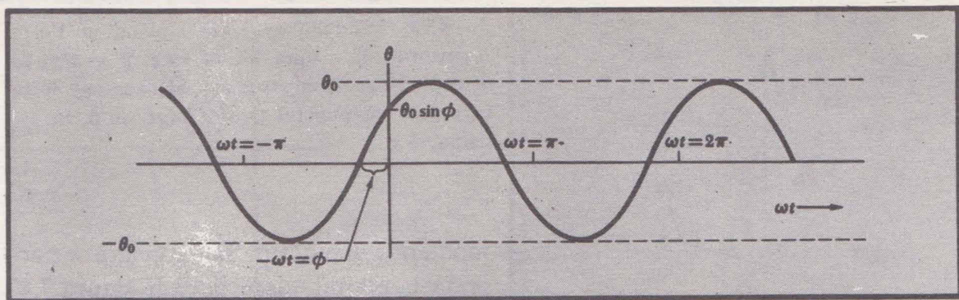


FIG. 7.7. Funcția $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \Phi)$ reprezentată în funcție de ωt. $\Phi \approx \pi/4$. La $t = 0$, $\theta = \theta_0 \sin \Phi$ valoare care este indicată, iar $d\theta/dt = \omega\theta_0 \cos \Phi$, valoare pozitivă. ($\omega_0$ din text a fost scris simplu ω.)

3. Condițiile inițiale determină A și Φ sau θ_0 și Φ, deci valorile condițiilor inițiale nu coincid direct cu nici una dintre aceste două mărimi.

Simbolul ω_0 este utilizat pentru a desemna pulsația (frecvența unghiulară) a mișcării naturale sau libere a unui sistem oscilant. Indicele zero din notație nu are nimic de a face cu $t = 0$. Pulsația [1] ω_0 este legată de frecvența ν_0 a oscilației libere a pendulului ca în ecuația (7.4):

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{(g/L)^{\frac{1}{2}}}{2\pi}. \tag{7.16}$$

Dacă $L = 1$ m, avem $\omega_0 = \left(\frac{9,8}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 3$ rad/s. Frecvența este independentă de masa M și de amplitudinea θ_0 a mișcării, cu condiția ca $\theta_0 \ll 1$. De notat că nu există nici o posibilitate ca masa să poată intra în membrul drept al ecuației (7.16) și să dea încă o mărime cu dimensiunea de frecvență.

În obținerea ecuațiilor (7.5) și (7.13) am folosit legea conservării energiei. Observați că fiecare din aceste relații este o ecuație diferențială de ordinul întîi și avem de efectuat numai o integrală în raport cu timpul pentru a obține rezultatul. Ecuația de mișcare [relația (7.1) sau (7.9)] este o ecuație diferențială de ordinul doi. Pentru a afla elongația sau unghiul de deviere trebuie să integrăm de două ori în raport cu timpul. Este bine să ne amintim că folosirea explicită a conservării energiei poate adesea să economisească efortul matematic, prin eliminarea unei integrări.

O a treia metodă pentru obținerea ecuației de mișcare în cazul pendulului este să folosim legea conform căreia momentul forței = viteza de variație a

[1] Vom numi deseori frecvența unghiulară simplu frecvență. Mulți fizicieni fac astfel și nu se produce nici o confuzie. Utilizarea simbolului ω în loc de ν (sau f) va identifica de obicei o mărime ca fiind frecvență unghiulară. În ce privește valorile numerice, ν sau f se dau de obicei în Hz sau cicli pe secundă; ω în radiani pe secundă (rad/s) sau simplu s^{-1}, cînd mărimea radian se subînțelege. Radianul este o mărime adimensională. Se obișnuiește, de asemenea, să se facă distincție între aceste mărimi exprimînd frecvența ν în vibrații/s, cicli/s, revoluții/s sau Hz, iar frecvența unghiulară ω în rad/s. Ambele mărimi au dimensiunea $(\text{timp})^{-1}$.

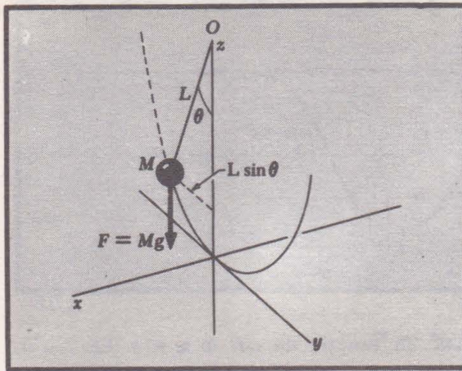


FIG. 7.8. Pendulul oscilează în planul yz. Forța gravitațională asupra lui M este $\mathbf{F} = M\mathbf{g}$, în direcția $-z$. Momentul $\mathcal{M}_x$ al acestei forțe în raport cu punctul O este $MgL \sin \theta$, în direcția $+x$.

momentului cinetic. Să luăm axa x normală la planul mișcării, ca în figura 7.8. Momentul $\mathcal{M}_x$ al forței de greutate în raport cu O, punctul de suspensie, este:

$$\mathcal{M}_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_x = LMg \sin \theta,$$

unde am folosit relația $F = Mg$.

Momentul cinetic J_x, în raport cu același punct, se scrie folosind expresia impulsului $p = ML\dot{\theta}$, sub forma:

$$J_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_x = -ML^2\dot{\theta},$$

unde $\dot{\theta}$ este pozitiv pentru θ crescător. Egalînd viteza de variație a momentului cinetic cu momentul forței, obținem:

$$ML^2\ddot{\theta} = -LMg \sin \theta$$

astfel încît ecuația de mișcare a pendulului este:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0.$$

În limita $\theta \ll 1$ putem din nou să îl aproximăm pe $\sin \theta$ prin θ și obținem ecuația:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0,$$

care coincide și ea cu ecuația (7.9).

CIRCUITUL LC

Unele dintre cele mai importante exemple de sisteme oscilante apar în electricitate. Caracterul familiar al termenului *curent alternativ* (*ca*), care este un curent electric oscilant, arată importanța acestui exemplu. Acei studenți care au unele cunoștințe în domeniul circuitelor electrice vor vedea ușor legătura lor cu sistemele mecanice; ceilalți pot să omită această secțiune și să revină asupra ei după ce vor fi studiat capitolul 8 din volumul 2.

Diferența de potențial dintre plăcile unui condensator de capacitate C este:

$$V_C = \frac{Q}{C}$$

	Pendulul simplu	Sistemul corp-resort	Circuitul LC	Energia cinetică, E_c	Energia potențială, E_p
A	$t = 0$; θ_0; M; $\theta = \theta_0$; $\dot{\theta} = 0$	$v = 0$; M; $x = x_0$	L; C; $Q = Q_0$; $I = 0$	—	
B	$t = \frac{\pi}{4\omega}$; M	v; M	I; L; C		
C	$t = \frac{\pi}{2\omega}$; M; $\theta = 0$; $\dot{\theta} = -\dot{\theta}_{max}$	$v = -v_{max}$; v; M; $x = 0$	I; L; C; $Q = 0$; $I = -I_{max}$		—
D	$t = \frac{3\pi}{4\omega}$; M	v; M	I; L; C		
E	$t = \frac{\pi}{\omega}$; M; $\theta = -\theta_0$; $\dot{\theta} = 0$	$v = 0$; M; $x = -x_0$	L; C; $Q = -Q_0$; $I = 0$	—	
F	$t = \frac{5\pi}{4\omega}$; M	v; M	I; L; C		
G	$t = \frac{3\pi}{2\omega}$; M; $\theta = 0$; $\dot{\theta} = \dot{\theta}_{max}$	$v = v_{max}$; v; M; $x = 0$	I; L; C; $Q = 0$; $I = I_{max}$		—
H	$t = \frac{7\pi}{4\omega}$; M	v; M	I; L; C		

FIG. 7.9. Trei oscilatori armonici diferiți, cu aceeași perioadă: un pendul simplu, un sistem masă-resort și un circuit LC. Timpul crește de la figura A la figura H; ciclul următor începe din nou cu figura A.

unde Q este sarcina pe o placă. Curentul într-un circuit în serie cu acest condensator este:

$$I = -\frac{dQ}{dt} \text{ sau } Q = -\int I \, dt$$

unde am folosit semnul minus pentru a indica faptul că sensul curentului este astfel încît descrește sarcina pe condensator. Tensiunea la capetele unei bobine de inductanță L este:

$$V_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\cdot$$

Dacă considerăm un circuit în care există doar o capacitate și o inductanță, ca în coloana a treia din figura 7.9, și ne amintim că suma tensiunilor de-a lungul circuitului este zero, obținem:

$$-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{C}=0=L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{Q}{C}\cdot$$

Aceasta este exact ecuația pentru elongația x a unui resort, dacă se fac identificările:

$$Q \leftrightarrow x,\ L \leftrightarrow M,\ \frac{1}{C} \leftrightarrow k.$$

Soluția va fi:

$$Q = Q_0 \sin(\omega_0 t + \Phi)\,;\quad \omega_0 = \left(\frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{7.17}$$

și intensitatea curentului se poate obține ușor de aici. Figura 7.9 ilustrează aceste relații și le compară cu un pendul și cu un corp fixat de un resort.

Studenții familiarizați cu electricitatea vor observa că tensiunea RI, unde R este rezistența, lipsește. Termenul $RI = R\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, prin corespondența stabilită de noi mai sus, va ocupa locul unei forțe proporționale cu $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Dar acesta este exact tipul de forțe de frecare pe care le discutăm în continuare în acest capitol, R corespunzînd coeficientului b care va lega forța de frecare de viteză. Cazurile circuitelor LR, CR și RLC sînt discutate în volumul 2, capitolele 4, 7 și 8.

MIȘCAREA UNUI SISTEM SCOS DINTR-O POZIȚIE DE ECHILIBRU STABIL

Unul dintre motivele pentru care *mișcarea oscilatorie armonică simplă* (cum se numește acest tip de mișcare) este atît de importantă este că pentru deplasări mici ale oricărui sistem în echilibru stabil, mișcarea rezultantă, neglijînd forțele de frecare, este armonică simplă. Pentru a vedea aceasta, să descriem printr-o coordonată α deviația din poziția de echilibru stabil; α poate fi o distanță, un unghi sau un tip mai complicat de coordonată. Condiția de echilibru stabil cere ca la $\alpha = 0$ energia potențială a sistemului să fie minimă, iar forța, dacă α este o distanță, momentul forței, dacă α este un unghi etc. trebuie să fie zero. Astfel:

$$F(\alpha = 0) = 0 = -\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\alpha}\right)_{\alpha=0} \tag{7.18}$$

unde U este energia potențială.

Presupunem că putem scrie, folosind o dezvoltare în serie Taylor:

$$U(\alpha) = U_0 + \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)_0 \alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3U}{d\alpha^3}\right)_0 \alpha^3 + \ldots \quad (7.19)$$

unde indicele 0 se referă la $\alpha = 0$. Folosind ecuația (7.18) în (7.19) și neglijînd termenii în α^3 și cu puteri mai mari, deoarece α este mic, obținem:

$$U(\alpha) = U_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha^2;$$

$$F(\alpha) = -\frac{dU}{d\alpha} = -\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha. \quad (7.20)$$

Desigur F nu este în mod obligatoriu o forță obișnuită, ci poate fi momentul unei forțe sau un tip mai complicat de forță generalizată. Condiția ca echilibrul să fie stabil este ca:

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} > 0.$$

În ecuația (7.20) aceasta înseamnă că „forța" tinde să readucă sistemul către $\alpha = 0$. Ecuația de mișcare a sistemului va fi atunci:

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha \quad (7.21)$$

unde M este o mărime de tipul masei *. Ecuația (7.21) indică faptul că α va descrie o mișcare armonică simplă. În practică, desigur, frecarea este importantă, dar în absența ei, analiza de mai sus se aplică în cazul unui pod, al unei clădiri etc. — în general oricărui sistem pentru care există o funcție de energie potențială derivabilă și care are un minim.

VALOAREA MEDIE A ENERGIILOR CINETICĂ ȘI POTENȚIALĂ

Demonstrăm acum o caracteristică importantă a unui oscilator armonic legată de media în timp a energiilor cinetică și potențială. Media temporală a unei cantități K pe un interval T este definită ca:

$$\boxed{<K> = \frac{1}{T}\int_0^T K(t)\, dt.} \quad (7.22)$$

Deoarece mișcarea unui oscilator este periodică, media în timp de o perioadă este egală cu media pe mai multe perioade și este unică. Folosind perioada

* Aceasta înseamnă că M măsoară inerția sistemului față de schimbarea stării sale de echilibru; de exemplu, M poate fi momentul de inerție al unui corp, inductanța unei bobine etc. (N.T.).

$T = 2\pi/\omega_0$, scriem pentru media temporală a energiei cinetice a unui oscilator a cărui mişcare este descrisă de $x = A\sin(\omega_0 t + \Phi)$:

$$<E_c> = \frac{\int_0^T \frac{1}{2} M\dot{x}^2 \mathrm{d}t}{T} = \frac{1}{2} M\omega_0^2 A^2 \frac{\int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2(\omega_0 t + \Phi)\,\mathrm{d}t}{2\pi/\omega_0}.$$

Deoarece integrala este extinsă pe o perioadă completă, nu contează care este valoarea fazei Φ, şi putem pune pentru simplitate $\Phi = 0$. Atunci, notînd $y = \omega_0 t$, avem:

$$\frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2 \omega_0 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$

unde am folosit faptul că:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 y\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \cos^2 y\,\mathrm{d}y$$

şi

$$\int_0^{2\pi} (\sin^2 y + \cos^2 y)\,\mathrm{d}y = 2\pi.$$

Deci media în timp a energiei cinetice este

$$<E_c> = \frac{1}{4} M\omega_0^2 A^2. \quad (7.23)$$

Energia potenţială este (luînd din nou $\Phi = 0$, deoarece valoarea sa nu contează):

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 \omega_0 t.$$

Deoarece valoarea medie pe o perioadă a pătratului sinusului este aceeaşi cu a pătratului cosinusului [1] şi deoarece $\omega_0^2 = k/M$,

$$<E_p> = \frac{1}{4} kA^2 = \frac{1}{4} M\omega_0^2 A^2. \quad (7.24)$$

Astfel $<E_p> = <E_c>$ şi energia totală a oscilatorului armonic este:

$$E = <E_c> + <E_p> = \frac{1}{2} M\omega_0^2 A^2.$$

Notaţi că $E = <E>$, deoarece energia totală este o constantă a mişcării.

Egalitatea mediilor temporale ale energiilor cinetică şi potenţială este o proprietate specială a oscilatorului armonic şi merită să fie reţinută. Pro-

[1] Aceasta se vede uşor trasînd cele două curbe şi observînd că ele sînt identice pînă la un decalaj de un sfert de perioadă. Acest tip de argument se poate, de asemenea, aplica în cazul valorii medii a lui $<x^2>$ pe suprafaţa unei sfere. Dacă $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, atunci $<x^2> + <y^2> + <z^2> = R^2$. Deoarece sfera este simetrică în raport cu x, y, z, trebuie să avem $<x^2> = <y^2> = <z^2> = \frac{1}{3} R^2$. Acest rezultat poate fi confirmat prin calcul direct.

prietatea nu este adevărată pentru oscilatori anarmonici, dar este o bună aproximație pentru oscilatori slab amortizați, după cum se va arăta în cele ce urmează.

FRECAREA

Pînă acum am neglijat efectele frecării asupra oscilatorului armonic. Am discutat frecarea în capitolul 3, considerînd numai cazul unei forțe de frecare constante. Discutăm acum cazul unei forțe proporționale cu puterea întîi a vitezei. Pentru viteze mici, aceasta este în multe cazuri o aproximație bună și astfel vom găsi că soluția obținută cu acest tip de forță de frînare este realistă. Vom considera totuși, pentru început, cîteva cazuri în care acționează numai această forță. Avem astfel:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_f = -b\frac{dx}{dt} = -b\dot{x} \qquad (7.25)$$

unde b este o constantă pozitivă numită *coeficient de amortizare*. Semnul negativ descrie faptul că aceasta este o forță opusă mereu vitezei. Este uneori mai util să definim o constantă, numită *timp de relaxare*, prin relația:

$$\tau = \frac{M}{b}$$

și atunci ecuația (7.25) devine:

$$M\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}\right) = 0.$$

Vedem că τ are dimensiunea unui timp, deoarece b posedă dimensiunea de forță împărțită la viteză sau mai simplu masă raportată la timp. Explicația denumirii *timp de relaxare* va deveni clară pe măsură ce vom înainta cu expunerea.

În funcție de viteza $v = dx/dt = \dot{x}$, această ecuație devine:

$$\dot{v} + \frac{1}{\tau}v = 0.$$

Soluția este dată la sfîrșitul acestui capitol (pagina 258). Ea este:

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} \qquad (7.26)$$

unde v_0 este viteza la $t = 0$. Viteza descrește exponențial în timp; spunem că viteza este atenuată cu constanta de timp τ. Comportarea este reprezentată în figura 7.10.

Micșorarea energiei cinetice E_c a unei particule libere supuse acestei forțe de frecare este dată, folosind ecuația (7.26), de:

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 e^{-2t/\tau} = E_{c0}e^{-2t/\tau}. \qquad (7.27)$$

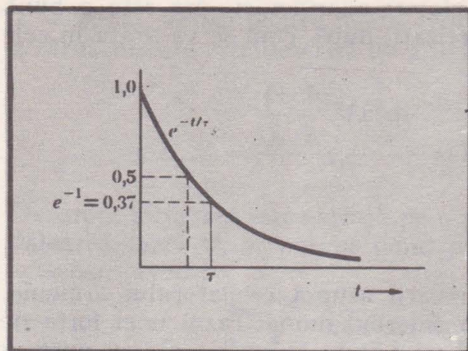


FIG. 7.10. Funcția $e^{-t/\tau}$ este reprezentată în raport cu t. Observați că, deoarece $e^{-0,69} = 0,5$, funcția a scăzut la jumătate din valoarea sa inițială cînd $t = 0,69\ \tau$.

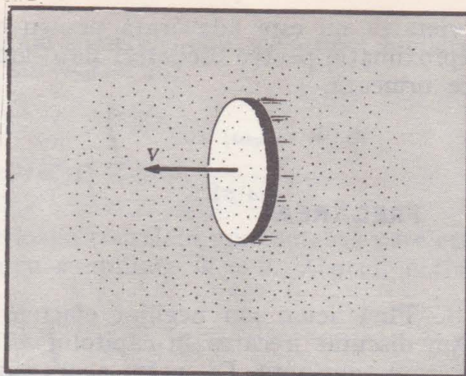


FIG. 7.11. O placă care se mișcă în direcție perpendiculară pe planul său într-un gaz la presiune foarte joasă, este supusă unei forțe de rezistență proporțională cu viteza sa V, dacă V este mult mai mică decît viteza medie a moleculelor gazului.

Prin derivarea ecuației (7.27) obținem:

$$\dot{E}_c = -\frac{2}{\tau} E_c.$$

Timpul de relaxare efectiv pentru energia cinetică este jumătate din cel pentru viteză.

Ce tip de mecanism duce la o forță de amortizare de forma $-b\dot{x}$? Cazul unei sfere mișcîndu-se lent printr-un mediu vîscos a fost pentru prima oară rezolvat de către G. G. Stokes, iar expresia forței:

$$F_f = -6\ \pi\eta r v, \tag{7.28}$$

unde r este raza sferei și η este coeficientul de viscozitate, se numește adesea *legea lui Stokes*.

O bună ilustrare a forței de amortizare $F_f = -b\dot{x}$ este, de asemenea, oferită de o placă netedă care se mișcă în direcția normală la planul său printr-un gaz la presiune foarte scăzută, ca în figura 7.11, cu condiția ca viteza V a plăcii să fie mult mai mică decît viteza medie v a moleculelor gazului. Presiunea trebuie să fie suficient de joasă pentru a putea neglija ciocnirile moleculelor între ele. Numărul moleculelor care lovesc placa în unitatea de timp este proporțional cu viteza relativă a moleculelor incidente față de placă. Să presupunem că moleculele se mișcă doar pe o singură direcție. Pe o față a plăcii viteza relativă este $v + V$, pe cealaltă $v - V$. Presiunea este proporțională cu numărul moleculelor care izbesc placa înmulțit cu transferul de impuls mediu către placă raportat la o moleculă. Transferul mediu de impuls este la rîndul său proporțional cu viteza relativă, astfel că presiunile P_1 și P_2 pe cele două fețe ale plăcii sînt:

$$P_1 \propto (v + V)^2, \quad P_2 \propto (v - V)^2.$$

Presiunea netă P este diferența presiunilor pe fețele opuse ale plăcii:

$$P = P_1 - P_2 \propto 4vV$$

astfel încît frecarea (forța netă asupra plăcii în mișcare) este direct proporțională cu viteza V a plăcii. Sensul forței de frecare se vede a fi opus sensului mișcării plăcii.

Viteza limită. Dacă o forță constantă, cum este greutatea, este aplicată unei particule aflate sub acțiunea unei forțe de frecare de tipul discutat mai sus, viteza va crește dacă particula pleacă din repaus sau de la o viteză mică, sau va descrește dacă ea pleacă de la o viteză foarte mare, pînă cînd accelerația devine zero. Această condiție este:

$$F_{const} = b\dot{x} \quad \text{sau} \quad \dot{x} = v = \frac{F_{const}}{b} \tag{7.29}$$

și viteza atinsă astfel se numește *viteză limită*. De exemplu, dacă o particulă de masă M cade sub acțiunea greutății și a unei forțe de tipul dat de legea lui Stokes, viteza limită este:

$$v = \frac{Mg}{6\,\pi\eta r}$$

(Vezi probl. 10 și 11 de la sfîrșitul capitolului.)

Conceptul de viteză limită este aplicabil unor probleme care implică forțe de frecare proporționale cu alte puteri ale vitezei, forțe care apar adesea la viteze mai înalte. Dacă forța de frecare este dată de:

$$F_f = -c\dot{x}^n$$

unde c este o constantă și n este pozitiv, viteza limită va fi:

$$v = \left(\frac{F_{const}}{c}\right)^{1/n}$$

OSCILATORUL ARMONIC AMORTIZAT

Ne întoarcem acum la oscilator și includem forța de amortizare $-b\dot{x}$. Tipul de mișcare este arătat în figura 7.12. Ecuația de mișcare este:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

Aceasta este tot o ecuație liniară. Putem să o rescriem în forma:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{7.30}$$

unde:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{M}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{M}.$$

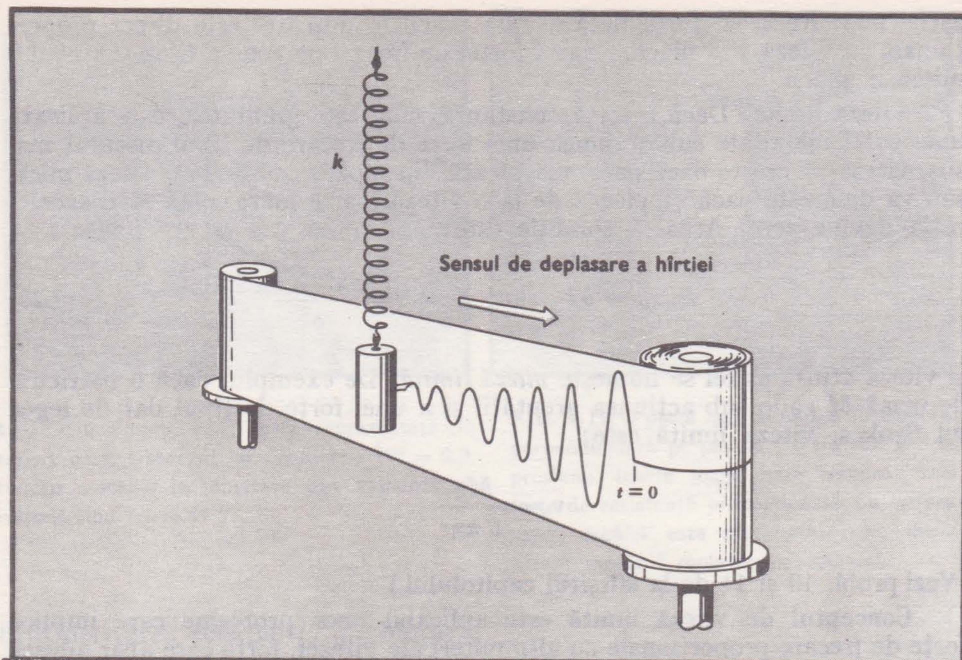


FIG. 7.12. Toţi oscilatorii armonici reali sînt amortizaţi de forţele de frecare, ca de exemplu rezistenţa aerului. Un sistem masă-resort cu amortizare slabă va descrie o astfel de curbă pe o bandă de hîrtie care se deplasează cu viteză constantă, dacă sistemul masă-resort a fost pus să oscileze la $t = 0$.

Căutăm pentru ecuaţia (7.30) soluţii de forma unor oscilaţii sinusoidale amortizate:

$$x = x_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \Phi) \tag{7.31}$$

unde β şi ω trebuie să fie determinate iar x_0 şi Φ sînt constantele care sînt fixate din condiţiile iniţiale [1]. Această soluţie este sugerată combinînd ecuaţiile (7.2) şi (7.26). Detalii asupra soluţiei sînt date în notele matematice de la sfîrşitul acestui capitol, unde se arată că:

$$\beta = \frac{1}{2\tau} \tag{7.32}$$

şi

$$\omega = \left[\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \omega_0\left[1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7.33}$$

[1] Soluţia dată de relaţia (7.31) nu este valabilă pentru orice valori ale lui ω_0 şi τ. Se poate vedea din notele matematice că în anumite condiţii soluţia nu este oscilantă. Dacă $\omega_0^2 < (1/2\tau)^2$, soluţia este $e^{-t/2\tau}(Ae^{gt} + Be^{-gt})$ unde A şi B sînt constante arbitrare iar $g = [(1/2\tau)^2 - \omega_0^2]^{1/2}$, în timp ce dacă $\omega_0 = 1/2\tau$ soluţia este $Ce^{-t/2\tau} + Dte^{-t/2\tau}$ unde C şi D sînt constante arbitrare. Acest ultim caz este „amortizarea critică". Vezi ecuaţiile (7.69) şi (7.70).

Aşadar, frecarea micşorează frecvenţa. Frecvenţa unghiulară ω este egală cu ω_0 numai dacă timpul de relaxare este infinit (nu există amortizare).

Introducînd aceste valori ale lui β şi ω în ecuaţia (7.31), obţinem:

$$x = x_0 e^{-t/2\tau} \sin \left\{ \omega_0 t \left[1 - \left(\frac{1}{2\omega_0 \tau} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \Phi \right\}.$$

Dacă $\omega_0 \tau \gg 1$, avem limita *amortizării slabe* în care x poate fi aproximat prin:

$$x \approx x_0 e^{-t/2\tau} \sin (\omega_0 t + \Phi) \tag{7.34}$$

unde ω_0 este pulsaţia naturală a oscilaţiilor neamortizate.

EXEMPLU

Disiparea puterii. Calculaţi viteza de disipare a energiei în cazul unui oscilator armonic amortizat, în limita amortizării slabe cu $\omega_0 \tau \gg 1$, astfel încît $\omega \approx \omega_0$.

Energia cinetică este $E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$. Din soluţia aproximativă (ecuaţia (7.34)) avem (punînd $\Phi = 0$):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\tau} x_0 e^{-t/2\tau} \sin \omega_0 t + \omega_0 x_0 e^{-t/2\tau} \cos \omega_0 t. \tag{7.35}$$

De aici avem:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \left(\frac{1}{2\tau} \right)^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \sin^2 \omega_0 t + \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \cos^2 \omega_0 t - \left(\frac{\omega_0}{\tau} \right) x_0^2 e^{-t/\tau} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t. \tag{7.36}$$

Integralele care intervin cînd luăm media temporală a ecuaţiei (7.36) sînt date în Dwight, 861.13–861.15. Dar pentru $\omega_0 \tau \gg 1$, este o bună aproximare să scoatem factorul $e^{-t/\tau}$ în ecuaţia (7.36) în afara parantezei care desemnează media temporală. Putem proceda astfel cu o precizie rezonabilă dacă amplitudinea de oscilaţie $x_0 e^{-t/2\tau}$ nu variază mult într-o perioadă a mişcării. Ne rămîn atunci mediile:

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}; \quad \langle \cos \theta \cdot \sin \theta \rangle = 0.$$

Ultima medie, care este nouă pentru noi, este de importanţă considerabilă:

$$\langle \cos \theta \cdot \sin \theta \rangle = \langle \frac{1}{2} \sin 2\theta \rangle = 0$$

deoarece media unui sinus sau cosinus este zero. Atunci energia cinetică mediată pe o perioadă este:

$$\langle E_c \rangle \approx \frac{1}{2} M \left[\left(\frac{1}{2\tau} \right)^2 \langle \sin^2 \omega_0 t \rangle + \omega_0^2 \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle - \frac{\omega_0}{\tau} \langle \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t \rangle \right] x_0^2 e^{-t/\tau} \approx$$

$$\approx \frac{1}{4} M \left[\left(\frac{1}{2\tau} \right)^2 + \omega_0^2 \right] x_0^2 e^{-t/\tau},$$

dar $(1/2\tau)^2$ este presupus a fi neglijabil în comparaţie cu ω_0^2, astfel încît energia cinetică medie este:

$$\langle E_c \rangle \approx \frac{1}{4} M \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau}. \tag{7.37}$$

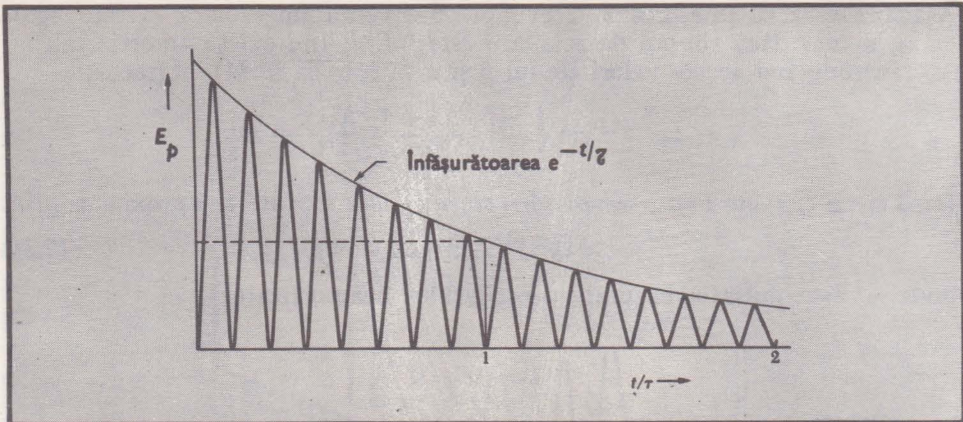


FIG. 7.13. Energia potenţială a unui oscilator cu $\tau = 8\pi/\omega$ şi $Q = 8\pi$, reprezentată în funcţie de t/τ. În timpul τ, în care au loc patru oscilaţii, înfăşurătoarea energiei potenţiale scade la $1/e$ din valoarea sa iniţială.

Vedem că energia cinetică medie descreşte exponenţial. Energia potenţială medie este (vezi fig. 7.13):

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} M\omega_0^2 x_0^2 \langle e^{-t/\tau} \sin^2 \omega_0 t \rangle \approx \frac{1}{4} M\omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau}. \tag{7.38}$$

Puterea medie disipată P este dată de viteza de variaţie a energiei luată cu semnul minus:

$$-\langle P \rangle = \frac{d}{dt}\langle E \rangle \approx \frac{d}{dt}(\langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle) \approx -\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{2} M\omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau}\right)$$

sau

$$\langle P(t) \rangle = \frac{\langle E(t) \rangle}{\tau}. \tag{7.39}$$

În mod obişnuit vom omite parantezele $\langle\,\rangle$ asupra lui $P(t)$ cînd sensul este clar.

Studentul poate fi surprins de faptul că mediile exprimate în ecuaţiile (7.37) şi (7.38) conţin timpul t, ele fiind medii pe intervale de timp. Privim aici mişcarea unui oscilator armonic timp de mai multe perioade şi ceea ce considerăm reprezintă media energiei (cinetice sau potenţiale) *pe o perioadă în jurul timpului t*. Deoarece energia este disipată, trecînd în căldură, ne aşteptăm ca energia medie (pe o perioadă) să scadă pe măsură ce sînt efectuate din ce în ce mai multe cicluri.

Ne aşteptăm să găsim că disiparea de putere este egală cu viteza medie (cu semn schimbat) cu care este consumat un lucru mecanic de către forţa de frecare $F_f = -b\dot{x} = -(M/\tau)\dot{x}$ [vezi ec. (7.30)]. Folosind ecuaţia (7.35) şi presupunînd că $\omega_0\tau \gg 1$, astfel încît termenul $e^{-t/\tau}$ să fie scos în afara semnului de mediere $\langle\,\rangle$, obţinem valoarea vitezei medii de efectuare a lucrului mecanic:

$$\langle F_f v \rangle \approx -\frac{M}{\tau}\omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle$$

$$\approx -\frac{1}{2\tau} M\omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \approx -\frac{E(t)}{\tau},$$

în concordanţă cu ecuaţia (7.39).

Factorul de calitate Q. Mărimea Q, sau *factorul de calitate* al unui sistem oscilant este un termen foarte des utilizat. El este răspîndit mai ales în terminologia sistemelor electrice de curent alternativ, dar este aplicabil tuturor sistemelor oscilante atît timp cît amortizarea este mică. Mărimea Q este definită ca produsul dintre 2π și raportul dintre energia înmagazinată și pierderea medie de energie într-o perioadă:

$$Q = 2\pi \frac{\text{energie înmagazinată}}{\langle \text{pierderea de energie într-o perioadă} \rangle} = \frac{2\pi E}{P/\nu} = \frac{E}{P/\omega}, \tag{7.40}$$

deoarece perioada este $1/\nu$ și $2\pi\nu = \omega$. Timpul corespunzător unui radian de mișcare este $1/\omega$. Amortizarea trebuie să fie suficient de mică, astfel încît E să nu varieze apreciabil într-o perioadă. Rețineți că mărimea Q este adimensională. Pentru oscilatorul armonic slab amortizat $(\omega_0\tau \gg 1)$ avem:

$$Q \approx \frac{E}{E/\omega_0\tau} \approx \omega_0\tau \tag{7.41}$$

din ecuația (7.39). Observăm că valoarea lui $\omega_0\tau$ este într-adevăr o bună măsură pentru lipsa amortizării unui oscilator. Un $\omega_0\tau$ mare sau un Q mare înseamnă că oscilatorul este slab amortizat. Observați din ecuația (7.38) că energia unui oscilator scade la e^{-1} din valoarea sa inițială în timpul τ; în acest interval de timp, oscilatorul efectuează $\omega_0\tau/2\pi$ oscilații. Cîteva valori reprezentative ale lui Q sînt date în tabelul 7.2.

TABELUL 7.2

Cîteva valori tipice pentru Q (variații mari nu sînt excluse)

Pămîntul, pentru o undă seismică	250 – 1 400
Cavitate de cupru rezonantă în domeniul microundelor	10^4
Coardă de pian sau vioară	10^3
Atom excitat	10^7
Nucleu excitat (^{57}Fe)	$3 \cdot 10^{12}$

OSCILATORUL ARMONIC FORȚAT

Cazul unui oscilator armonic acționat de o forță externă care variază sinusoidal este un caz de extremă importanță în multe domenii ale fizicii. Din cauza complexității problemei, ea este tratată în temele avansate (de la sfîrșitul acestui capitol). Cîteva rezultate merită, totuși, să fie menționate aici.

1. După cum este de așteptat, mișcarea staționară (după ce frecarea a amortizat complet orice mișcare corespunzînd perioadei naturale a oscilatorului liber, $t \gg \tau$) are frecvența egală cu cea a forței externe.

2. După cum este, de asemenea, de așteptat, în special pentru oscilatorul slab amortizat, amplitudinea mișcării staționare depinde puternic de frecvența forței externe, fiind mare cînd aceasta este apropiată de frecvența naturală. Figura 7.14 reprezintă amplitudinea ca funcție

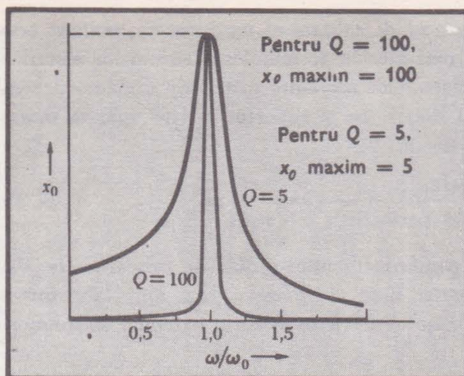


FIG. 7.14. Amplitudinea mișcării armonice forțate, ca funcție de frecvența externă. Valoarea maximă a lui x_0 apare la valoarea $\omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/(2Q)^2}$, care este situată puțin sub valoarea 1, în puncte puțin diferite pentru fiecare curbă. Scala amplitudinii este pur arbitrară și pentru aceeași forță externă și același ω_0, maximul amplitudinii pentru $Q = 100$ va fi de 20 de ori mai mare decît acela pentru $Q = 5$.

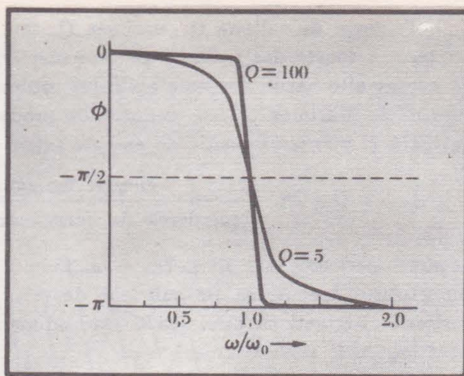


FIG. 7.15. Defazajul Φ dintre elongație și forța externă.

de frecvența impusă în cazul unui Q mare și a unuia de mărime mijlocie. Observați că amplitudinea este maximă pentru:

$$\omega = \left(\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0\left(1 - \frac{1}{2\omega_0^2\tau^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

care este foarte apropiată de ω_0 pentru un oscilator cu un Q înalt. Absorbția maximă de putere se produce la $\omega = \omega_0$. Tipul de curbă reprezentat în figură este numit adesea *curbă de rezonanță* [1].

3. Decalajul în timp, indicat prin unghiul Φ, între elongația $x = x_0 \sin(\omega t + \Phi)$ și forța externă care variază ca $\sin\omega t$ este, de asemenea, o funcție puternic dependentă de frecvența impusă, fiind zero pentru frecvențe joase și $-\pi$ pentru frecvențe înalte. [Vezi fig. 7.15 și temele avansate (pagina 252)]. Faza Φ este definită aici ca unghiul care indică cu cît este atins înainte maximul elongației față de cel al forței descrise de $F_0 \sin \omega t$. Așadar, unghiurile negative arată că elongația este în întîrziere față de forță. De notat că pentru $\omega = \omega_0$, $\Phi = -\frac{\pi}{2}$, elongația este în urma forței cu un sfert de perioadă. Pentru mai multe detalii, consultați temele avansate (pagina 253).

[1] În unele domenii prin curbă de rezonanță se înțelege în mod strict curba $f(x) = 1/(1 + x^2)$ care este similară ca aspect.

PRINCIPIUL SUPERPOZIȚIEI

O proprietate importantă a oscilatorului armonic este aceea că soluțiile sînt aditive: dacă $x_1(t)$ descrie mișcarea sub acțiunea forței $F_1(t)$, iar $x_2(t)$ descrie mișcarea sub acțiunea forței $F_2(t)$, atunci $x_1(t) + x_2(t)$ descrie mișcarea sub acțiunea forței rezultante $F_1(t) + F_2(t)$. Adică, dacă cunoaștem mișcarea sub acțiunea forței F_1 și mișcarea sub acțiunea lui F_2, vom obține legea de mișcare sub acțiunea simultană a celor două forțe, adunînd $x_1(t)$ cu $x_2(t)$. Această proprietate rezultă direct din ecuația de mișcare:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)(x_1 + x_2) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x_1 + $$

$$+ \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x_2 = F_1 + F_2 \tag{7.42}$$

Valabilitatea principiului superpoziției pentru soluțiile ecuației de mișcare a oscilatorului armonic este o consecință a liniarității ecuației în care intervine numai puterea întîi a lui x și a derivatelor sale. Situația este complet diferită dacă sînt incluși termeni anarmonici. Un termen în x^2 în ecuația de mișcare se poate arăta că amestecă și înmulțește două frecvențe impuse simultan, ω_1 și ω_2, producînd în consecință un întreg domeniu de frecvențe armonice ($2\omega_1$, $3\omega_1$,..., $2\omega_2$, $3\omega_2$,...) și de combinații de frecvențe „de bandă alăturată" ($\omega_1 + \omega_2$; $\omega_1 - \omega_2$; $\omega_1 - 2\omega_2$ etc.).

PROBLEME

1. *Pendulul simplu.* Un pendul este construit dintr-un fir ușor de lungime $L = 1$ m și un corp greu de masă $M = 1$ kg. Care este perioada micilor oscilații ale acestui pendul?

R: 2 s.

2. *Corp fixat de un resort.* Scrieți ecuația de mișcare pentru un corp de masă M care se mișcă în direcție verticală sub acțiunea forței gravitaționale și a unui resort de constantă elastică k. Cum influențează forța gravitațională:

(*a*) Perioada de oscilație?

(*b*) Centrul de oscilație, adică punctul în jurul căruia au loc oscilațiile?

3. *Corp fixat de un resort.* Un corp cu masa de 1 kg este suspendat de un resort liniar cu constanta elastică $k = 10^3$ N/m.

(*a*) Care este perioada micilor oscilații?

(*b*) Găsiți elongația ca funcție de timp, dacă la $t = 0$ deplasarea față de poziția de echilibru este $+ 5 \cdot 10^{-3}$ m iar viteza $+ 0,15$ m/s.

4. *Corp fixat de un resort — date.* Datele din tabelele 7.3 și 7.4 au fost obținute observînd mișcarea unui corp fixat la capătul unui resort.

(*a*) Reprezentați grafic pătratul perioadei de oscilație ca funcție de masă. Valorile tabelate ale masei exclud masa resortu-

lui. Determinați masa efectivă a resortului printr-o extrapolare convenabilă a graficului.

(b) Determinați constanta elastică k.

(c) Reprezentați grafic logaritmul natural al amplitudinii ca funcție de timp și determinați timpul de relaxare.

(d) Determinați factorul de amortizare b

TABELUL 7.3

Perioada ca funcție de masă

Masa, kg	Perioada observată, s
0,050	0,72
0,100	0,85
0,150	0,96
0,200	1,06
0,250	1,16
0,300	1,23

TABELUL 7.4

Amplitudinea oscilației ca funcție de timp pentru o masă de 0,150 kg

Timpul, s	Amplitudinea, m
0	$4{,}5 \cdot 10^{-2}$
30	$4{,}0 \cdot 10^{-2}$
80	$3{,}5 \cdot 10^{-2}$
125	$3{,}0 \cdot 10^{-2}$
180	$2{,}5 \cdot 10^{-2}$
235	$2{,}0 \cdot 10^{-2}$
340	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$
455	$1{,}0 \cdot 10^{-2}$

5. *Corp în mediu fluid.* Un corp cufundat parțial (sau complet) într-un lichid este împins de jos în sus cu o forță egală cu greutatea lichidului dezlocuit (principiul lui Arhimede). Arătați că un corp de secțiune orizontală uniformă constrîns să se miște vertical într-un lichid de densitate mai mare decît densitatea corpului va executa oscilații armonice simple. Care este perioada? Care este limita amplitudinii de oscilație?

6. *Pendulul*

(a) Un pendul de lungime 0,392 m și masă 0,5 kg este pus în mișcare astfel încît la $t = 0$, $\theta = 0{,}1$ și $\dot{\theta} = -0{,}02/\text{s}$. Găsiți unghiul θ ca funcție de timp. Utilizați ecuațiile de mișcare pentru a determina forța care se exercită asupra corpului la $\theta = 0$.

(b) Pendulul Foucault a fost instalat de Foucault la Paris în 1851, pentru a demonstra efectul rotației Pămîntului (vezi capitolul 4, pagina 135). Calculați perioada, dacă lungimea pendulului este de 69 m. Determinați energia totală a mișcării, dacă masa este de 28 kg iar amplitudinea maximă a oscilațiilor este de 10°.

7. *Energia corpului fixat de un resort.* Un corp de masă 0,05 kg fixat la capătul unui anumit resort execută o mișcare armonică simplă descrisă de legea $x = 0{,}02 \sin 10\, t$, unde x este exprimat în metri și t în secunde.

(a) Găsiți constanta elastică k.

(b) Determinați energia cinetică maximă.

(c) Care este energia potențială maximă și energia totală?

8. *Oscilatorul bidimensional.* O particulă se poate mișca în planul x, y, sub acțiunea unei forțe de mărime $-k(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}) = -k\mathbf{r}$ îndreptată către origine. Găsiți ecuațiile de mișcare pentru coordonatele x și y și rezolvați-le, presupunînd că particula are masa M.

(a) Care sînt condițiile pentru ca mișcarea să fie circulară și care este perioada acestei mișcări?

(b) Care sînt condițiile pentru ca mișcarea să aibă loc de-a lungul unei drepte care face un unghi de 45° cu axa x și care este perioada mișcării?

9. *Corp pe fundul unui vas sferic.* Un corp alunecă liber pe fundul unui vas sferic de rază 1 m. Găsiți perioada micilor oscilații. Care este lungimea unui pendul echivalent?

10. *Vîscozitatea*

(a) Consultați o carte de referință care dă și explică definiția vîscozității.

(*b*) Care este dimensiunea coeficientului de vîscozitate η?

(*c*) Care este valoarea vîscozității apei la 20°C?

(*d*) Evaluați (*b*) [vezi ec. (7.28)] pentru o sferă cu raza de 5 cm într-un mediu de vîscozitate 2 centipoise (vezi probl. 13).

(*e*) Găsiți viteza finală pentru punctul (*d*), unde densitatea sferei este 2 700 kg/m^3 iar densitatea lichidului 1100 kg/m^3. Folosiți forța rezultantă verticală, așa cum s-a explicat în problema 5, și timpul de relaxare.

11. *Mișcarea sub acțiunea unei forțe de vîscozitate.*

(*a*) O particulă de masă M asupra căreia acționează doar forța de vîscozitate a mediului de forma $-bv$ este aruncată într-un punct cu viteza v_0. Scrieți expresia vitezei ca funcție de timp. Găsiți $x(t)$, amintindu-vă că $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Calculați distanța parcursă de corp dacă $M = 0{,}01$ kg, $b = 4 \cdot 10^{-3}$ N · s/m și $v_0 = 1$ m/s.

(*b*) În experiența lui Millikan unele picături de ulei aveau raza de $2 \cdot 10^{-6}$ m. Densitatea uleiului era de 920 kg/m^3 iar vîscozitatea aerului $1{,}8 \cdot 10^{-4}$ centipoise. Găsiți timpul de relaxare și viteza limită. Neglijați corecția de plutire.

12. *Timp de relaxare.* Un oscilator are $M = 0{,}01$ kg, $k = 0{,}49$ N/m, $b = 1 \cdot 10^{-3}$ N · s/cm. La $t = 0$, $x = 0{,}02$ m și $\dot{x} = 0$.

(*a*) Găsiți x ca funcție de timp.

(*b*) Care este timpul de relaxare pentru x; dar pentru E_c?

(*c*) Care este valoarea lui Q?

13. *Oscilatorul amortizat.* O bilă sferică de rază $3 \cdot 10^{-3}$ m și masă $5 \cdot 10^{-4}$ kg se deplasează prin apă sub acțiunea unui resort de constantă elastică $k = 0{,}05$ N/m. Coeficientul de vîscozitate η pentru apă este 10^{-3} N · s/m^2 sau 10^{-2} poises. Determinați numărul de oscilații care au loc pînă cînd amplitudinea scade la jumătate din valoarea ei inițială. (Observați că $e^{-0{,}693} = 1/2$.) Care este factorul de calitate Q al oscilatorului?

TEME AVANSATE

Oscilatorul anarmonic. În continuarea analizei de la paginile 228–234 considerăm un pendul care oscilează cu o astfel de amplitudine încît nu mai putem neglija termenul θ^3 din dezvoltarea lui sin θ, așa cum am făcut în ecuația (7.9). Care este efectul pe care îl are termenul în θ^3 asupra mișcării pendulului? Am văzut, în tabelul 7,1, efectul asupra perioadei. Vom trata acum problema din punct de vedere analitic.

Problemele anarmonice, sau neliniare, sînt de obicei greu de rezolvat exact (deși calculatoarele pot să ne furnizeze cu ușurință orice precizie dorim), dar soluțiile aproximative sînt adesea adecvate pentru a ne da o idee asupra fenomenelor care au loc. Ecuația (7.8) dă:

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots$$

astfel încît în acest ordin ecuația de mișcare (7.7) devine:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\theta - \frac{\omega_0^2}{6}\theta^3 = 0 \qquad (7.43)$$

unde ω_0^2 este o notație pentru mărimea g/L. Aceasta este ecuația de mișcare pentru un *oscilator anarmonic*.

Vom căuta să găsim pentru ecuația (7.43) o soluție aproximativă de forma:

$$\theta = \theta_0 \sin\omega t + \varepsilon\theta_0 \sin 3\omega t \qquad (7.44)$$

unde ε este o constantă adimensională pe care o presupunem mult mai mică decît 1 pentru $\theta_0 \ll 1$. Adică, vom vedea dacă mișcarea poate fi reprezentată aproximativ (sau exact — nu știm încă!) ca superpoziția a două mișcări diferite, una descrisă de sin ωt și cealaltă de sin $3\omega t$. Prezența unui

termen proporțional cu $\sin 3\omega t$ este sugerată de identitatea trigonometrică [Dwight 403,03]:

$$\sin^3 x \equiv \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x. \quad (7.45)$$

Astfel, termenul θ^3 din ecuația diferențială (7.43) va genera din cubul lui $\sin \omega t$ un termen de tipul $\sin 3\omega t$. Pentru a satisface ecuația diferențială sîntem obligați să adăugăm la $\sin \omega t$ un termen de forma $\varepsilon \sin 3\omega t$ pentru a compensa termenul $\sin 3\omega t$ generat de θ^3. Mai departe, noul termen $\varepsilon \sin 3\omega t$ în soluția pe care o încercăm va genera, prin ridicare la cub, un termen în $\varepsilon^3 \sin 9\omega t$ și așa mai departe. Nu există nici un motiv aparent conform căruia procesul să se oprească; dar, dacă $\varepsilon \ll 1$, este de așteptat ca seria să conveargă rapid, deoarece în termenii de frecvențe înalte intervin ca factori puteri din ce în ce mai înalte ale lui ε. Observăm astfel că expresia (7.44) poate fi, în cel mai bun caz, doar o soluție aproximativă. Rămîne să determinăm acum ε și ω; deși frecvența ω trebuie să se reducă la ω_0 la amplitudini mici, ea poate diferi de ω_0 la amplitudini mari. Presupunem pentru simplitate că la $t = 0$ avem $\theta = 0$.

O soluție aproximativă de acest tip se numește *soluție de perturbație*, deoarece un termen din ecuația diferențială perturbă mișcarea care ar fi avut loc în absența acelui termen. După cum ați văzut, am ajuns la soluția de forma (7.44) pe baza unui raționament aproximativ. Este destul de ușor să verificăm cîteva soluții de probă și să le eliminăm pe acelea care nu satisfac ecuația.

Din ecuația (7.43) avem:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta_0 \sin \omega t - 9\omega^2\varepsilon\theta_0 \sin 3\omega t$$

$$\theta^3 = \theta_0^3(\sin^3\omega t + 3\varepsilon \sin^2\omega t \sin 3\omega t + \ldots)$$

unde am neglijat termenii de ordinul ε^2 și ε^3 pe baza presupunerii noastre că putem găsi o soluție cu $\varepsilon \ll 1$. Folosind identitatea trigonometrică din relația (7.45), termenii din ecuația (7.43) devin atunci:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta_0 \sin \omega t - 9\omega^2\varepsilon\theta_0 \sin 3\omega t \quad (7.46)$$

$$\omega_0^2\theta = -\omega_0^2\theta_0 \sin \omega t + \omega_0^2\varepsilon\theta_0 \sin 3\omega t -$$

$$-\frac{1}{6}\omega_0^2\theta^3 = -\frac{3\omega_0^2}{24}\theta_0^3 \sin \omega t + \frac{\omega_0^2}{24}\theta_0^3 \sin 3\omega t - \frac{\omega_0^2}{2}\theta_0^3 \varepsilon \sin^2 \omega t \sin 3\omega t.$$

Adunăm acum ecuațiile (7.46) membru cu membru. Suma din membrul stîng este egală cu zero, conform ecuației (7.43). Pentru ca expresia (7.44) să fie o soluție aproximativă la orice moment t, este necesar ca coeficienții lui $\sin \omega t$ și $\sin 3\omega t$ să se anuleze separat în membrul drept al ecuației (7.46). Într-adevăr, să presupunem că acești coeficienți nu se anulează; am avea atunci o expresie de forma $A \sin \omega t + B \sin 3\omega t = 0$, unde A și B sînt constante. Dar o astfel de ecuație *nu poate fi* satisfăcută pentru orice valoare a lui t; în consecință, trebuie ca A și B să aibă fiecare valoarea zero. Oprindu-ne la $3\omega t$ în soluția (7.44) pe care am presupus-o, nu am inclus toți termenii sau toate frecvențele care pot apărea, dar i-am inclus pe cei mai importanți.

Condiția ca coeficienții lui $\sin \omega t$ în ecuația (7.46) să aibă suma egală cu zero este ca:

$$-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{24}\omega_0^2\theta_0^2 = 0$$

sau

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{8}\theta_0^2\right);$$

$$\omega \approx \omega_0\left(1 - \frac{1}{16}\theta_0^2\right), \quad (7.47)$$

unde am folosit dezvoltarea binomială a radicalului (vezi cap. 2, note matematice, pagina 73). Ecuația (7.47) exprimă dependența lui ω de θ_0. De aici se vede că ω_0 este limita lui ω pentru $\theta_0 \to 0$, adică limita în cazul amplitudinii mici. Pentru $\theta_0 = 0{,}3$ rad, modificarea relativă a frecvenței este $\Delta\omega/\omega \approx -10^{-2}$, unde $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0$. Observați că frecvența pendulului la amplitudini mari depinde de valoarea amplitudinii.

Soluția din ecuația (7.44) conține, de asemenea, un termen în $\sin 3\omega t$. Amplitudinea acestui termen raportată la amplitudinea termenului $\sin \omega t$ este ε, care este determinat de condiția ca coeficientul

termenului $\sin 3\omega t$ în ecuația (7.46) să se anuleze:

$$-9\omega^2\varepsilon + \omega_0^2\varepsilon + \frac{\omega_0^2}{24}\theta_0^2 = 0.$$

Dacă punem $\omega^2 \approx \omega_0^2$, această ecuație se reduce la:

$$\varepsilon \approx \frac{\theta_0^2}{192}.$$

Interpretăm parametrul ε ca o măsură pentru contribuția relativă a termenului $\sin 3\omega t$ într-o soluție pentru θ dominată de $\sin \omega t$. Pentru $\theta_0 = 0{,}3$ rad, avem $\varepsilon \approx 10^{-3}$, adică o valoare foarte mică. Coeficientul termenului $\sin^2 \omega t \sin 3\omega t$ în ecuația (7.46) este de ordinul $O(\varepsilon)$ sau $O(\theta_0^2)$ în comparație cu termenii pe care i-am folosit. Am neglijat acest termen în aproximația noastră.

De ce nu includem în ecuația (7.44) un termen în $\sin 2\omega t$? Încercați singuri o soluție de forma:

$$\theta = \theta_0 \sin \omega t + \eta_1 \theta_0 \sin 2\omega t$$

și vedeți ce se întîmplă. Veți găsi $\eta_1 = 0$. Pendulul generează în special armonica a treia, adică termeni în $\sin 3\omega t$ și deloc termeni în $\sin 2\omega t$. Situația ar fi diferită pentru un sistem a cărui ecuație de mișcare include un termen în θ^2. În acest caz, soluția ar avea un termen în $\sin 2\omega t$ și se poate utiliza aceeași tehnică. Există multe astfel de probleme (de exemplu, dilatarea termică a solidelor) în care forța este mai puternică pentru o valoare pozitivă (negativă) a deplasării decît pentru o valoare egală negativă (pozitivă).

Care este frecvența pendulului la amplitudini mari? Nu există o frecvență unică a mișcării. Am văzut că termenul cel mai important (componenta cea mai mare) este de forma $\sin \omega t$ și spunem că ω este *frecvența fundamentală* a pendulului. În aproximația noastră ω este dat de ecuația (7.47). Termenul în $\sin 3\omega t$ este numit *armonica a treia* a frecvenței fundamentale. Raționamentul care urmează după formula (7.44) sugerează că în mișcarea exactă este prezent un număr infinit de armonice, dar că majoritatea acestora dau contribuții foarte mici. În expresia (7.44) amplitudinea componentei fundamentale a mișcării este θ_0; amplitudinea componentei armonicei a treia este $\varepsilon\theta_0$.

Oscilații armonice forțate cu amortizare. Vom considera acum în detaliu mișcarea forțată, sau întreținută, a unui oscilator armonic amortizat. Aceasta este o problemă de cea mai mare importanță. Dacă, în afara frecării, mai există o forță externă $F(t)$ aplicată oscilatorului, ecuația de mișcare este:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t),$$

sau, într-o notație mai compactă, cu $\tau \equiv M/b$ și $\omega_0^2 \equiv k/M$.

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{M}. \quad (7.48)$$

Aici ω_0 este *frecvența naturală* a sistemului în absența frecării și în absența forței externe. Cînd forța externă are o frecvență diferită $\omega(\neq\omega_0)$, vom vedea că răspunsul în regim staționar va avea frecvența impusă și *nu* frecvența naturală. Dar, dacă forța externă este brusc îndepărtată, sistemul va reveni la o oscilație amortizată cu o frecvență aproximativ egală cu cea naturală, cu condiția ca amortizarea să fie slabă.

Să presupunem în ecuația (7.48) că:

$$\frac{F(t)}{M} = \frac{F_0 \sin \omega t}{M} \equiv \alpha_0 \sin \omega t; \quad \alpha_0 \equiv \frac{F_0}{M} \quad (7.49)$$

astfel încît forța externă este sinusoidală cu frecvența ω. Această relație definește mărimea α_0. Răspunsul sistemului în starea *staționară* (starea sistemului după ce toate efectele tranzitorii s-au stins) va avea exact frecvența forței externe. În caz contrar, faza relativă dintre forță și răspuns ar varia în timp. Aceasta este o caracteristică importantă a rezultatului — răspunsul în stare staționară a unui oscilator armonic (chiar cu amortizare) acționat de o forță externă, se produce cu *frecvența externă* și nu cu frecvența naturală ω_0. Nici o altă frecvență în afara frecvenței forței externe nu va satisface ecuația de mișcare. Prin răspuns înțelegem fie elongația (deplasarea) x, fie viteza $\dot{x}$. Vom considera aici ca răspuns elongația x.

Căutăm pentru ecuaţia (7.48) o soluţie de forma:

$$x = x_0 \sin(\omega t + \Phi) \qquad (7.50)$$

în care va trebui să determinăm din ecuaţia de mişcare valorile amplitudinii x_0 şi a fazei[1] Φ. În relaţia (7.50) ω *nu* este frecvenţa naturală a oscilatorului, ci frecvenţa forţei externe; unghiul Φ reprezintă defazajul între forţa externă şi elongaţia oscilatorului. Astfel, Φ are aici un sens total diferit de ceea ce am întîlnit la oscilatorul armonic liber, unde Φ a fost legat de condiţiile iniţiale. Dacă considerăm numai starea staţionară, condiţiile iniţiale sînt irelevante pentru oscilatorul supus forţei exterioare.

Este important să definim precis ce înţelegem prin defazajul Φ între elongaţie şi forţa externă. Atît forţa externă cît şi elongaţia sînt descrise de o oscilaţie armonică simplă. Între două maxime succesive ale forţei sau ale elongaţiei faza este de 360° sau 2π rad. *Defazajul Φ reprezintă unghiul cu care elongaţia îşi atinge maximul înaintea forţei.* De exemplu, să presupunem că forţa îşi atinge cea mai mare valoare pozitivă în momentul în care elongaţia este nulă şi crescătoare în sens pozitiv. Deplasarea va fi atunci în urma forţei cu unghiul $\pi/2$ rad. Dar Φ este definit ca unghiul cu care x este *în avans* faţă de F, astfel încît în acest caz Φ este egal cu $-\pi/2$.

Să considerăm derivatele:

$$\frac{dx}{dt} = \omega x_0 \cos(\omega t + \Phi).$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \Phi).$$

[1] Este necesar să lăsăm unghiul Φ (numit faza unghiulară a lui x relativ la forţa F) să ia valori diferite de zero. Nu se poate obţine nici o soluţie dacă Φ este omis. Cînd se vorbeşte despre o fază unghiulară este necesar să se specifice mărimile între care există defazajul. În probleme de electricitate se vorbeşte în mod obişnuit de faza curentului electric în raport cu tensiunea. Aici ne referim la faza elongaţiei x în raport cu forţa externă F. Cele două faze nu sînt echivalente, deoarece analogul curentului electric nu este x, ci dx/dt.

Ecuaţia de mişcare (7.48) se scrie atunci:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 \sin(\omega t + \Phi) + \frac{\omega}{\tau} x_0 \cos(\omega t + \Phi) = \alpha_0 \sin \omega t \qquad (7.51)$$

Putem simplifica această relaţie pe baza identităţilor trigonometrice:

$$\sin(\omega t + \Phi) = \sin \omega t \cos \Phi + \cos \omega t \sin \Phi$$

$$\cos(\omega t + \Phi) = \cos \omega t \cos \Phi - \sin \omega t \sin \Phi.$$

Astfel ecuaţia (7.51) devine:

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\Phi - \frac{\omega}{\tau}\sin\Phi\right] x_0 \sin \omega t + \left[(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\Phi + \frac{\omega}{\tau}\cos\Phi\right] \cdot x_0 \cos \omega t = \alpha_0 \sin \omega t \qquad (7.52)$$

Această ecuaţie poate fi satisfăcută numai dacă coeficientul lui $\cos \omega t$ este zero. Condiţia poate fi scrisă sub forma:

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi} = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (7.53)$$

De asemenea, coeficientul lui $\sin \omega$ trebuie să fie egal cu α_0:

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\Phi - (\omega/\tau)\sin\Phi}. \qquad (7.54)$$

Din relaţia (7.53) rezultă că:

$$\cos\Phi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{1/2}} \qquad (7.55)$$

$$\sin\Phi = \frac{-\omega/\tau}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{1/2}}$$

de unde formula (7.54) devine:

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{1/2}}. \qquad (7.56)$$

Aceasta este amplitudinea mişcării.

Relaţiile (7.55) şi (7.56) ne dau soluţia dorită. Ştim acum amplitudinea x_0 şi faza Φ a răspunsului sistemului la acţiunea forţei externe $F = M\alpha_0 \sin \omega t$:

$$x = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{1/2}} \sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{\omega/\tau}{\omega^2 - \omega_0^2}\right). \qquad (7.57)$$

Amplitudinea din formula (7.57) este reprezentată ca funcție de ω în figura. 7.14, iar defazajul Φ în figura 7.15. Observați din grafic că faza Φ este totdeauna negativă. Acest fapt poate fi înțeles din relația (7.53), deoarece $\Phi = 0$ pentru $\omega = 0$, $0 > \Phi > -\pi/2$ pentru $\omega < \omega_0$ și $-\pi/2 > \Phi > -\pi$ pentru $\omega > \omega_0$.

Putem înțelege mai bine această soluție examinînd cazurile limită. În analiza noastră vom presupune mereu că amortizarea este slabă, adică $\omega_0\tau \gg 1$.

Frecvență impusă joasă $\omega \ll \omega_0$. În acest caz, vedem din relațiile (7.55) că:

$$\cos\Phi \to 1; \ \sin\Phi \to -0$$

deci $\Phi \to 0$. Răspunsul la frecvențe joase se zice că este *în fază* cu forța externă. Din expresia (7.56) obținem:

$$x_0 \to \frac{\alpha_0}{\omega_0^2} = \frac{M\alpha_0}{k} = \frac{F_0}{k}. \qquad (7.58)$$

În această limită *resortul* insuși (și nu masă sau frecarea) controlează răspunsul; corpul este pur și simplu deplasat lent înainte și înapoi de către forța externă care acționează împotriva forței elastice a resortului.

Răspunsul la rezonanță $\omega = \omega_0$. La rezonanță, răspunsul poate fi foarte mare Utilizăm adesea în aplicații răspunsuri la rezonanță și trebuie să le tratăm cu atenție Cînd $\omega = \omega_0$ frecvența impusă este egală cu frecvența naturală a sistemului în absența frecării. Avem:

$$\cos\Phi \to \pm 0, \ \sin\Phi \to -1, \ \Phi \to -\frac{\pi}{2}.$$

La $\omega = \omega_0$, amplitudinea este dată de

$$x_0 = \frac{\alpha_0\tau}{\omega_0}. \qquad (7.59)$$

Cu cît amortizarea este mai slabă, cu atît τ și deci x_0 sînt mai mari. Dacă menținem F_0 constant, raportul dintre răspunsul la rezonanță și răspunsul la frecvență zero se obține din relațiile (7.58) și (7.59) egal cu:

$$\frac{x_0(\omega = \omega_0)}{x_0(\omega = 0)} = \frac{\alpha_0\tau/\omega_0}{\alpha_0/\omega_0^2} = \omega_0\tau = Q,$$

unde factorul Q a fost definit în formula (7.41). Acest raport poate fi foarte mare — adeseori 10^4 sau mai mult! Se poate spune că amortizarea controlează răspunsul la rezonanță.

Răspunsul maxim x_0 nu apare exact cînd $\omega = \omega_0$. Observăm că derivata expresiei (7.56) are un zero la:

$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2\right] =$$

$$= 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + \frac{2\omega}{\tau^2} = 0$$

sau

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}.$$

Aceasta este poziția de maxim a curbei care reprezintă pe x_0 în funcție de ω. Dacă $\omega_0\tau \gg 1$, maximul este foarte apropiat de $\omega = \omega_0$.

Poate părea ciudat că răspunsul maxim este obținut cînd defazajul unghiular este aproape de $-\pi/2$, adică cînd forța este defazată cu 90° față de elongație. Poate să apară mai logic ca rezonanța să aibă loc cînd $\Phi = 0$ și nu $-\pi/2$. Explicația este următoarea: puterea absorbită de oscilator nu depinde direct de faza dintre forța externă și elongație, ci de faza dintre forță și *viteză*. Se poate vedea, după un moment de gîndire, că vom obține cea mai mare deviere cînd viteza este exact în fază cu forța externă. În acest mod, corpul primește un impuls exact la momentele și în pozițiile potrivite. Cînd elongația este zero, viteza este maximă. Dacă în acest punct corpul se mișcă în sensul pozitiv, dorim ca în acest moment forța să își atingă valoarea maximă pentru ca să obținem mișcarea maximă. În punctele de întoarcere, unde viteza își schimbă sensul, trebuie, pentru a avea rezonanță, ca forța să-și schimbe în acel moment sensul, în exact același mod. Rezonanța este prin urmare exprimată cel mai bine în funcție de faza dintre viteză și forța externă. Știm că viteza unui oscilator este în avans față de elongație cu exact 90°. Așadar, la rezonanță, cînd forța și viteza sînt în fază, trebuie ca forța să fie înaintea elongației, astfel încît $\Phi = -\pi/2$. După cum am subliniat mai sus, deși amplitudinea maximă are loc la o frecvență ușor mai joasă decît ω_0, puterea maximă se obține cînd $\omega = \omega_0$.

Frecvență impusă înaltă $\omega \gg \omega_0$. În acest caz

$$\cos\Phi \to -1, \quad \sin\Phi \to 0, \quad \Phi \to -\pi$$

și

$$x_0 \to \frac{\alpha_0}{\omega^2} = \frac{M\alpha_0}{M\omega^2} = \frac{F_0}{M\omega^2}.$$

În această limită, răspunsul descrește ca $1/\omega^2$. Inerția corpului controlează răspunsul în limita frecvenței înalte și masa răspunde în esență ca un obiect liber, fiind deplasată rapid înainte și înapoi de către forță. Observați că defazajul Φ al elongației x în raport cu forța externă F pleacă de la zero la frecvențe joase, trece prin $-\pi/2$ la rezonanță și atinge $-\pi$ la frecvențe înalte. *Elongația este mereu în întîrziere față de forța externă.*

O cale geometrică interesantă pentru înțelegerea acestor fenomene este dată în figura 7.16. În loc să reprezentăm răspunsul x_0 sau puterea ca funcție de ω, folosim ca variabilă unghiul Φ. Din formulele (7.55) și (7.56) rezultă că:

$$\omega x_0 = \frac{F_0}{b}\sin(-\Phi) = v_0.$$

unde b este coeficientul de amortizare (M/τ) din ecuația (7.30). Produsul ωx_0 este exact valoarea maximă a vitezei $\dot{x}$, sau amplitudinea vitezei pe care o numim v_0. În diagrama polară din figura 7.16 lungimea segmentului OP este exact această amplitudine a vitezei v_0, cu diametrul ales egal cu F_0/b, pentru a fi în concordanță cu ecuația de mai sus. Trebuie să ne amintim că Φ este de fapt un unghi negativ, dar deoarece în figură ne interesează doar mărimea lui v_0, îl tratăm pe Φ ca și cum ar fi un unghi pozitiv, deoarece:

$$\sin(-\Phi) = -\sin\Phi;$$

$$|\sin(-\Phi)| = |\sin\Phi|.$$

Valorile lui Φ date în explicația figurii 7.16 sînt valorile corecte negative. Din acest grafic polar putem vedea că în timp ce Φ variază, lungimea lui OP pleacă de la o valoare mică (fig. 7.16, *c*), crește la valoarea maximă a diametrului cercului, cînd $\Phi = -\pi/2$ (fig. 7.16, *e*) și apoi descrește din nou cînd Φ tinde la $-\pi$ (fig. 7.16, *f* și *g*). După cum se va vedea în cele ce urmează puterea este media lui $F\dot{x}$ pe un ciclu [vezi relațiile (7.60) și (7.62)] și are o valoare maximă la $\Phi = -\pi/2$.

Absorbția puterii. Media temporală a lucrului mecanic efectuat în unitatea de timp asupra sistemului oscilant de către forța externă, se obține, utilizînd relația (7.49) și derivata temporală a ecuației (7.57), în forma:

$$P = \langle F\dot{x}\rangle = \frac{M\alpha_0^2\omega}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}}\cdot \langle \sin\omega t\cos(\omega t+\Phi)\rangle. \quad (7.60)$$

Utilizînd identitatea:

$$\cos(\omega t+\Phi) = \cos\omega t\cos\Phi - \sin\omega t\sin\Phi$$

avem

$$\langle \sin\omega t[\cos\omega t\cos\Phi - \sin\omega t\sin\Phi]\rangle =$$

$$= -\sin\Phi\langle\sin^2\omega t\rangle = -\frac{1}{2}\sin\Phi \quad (7.61)$$

unde am folosit faptul că $\langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle = 0$. Observăm că aici faza are o deosebită importanță (vezi fig. 7.17, *a* și *b*). Înlocuind pe $\sin\Phi$ din relația (7.55) putem scrie formula (7.60) sub forma:

$$P = \frac{1}{2}M\alpha_0^2\frac{\omega^2/\tau}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}M\alpha_0^2\tau\left[\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega/\tau}\right)^2+1\right]^{-1}. \quad (7.62)$$

Acesta este un rezultat important, ilustrat în figura 7.17.

Absorbția de putere la rezonanță $(\omega = \omega_0)$ este:

$$P_{rez} = \frac{1}{2}M\alpha_0^2\tau.$$

Absorbția puterii (relația (7.62)) se reduce la jumătate din valoarea la rezonanță cînd ω este modificat cu $\pm(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}}$, astfel încît:

$$\frac{\omega}{\tau} = \omega_0^2 - \omega^2 \equiv (\omega_0+\omega)(\omega_0-\omega) \approx$$

$$\approx 2\omega(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}}. \quad (7.63)$$

Așadar, lărgimea totală $2(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}}$ a rezonanței, la putere egală cu jumătate din valoarea maximă, este egală cu $1/\tau$. Utilizînd expresia

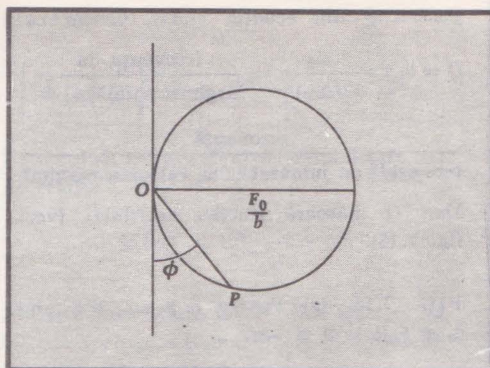


FIG. 7.16. (*a*). „Graficul polar" dă o reprezentare grafică simplă a oscilațiilor armonice forțate. Se construiește un cerc de diametru F_0/b și un segment de dreaptă OP care face unghiul Φ cu ordonata.

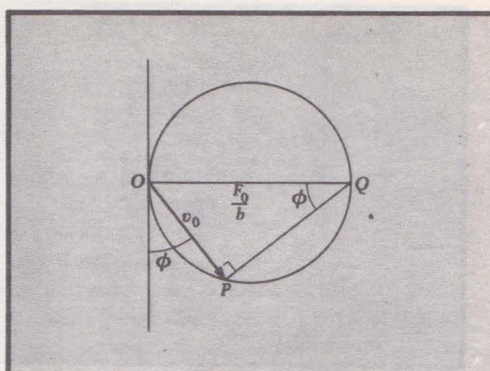


FIG. 7.16. (*b*) Pentru orice Φ, triunghiul OPQ este dreptunghic. Astfel, segmentul $OP = -(F_0/b)\sin\Phi$. Din relațiile (7.55) – (7.57) vedem că acest segment are valoarea $OP = \omega x_0 = v_0$, egală cu amplitudinea vitezei.

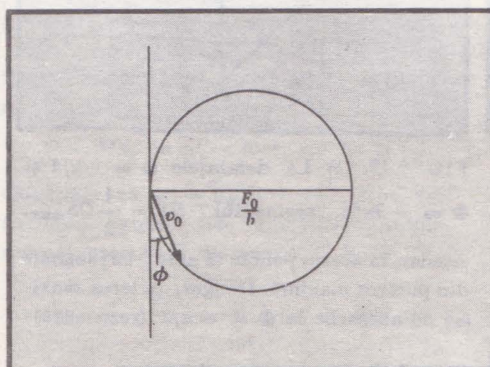


FIG. 7.16. (*c*) Pentru $\omega \ll \omega_0$ rezultă $\Phi \approx 0$ și $v_0 \ll F_0/b$. În această limită, răspunsul este foarte mic.

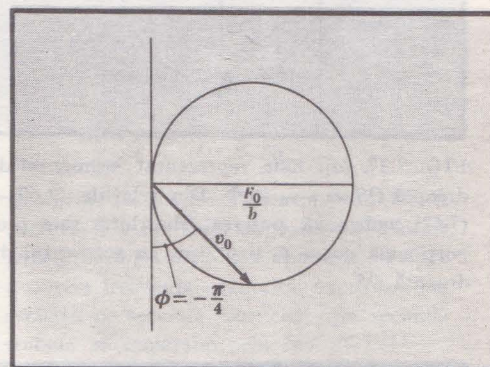


FIG. 7.16. (*d*) Pe măsură ce ω crește, cresc și $|\Phi|$ și v_0. La $\Phi = -\pi/4$, $v_0 = F_0/\sqrt{2b}$.

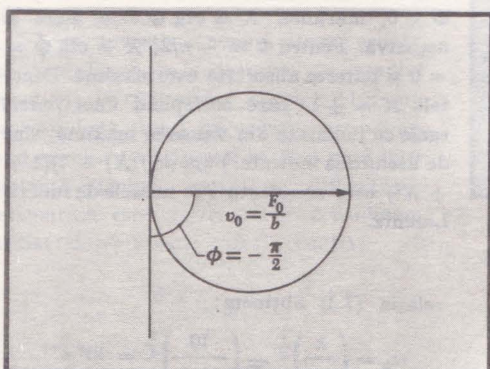


FIG. 7.16. (*e*) La $\Phi = -\pi/2$, avem $\omega = \omega_0$ și $v_0 = F_0/b$. Amplitudinea vitezei este *maximă la rezonanță*.

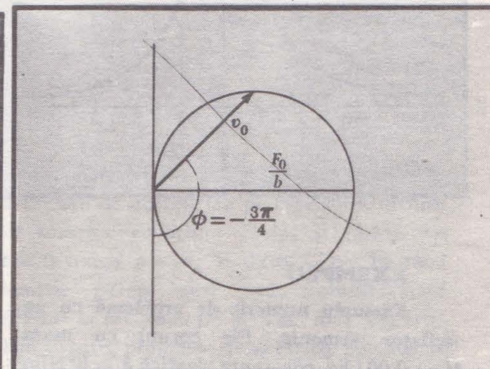
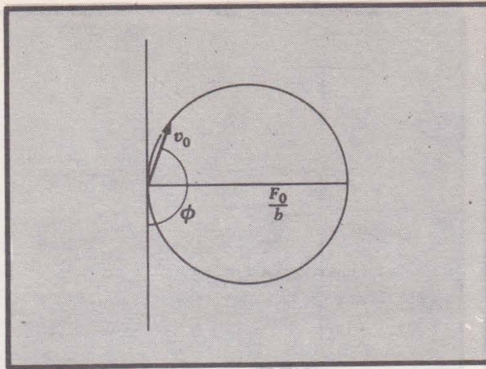


FIG. 7.16. (*f*) Pentru $\omega > \omega_0$, v_0 descrește din nou. La $\Phi = -3\pi/4$, v_0 are iarăși valoarea $F_0/\sqrt{2b}$.



pentru Q din ecuația (7.41), vedem că:

$$Q = \omega_0\tau = \frac{\omega_0}{2(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}}} = \frac{\text{frecvența la rezonanță}}{\text{lărgimea totală la putere egală cu jumătate din valoarea maximă}}$$

Deci Q măsoară finețea acordului (vezi fig. 7.18).

FIG. 7.16. (*g*) Pentru $\omega \gg \omega_0$, din nou $v_0 \ll F_0/b$ și $\Phi \approx -\pi$.

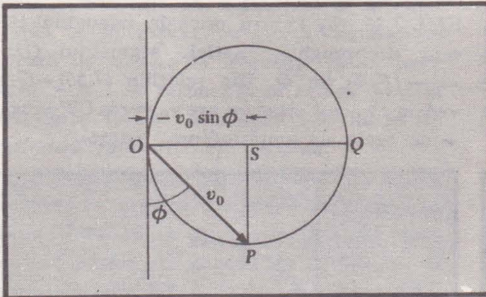


FIG. 7.17. (*a*). Este reprezentat segmentul de dreaptă $OS = -v_0 \sin\Phi$. Din relațiile (7.60)–(7.62) vedem că puterea absorbită este proporțională cu $-v_0 \sin\Phi$, sau cu segmentul de dreaptă OS.

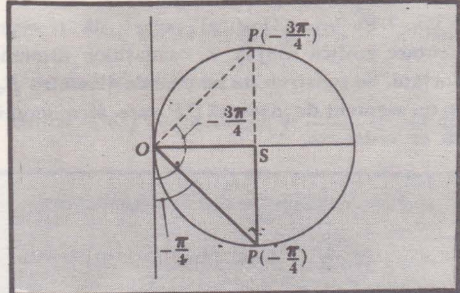


FIG. 7.17. (*b*) La defazajele $\Phi = -\pi/4$ și $\Phi = -3\pi/4$ segmentul $OS = \frac{1}{2} OS_{max}$. Așadar, în aceste puncte se absoarbe *jumătate* din puterea maximă. Desigur, puterea *maximă* se absoarbe la $\Phi = -\pi/2$ (rezonanță)

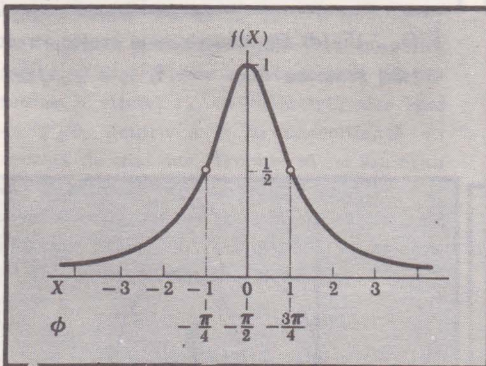


FIG. 7.18. Puterea absorbită este proporțională cu $f(X) = 1/(1+X^2)$, unde

$$X = \frac{-(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega/\tau} = \text{ctg}\ \Phi,$$

după cum rezultă din relația (7.62). Pentru $\Phi \approx 0$, mărimea $X = \text{ctg}\ \Phi$ este mare și negativă. Pentru $\Phi = -\pi/2$, $X = \text{ctg}\ \Phi = 0$ și puterea absorbită este maximă. Punctele $X = \pm 1$, care corespund unei puteri egale cu jumătate din valoarea maximă, sînt de asemenea indicate. Funcția $f(X) = 1/(1 + X^2)$ este cunoscută sub numele de funcție Lorentz.

EXEMPLU

Exemplu numeric de problemă cu un oscilator armonic. Fie corpul cu masa $M = 0{,}001$ kg, constanta elastică $k = 10$ N/m și timpul de relaxare $\tau = \frac{1}{2}$ s. Atunci, din relația (7.3) obținem:

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{M}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{10}{10^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^2\ \text{s}^{-1},$$

iar din ecuația (7.33) frecvența oscilațiilor

libere este:

$$\left[\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = [10^4 - 1]^{\frac{1}{2}} \approx 10^2\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Factorul de calitate Q al sistemului este dat de relația (7.41):

$$Q \approx \omega_0\tau = 10^2 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$

Amplitudinea scade la e^{-1} din valoarea sa inițială (pentru sistemul liber) în intervalul de timp:

$$2\tau = 1\ \mathrm{s},$$

care se obține din relația (7.32).

Constanta de amortizare $b = M/\tau = \dfrac{10^{-3}}{\frac{1}{2}} =$

$$= 2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/s}.$$

Să considerăm acum sistemul sub acțiunea forței:

$$F = M\alpha_0 \sin \omega t = 10^{-4} \cdot \sin 90t\ \mathrm{N}.$$

Observăm că $\alpha_0 = F_0/M = 10^{-1}$ N/m iar frecvența externă este $\omega = 90\ \mathrm{s}^{-1}$. Amplitudinea este dată de relația (7.56):

$$x_0 \approx \frac{10^{-1}}{[4 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^4]^{\frac{1}{2}}} \approx 5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m},$$

iar faza se obține din ecuația (7.53):

$$\mathrm{tg}\,\Phi \approx -\frac{180}{1,9 \cdot 10^3} \approx -0,1$$

sau $\Phi \approx -0,1$ rad $\approx -6°$. Astfel la fiecare oscilație elongația maximă este atinsă cu o întîrziere de $0,1$ rad/90 rad/s $\approx 10^{-3}$ s față de maximul forței.

Putem compara amplitudinea de mai sus cu cea la limita $\omega \to 0$ și cu amplitudinea la rezonanță. Din relația (7.58) obținem $x_0(\omega = 0) = \alpha_0/\omega_0^2 = 10^{-1}/10^4 = 10^{-5}$ m. La rezonanță, din relațiile (7.59) și (7.41), avem:

$$x_0(\omega = \omega_0) = Qx_0(\omega = 0) = 50 \cdot 10^{-5} =$$

$$= 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}.$$

Lărgimea totală a curbei de rezonanță între punctele de putere egală cu 1/2 din valoarea maximă se obține din relația (7.63) și cea imediat următoare:

$$2(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{100}{50} = 2\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Observați că în acest exemplu am folosit pretutindeni termenul de *frecvență* în loc de *frecvență unghiulară* sau pulsație. Pentru a obține frecvența obișnuită exprimată în oscilații pe secundă sau cicli pe secundă trebuie să împărțim prin 2π.

NOTE MATEMATICE

Vom investiga acum cîteva ecuații mai complicate care intervin în studiul mecanicii. În capitolul 3 (pagina 115) am rezolvat două tipuri de ecuații care corespund cazului *fără forțe* și cazului unei *forțe constante*. Ținînd seama de dificultățile matematice, este convenabil să considerăm imediat după aceste cazuri ecuația:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = bt,$$

unde b este o constantă iar t reprezintă timpul. Dacă derivăm de două ori termenul t^3, obținem t, astfel încît soluția acestei ecuații va fi:

$$x = \frac{1}{6}bt^3 + c_0t + d_0,$$

unde observăm că c_0 și d_0 sînt constante arbitrare de același tip pe care l-am întîlnit în soluțiile ecuațiilor (3.52) și (3.54). La $t = 0$ avem $x = d_0$ și $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = c_0$. În mod similar putem găsi ușor soluția dacă $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = bt^2$ sau ft^3 și așa mai departe. Din păcate, probleme de acest tip sînt foarte puține ca număr, astfel încît trebuie să considerăm alte cazuri pe care le vom întîlni mai des în fizică.

Forța de rezistență. O problemă destul de obișnuită în mecanică este cazul unei forțe de rezistență direct proporțională cu viteza. (O ecuație de același tip apare și în cazul dezintegrării substanțelor radioactive.) În acest caz, legea a doua a lui Newton dă:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -bv = -b\frac{dx}{dt}. \quad (7.64)$$

Semnul minus indică faptul că forța tinde să reducă viteza. Putem simplifica ecuația dacă ne amintim că accelerația d^2x/dt^2 este exact egală cu dv/dt, astfel încît ecuația (7.64) devine:

$$m\frac{dv}{dt} = -bv$$

sau

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b\,dt}{m}.$$

Avem acum o ecuație pe care o putem integra prin metode standard:

$$\int\frac{dv}{v} = \ln v = -\int\frac{b\,dt}{m} = -\frac{bt}{m} + \text{const.}$$

$$v = Ae^{-bt/m}. \quad (7.65)$$

Aici e este baza logaritmilor naturali și are valoarea 2,718.... Proprietățile logaritmilor naturali sînt similare cu cele ale logaritmilor în baza 10. Valorile logaritmilor naturali pot fi găsite în tabelele matematice. Un număr care merită să fie reținut este

$$e^{-0,693} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ce este constanta A din expresia (7.65)? La $t = 0$, $e^{-0} = 1$ astfel încît $v = A$. Așadar, aceasta este o constantă arbitrară pe care o putem folosi pentru a satisface condițiile inițiale. Mai înainte, totuși, am avut două constante arbitrare, iar aici avem numai una singură. Dar ecuația pe care am rezolvat-o este o ecuație de ordinul întîi și de aceea avem numai o constantă. Putem să mergem înapoi la $v = dx/dt$ și să scriem:

$$dx/dt = v_0e^{-bt/m} \quad (7.66)$$

unde am notat prin v_0 viteza la $t = 0$. Să căutăm o soluție de forma:

$$x = B + Ce^{-bt/m}.$$

Am introdus în soluție exponențiala, deoarece ne amintim că prin derivarea lui e^{-t} obținem din nou e^{-t}. Introducînd această expresie în ecuația (7.66), obținem:

$$-b/mCe^{-bt/m} = v_0e^{-bt/m}.$$

Astfel, găsim constanta $C = -mv_0/b$. Ce se poate spune despre constanta B? Bănuim că ea va fi x_0, poziția inițială. Totuși, cînd punem în soluție $t = 0$, găsim că:

$$x = B + C = B - \frac{mv_0}{b}.$$

Deci, dacă la $t = 0$, $x = x_0$, rezultă $B = x_0 + mv_0/b$. Soluția noastră finală este așadar:

$$x = x_0 + \frac{v_0m}{b}(1 - e^{-bt/m}).$$

Ca un exemplu, să presupunem că o forță de $-5\cdot10^{-3}\cdot v$ N acționează asupra unei particule de masă 0,025 kg, care pleacă din punctul $x = -0,1$ m cu viteza 0,4 m/s în sensul pozitiv al axei x. Aplicînd relațiile de mai sus, găsim:

$$x = -0,1 + 0,4\cdot\frac{0,025}{5\cdot10^{-3}}\left(1 - e^{-\frac{5\cdot10^{-3}}{0,025}t}\right) =$$

$$= -0,1 + 2(1 - e^{-\frac{t}{5}}),$$

$$t = 0,\ x = -0,1 \text{ m}$$

$$\frac{dx}{dt} = -0,2\left(-\frac{1}{5}\right)e^{-t/5} = 0,4 \text{ m/s},$$

la $t = 0$.

Observați că atunci cînd $t \to \infty$, $x \to 1,9$ și $v \to 0$.

Viteza limită. Vom considera acum un tip mai complicat de ecuație, ca de exemplu:

$$m\frac{dv}{dt} = F - bv, \quad (7.67)$$

unde F este o constantă.

Se observă că viteza în regim staționar este:

$$\frac{dv}{dt} = 0,\ F = bv,\ v = \frac{F}{b}.$$

Această viteză se numește adesea viteză limită. Ca soluție încercăm forma:

$$v = \frac{F}{b}(1 - e^{-bt/m})$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} e^{-bt/m} = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{b}{F} v\right) =$$

$$= \frac{F}{m} - \frac{b}{m} v,$$

care verifică ecuația (7.67). Din această soluție vedem că la $t = 0$, $v = 0$. Rezultă că, dacă condiția inițială este alta, trebuie să ne aranjăm astfel încît să o satisfacem. Observăm că pentru $t \to \infty$ avem $v \to F/b$.

Să presupunem că la $t = 0$, $v = v_0$. Încercăm expresia:

$$v = \frac{F}{b}(1 - e^{-bt/m}) + v_0 e^{-bt/m}. \quad (7.68)$$

Prin derivare putem arăta că această soluție verifică ecuația inițială.

Este interesant că soluția generală (7.68) reprezintă soluția din relația (7.67) pe care am încercat-o inițial, la care am adăugat soluția dată de ecuația (7.66), deoarece $m\, dv/dt = -bv$. Altfel spus, să considerăm soluția ecuației $m\, dv/dt + bv = F$. Dacă putem găsi o soluție a acestei ecuații, putem adăuga la ea orice soluție a ecuației $m\, dv/dt + bv = 0$ și vom avea tot o soluție.

Forța elastică. Vom rezolva acum ecuația de mișcare pentru o forță de *tip elastic*, care este îndreptată în permanență către origine (sau către un punct care este ales pentru comoditate ca origine) și care crește direct proporțional cu distanța pînă la punct sau origine. În limbaj matematic, forța este dată de $F = -kx$; dacă x este pozitiv, forța F este negativă; dacă x este negativ, forța este pozitivă. Mărimea k este o constantă pozitivă, numită adesea *constanta elastică*. Ecuația noastră este:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{m}.$$

Ca o soluție de probă să luăm $x = \cos \omega t$. Prin derivare obținem:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega \sin \omega t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cos \omega t =$$
$$= -\omega^2 x.$$

Din compararea acestei relații cu ecuația originală, constatăm că dacă $\omega^2 = \frac{k}{m}$, soluția aleasă de noi este valabilă. Este, de asemenea, evident că $x = \sin \omega t$ este o soluție. Unde sînt însă constantele necesare pentru condițiile inițiale? Să încercăm expresia:

$$x = A' \sin \omega t + B' \cos \omega t.$$

Și aceasta este o soluție și observăm că la $t = 0$, $x = B'$. Deci B' coincide cu x_0 pe care l-am utilizat înainte. Dacă derivăm și punem $t = 0$, obținem $dx/dt = \omega A'$. Acesta este tocmai v_0 definit mai sus. Observați că A' nu coincide cu viteza inițială. Un alt mod de a scrie această soluție este:

$$x = A \sin(\omega t + \Phi).$$

La $t = 0$, avem $x = A \sin \Phi$ și $dx/dt = A\omega \cos \Phi$. Astfel, cele două constante A și Φ au înlocuit cele două constante A' și B'. Al doilea tip de soluție este adesea mai convenabil de folosit în aplicații, deși veți găsi că este util să rezolvați unele probleme cu primul tip. Cîteva exemple pot fi instructive. Presupunem că avem $k/m = 25$ astfel că $\omega = 5\ s^{-1}$.

1. La $t = 0$, particula pleacă din origine cu o viteză de 0,1 m/s în sensul lui x negativ. Presupunînd că $x = A \sin(5t + \Phi)$, rezultă că la $t = 0$, $x = A \sin \Phi$ și această valoare trebuie să se anuleze. Deci Φ este 0 sau π; $dx/dt = 5A \cos \Phi = -0{,}1$. Vedem de aici că Φ trebuie să fie egal cu π iar A este egal cu 0,02. Deci soluția noastră este:

$$x = 0{,}02 \sin(5t + \pi) = -0{,}02 \sin 5t.$$

2. La $t = 0$, particula se află în punctul $x = +0{,}05$, și este în repaus. Deci $+0{,}05 = A \sin \Phi$ și $dx/dt = \omega A \cos \Phi = 0$. Rezultă $A = 0{,}05$ și $\Phi = \pi/2$, și soluția este

$$x = 0{,}05 \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}05 \cos 5t.$$

3. La $t = 0$, $x = -0{,}05$ iar viteza este $-0{,}25$. De astă dată $-0{,}05 = A \cdot \sin \Phi$ și $-0{,}25 = A\omega \cos \Phi = 0{,}05\, A \cos \Phi$. Prin împărțire, obținem $\text{tg}\, \Phi = +1$. Deci $\Phi = \pi/4$ sau $5\pi/4$. Dar $\cos 5\pi/4 =$

$= -1/\sqrt{2}$, în timp ce $\cos \pi/4 = +1/\sqrt{2}$. Rezultă deci că $\Phi = 5\pi/4$. Înlocuind în prima ecuație, obținem $A = \sqrt{2} \cdot 0{,}05$. Alternativ, am putea alege $A = -0{,}05 \cdot \sqrt{2}$ și $\Phi = \pi/4$:

$$x = 0{,}05 \cdot \sqrt{2} \sin\left(5t + \frac{5\pi}{4}\right) \text{sau}$$

$$-0{,}05 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(5t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Forță elastică și forță de rezistență. O ecuație mai dificilă apare în cazul unui oscilator armonic amortizat. Forța este în acest caz rezistența $-bv$ plus forța $-kx$:

$$\frac{m\,\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -bv - kx \text{ unde } v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{m\,\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0.$$

Încercăm o soluție de forma

$$x = Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \Phi):$$

$$\frac{b\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\beta bAe^{-\beta t}\sin(\omega t + \Phi) +$$

$$+ b\omega Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \Phi)$$

$$\frac{m\,\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -2m\omega\beta Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \Phi) +$$

$$+ \beta^2 mAe^{-\beta t}\sin(\omega t + \Phi) -$$

$$- m\omega^2 Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \Phi).$$

Atunci:

$$\frac{m\,\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = Ae^{-\beta t}\sin(\omega t +$$

$$+ \Phi)[k - \beta b - m\omega^2 + \beta^2 m] +$$

$$+ Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \Phi)[b\omega - 2m\omega\beta] = 0.$$

Singura posibilitate ca această ecuație să poată fi satisfăcută pentru toate valorile lui t este ca fiecare coeficient din paranteze să fie egal cu zero:

$$b\omega - 2m\omega\beta = 0$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$$k - \beta b - m\omega^2 + \beta^2 m = k - \frac{b^2}{2m} - m\omega^2 + \frac{b^2}{4m^2}m = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = \frac{k}{m} - \beta^2.$$

Observați că A și Φ sînt constante arbitrare și nu sînt precizate din ecuația diferențială. În acest mod pot fi determinate însă frecvența ω și constanta de amortizare β. Dacă $\omega_0 = k/m$ $\omega < \omega_0$; dar dacă β este mic, adică viteza de micșorare a amplitudinii $Ae^{-\beta t}$ este mică, atunci $\omega \approx \omega_0$. Forma acestei soluții este indicată in figura 7.19, în care $\omega/\beta = 5$. Trebuie să remarcăm că dacă b este mare ω poate fi zero sau $k = b^2/4m$. Care este soluția în acest caz?

Se poate vedea prin verificare directă că $Ae^{-bt/2m}\sin\Phi = A'e^{-bt/2m}$ este o soluție. Dar $Bte^{-bt/2m}$ este de asemenea o soluție. Deci soluția este:

$$x = A'e^{-bt/2m} + Bte^{-bt/2m} \qquad (7.69)$$

unde A' și B sînt constante arbitrare necesare pentru a satisface condițiile inițiale. Această soluție este numită adesea *soluția amortizată critică*. În acest caz, x descrește către zero mai rapid decît in cazurile:

$$k < \frac{b^2}{4m} \text{ sau } k > \frac{b^2}{4m}.$$

Dacă $k < b^2/4m$, soluția se numește *supra-amortizată* și are forma:

$$x = e^{-bt/2m}\left[A\exp\left(\sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\,t\right) + \right.$$

$$\left. + B\exp - \left(\sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\,t\right)\right] \qquad (7.70)$$

unde A și B sînt constante necesare pentru satisfacerea condițiilor inițiale.

Numere complexe și oscilații armonice forțate. Studenții care sînt familiari cu numerele complexe își pot reaminti teorema lui De Moivre, care afirmă că

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

unde $i = \sqrt{-1}$. O expresie de tipul $e^{i\alpha}$ se numește o *mărime complexă*; $\cos\alpha$ se numește *partea reală* iar $\sin\alpha$ *partea imaginară*. Numerele complexe pot fi vizualizate reprezentînd partea reală pe abscisă și partea imaginară pe ordonată. Figura 7.20 ilustrează această reprezentare. Lungimea segmentului OA se numește *modulul cantității*

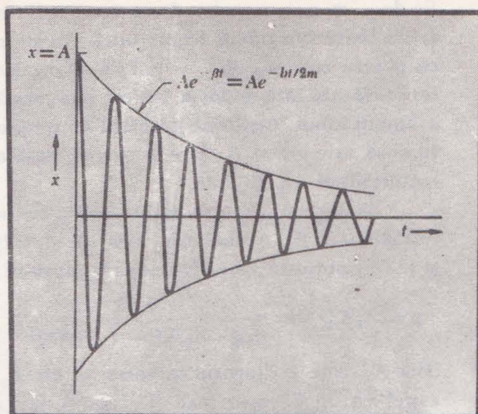


FIG. 7.19. Oscilatorul armonic amortizat.

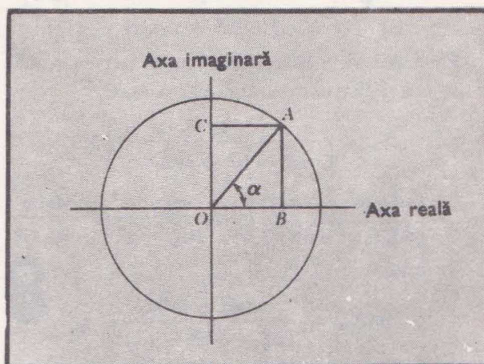


FIG. 7.20. Un număr complex poate fi reprezentat figurînd partea reală OB de-a lungul unei axe și partea imaginară OC de-a lungul unei axe perpendiculare. În acest caz, OA reprezintă $e^{i\alpha}$, $OB = \cos\alpha$, $OC = \sin\alpha$. OA este modulul numărului complex.

sau a numărului complex. Pătratul său se obține inmulțind numărul prin conjugatul său complex; conjugatul complex este obținut schimbind semnul lui i peste tot unde acesta apare. Mărimea este evident o cantitate reală și în acest caz este:

$$e^{i\alpha}\cdot e^{-i\alpha}=e^{0}=1.$$

Observăm că OA are lungimea egală cu unitatea deoarece $\cos\alpha = OB/OA = OB$.

Adunarea, scăderea și inmulțirea numerelor complexe urmează regulile obișnuite. De exemplu:

$$(a+ib)+(c+id)=a+c+i(b+d)$$

$$(a+ib)-(c+id)=a-c+i(b-d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id)=ac-bd+i(ad+bc),$$

deoarece $i^2 = -1$.

Pentru împărțire vrem de obicei să scriem raportul astfel incit numitorul să fie un număr real și astfel părțile reală și imaginară ale raportului vor fi ușor de recunoscut:

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)\cdot(c-id)}{(c+id)\cdot(c-id)}=$$

$$=\frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

În sfîrșit să remarcăm că orice număr complex poate fi scris în forma $\rho e^{i\Phi}$. Pentru a găsi ρ și Φ in funcție de partea reală și cea imaginară, scriem:

$$\rho e^{i\Phi}=\rho\cos\Phi+i\rho\sin\Phi=a+ib$$

$$\rho e^{i\Phi}\cdot\rho e^{-i\Phi}=\rho^2=(a+ib)\cdot(a-ib)=$$

$$=a^2+b^2 \qquad (7.71)$$

$$\operatorname{tg}\Phi=b/a, \qquad \Phi=\operatorname{arctg} b/a.$$

Vom da acum, folosind numerele complexe, o soluție foarte concisă a problemei oscilațiilor armonice forțate.

Din relațiile (7.48) și (7.49) ecuația de mișcare se scrie, punind pentru comoditate $\cos\omega t$ în loc de $\sin\omega t$:

$$\ddot{x}+\frac{1}{\tau}\dot{x}+\omega_0^2x=\alpha_0\cos\omega t. \qquad (7.72)$$

Înlocuim acum termenul care reprezintă forța prin:

$$\alpha_0e^{i\omega t}\equiv\alpha_0(\cos\omega t+i\sin\omega t).$$

La sfîrșitul calculelor vom considera răspunsul fizic ca fiind partea reală a lui x, dacă forța externă este $\alpha_0\cos\omega t$ (cu α_0 real).

Căutăm o soluție a ecuației (7.72):

$$x=X_0e^{i\omega t} \qquad (7.73)$$

unde X_0 poate fi un număr complex. Prin inlocuirea expresiei (7.73) in ecuația (7.72) avem:

$$\left(-\omega^2-\frac{i\omega}{\tau}+\omega_0^2\right)X_0e^{i\omega t}=\alpha_0e^{i\omega t}$$

de unde:

$$X_0 = \frac{\alpha_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i(\omega/\tau)} . \quad (7.74)$$

Este util să considerăm separat partea reală și cea imaginară a lui X_0. Avem:

$$X_0 = \left[\frac{\alpha_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i(\omega/\tau)}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)}\right] = \alpha_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$$

de unde:

$$\mathrm{Re}(X_0) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\alpha_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2};$$

$$\mathrm{Im}(X_0) = \frac{-(\omega/\tau)\alpha_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}.$$

În cazul $|\omega_0^2 - \omega^2| \gg \omega/\tau$, avem:

$$\mathrm{Re}(X_0) \approx \frac{\alpha_0}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad \mathrm{Im}(X_0) \approx 0.$$

Această condiție descrie situația *departe de rezonanță* și, in acest caz, partea reală a lui X_0 este mult mai importantă decit partea imaginară.

În limita $|\omega_0^2 - \omega^2| \ll \omega/\tau$ spunem că sintem *aproape de rezonanță*, iar pentru $\omega = \omega_0$ sintem *la rezonanță* sau in centrul rezonanței. Pentru $\omega_0 = \omega$,

$$\mathrm{Re}(X_0) = 0$$

$$\mathrm{Im}\,(X_0) = \alpha_0 \frac{\tau}{\omega}.$$

Cu cit τ este mai mare, cu atit amortizarea este mai slabă iar partea imaginară a răspunsului la rezonanță este mai mare.

Dacă ne amintim că departe de rezonanță defazajul Φ este aproape fie de 0 fie de $-\pi$, putem vedea de ce amplitudinea are o parte imaginară foarte mică; in timp ce pentru $\omega = \omega_0$, $\Phi = -\pi/2$ și elongația este defazată față de forță, partea imaginară a amplitudinii, care este corelată cu amplitudinea vitezei, va fi mare și partea reală a amplitudinii va fi nulă.

Să scriem X_0 sub forma $\rho e^{i\Phi}$, ca in relațiile (7.71). Atunci din relațiile (7.71) și (7.74), obținem amplitudinea răspunsului:

$$\rho = (X_0 X_0^*)^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{1/2}}.$$

Aici X_0^* este conjugatul complex al lui X_0, astfel că $X_0 X_0^*$ este real. Defazajul lui x față de F este:

$$\mathrm{tg}\Phi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Absorbția medie de putere este dată de

$$\langle P \rangle = \langle F\dot{x} \rangle = \langle \mathrm{Re}(F)\mathrm{Re}(\dot{x}) \rangle =$$

$$= \langle [M\alpha_0 \cos \omega t][-\rho\omega \sin(\omega t + \Phi)] \rangle . \quad (7.75)$$

Dacă partea reală a lui F reprezintă forța fizică reală, răspunsul fizic se obține luind partea reală a lui x. Există și alte forme valabile pentru media temporală – ceea ce se dovedește a fi important este să luăm partea lui x care este in fază cu F. Folosind echivalentul ecuației (7.61) și relația $\rho \sin \Phi = \mathrm{Im}\,(X_0)$, avem din egalitatea (7.75):

$$\langle P \rangle = -M\alpha_0 \rho\omega \langle \cos^2 \omega t \rangle \sin \Phi =$$

$$= -\frac{1}{2} M\alpha_0 \omega \mathrm{Im}(X_0) =$$

$$= \frac{1}{2} M\alpha_0^2 \frac{\omega^2/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}.$$

Acest rezultat este identic cu rezultatul anterior din ecuația (7.62).

LECTURI SUPLIMENTARE

Fizica PSSC (PSSC, Physics), capitolele 20 (§ 8) și 24 (§ 1), D. C. Heath and Company, Boston, 1965.

Y. Rocard, *Dinamica generală a vibrațiilor* („General Dynamics of Vibrations"), Frederik Ungar Publishing Co, New York, 1960. O carte simplă și clară, utilă pentru un domeniu larg de aplicații.

B. L. Walsh, *Amplificare parametrică* („Parametric Amplification"), *International Science and Technology*, nr. 17, p. 75, Mai, 1963. O analiză elementară a amplificatorilor parametrici și a proprietății lor de zgomot scăzut.

Un exemplu de tratare a oscilațiilor armonice libere, forțate și amortizate, intr-un text familiar de nivel intermediar, este oferit de John L. Synge și Byron A. Griffith, *Principiile mecanicii* („Principles of Mechanics"), § 6.3, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1959.

8

Introducere în dinamica corpurilor rigide

Cuprins

Dinamica corpurilor rigide este un subiect fascinant și complicat, probabil punctul suprem și cel mai dificil al mecanicii clasice. Prototipul problemelor în acest domeniu îl constituie problema giroscopului sau a titirezului, a cărui comportare subtilă și incitantă a solicitat întotdeauna gîndirea. Expunerea completă a descrierii mișcării corpului rigid ajunge la unele aspecte surprinzătoare de simplitate și frumusețe, dar acestea pot să nu apară evidente la nivelul introductiv al tratării, cerut aici. O mare parte a teoriei giroscopului a fost acoperită într-un tratat în patru volume, *Teoria giroscopului* (Theorie des Kreisels), de F. Klein și A. Sommerfeld.

Prin termenul *corp rigid* înțelegem un ansamblu de particule cu distanțe fixe între particule; vom exclude considerarea vibrațiilor sau a deformărilor care însoțesc mișcarea. Mișcarea care ne va preocupa, în principal, va consta din rotația în jurul unei axe care poate să fie fixă sau variabilă în timp. Analiza pe care o vom prezenta are aplicații mergînd de la spinul electronului și rotația atomilor și a moleculelor pînă la dispozitive în rotație, giroscoape planete și ghidajul inerțial.

O anumită împărțire a domeniului este inerentă, anume, după cum axa de rotație își menține direcția fixă în spațiul inerțial sau își schimbă direcția odată cu scurgerea timpului. Tratarea mișcării cu axă fixă este evident mai simplă decît cazul mai general, și multe sisteme importante sînt de acest tip. În consecință, o tratare redusă a dinamicii corpului rigid la acest nivel este uneori limitată la cazul axei cu direcție fixă. Vom începe, totuși, studiul nostru cu cazul general; vor rezulta de aici diverse cazuri particulare importante, în care vor fi puse în evidență în mod clar condițiile sau proprietățile specifice ale corpului și ale mișcării sale.

ECUAȚIA DE MIȘCARE

Am dedus mai înainte (în cap. 6), din legea a doua a lui Newton, relația:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{M} \tag{8.1}$$

pentru mișcarea unui sistem de particule într-un sistem de referință inerțial, unde **J** este vectorul moment cinetic în raport cu un punct ales ca origine, iar **M** este momentul tuturor forțelor externe efective asupra particulelor sistemului, evaluat în raport cu originea. După cum am văzut în capitolul 6, forțele interne ale sistemului nu produc nici un moment rezultant. Ecuația (8.1) conține în esență tot ceea ce trebuie să știm despre mișcare. Ea este

ecuația de mișcare. Problema este să o aplicăm corect la obiectele și situațiile de interes. În acest scop trebuie să știm să exprimăm momentul cinetic **J** pentru un corp rigid. Va trebui de asemenea să știm să exprimăm energia cinetică asociată cu mișcarea rigidului, ceea ce vom face în cele ce urmează.

MOMENTUL CINETIC ȘI ENERGIA CINETICĂ

Considerăm un corp rigid care se mișcă astfel încît un punct al său rămîne în mod constant într-o poziție fixă în spațiu. Atunci, la orice moment, mișcarea trebuie să fie o rotație în jurul unei axe care trece prin acest punct. Alegem punctul fix, O în figura 8.1, ca origine a sistemului nostru de referință și descriem mișcarea printr-un vector viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$, de-a lungul axei instantanee de rotație. În conformitate cu regula generală, vectorul $\boldsymbol{\omega}$ va avea sensul în care ar înainta de-a lungul axei unui șurub drept, rotit împreună cu corpul, iar lungimea ω va fi numeric egală cu mărimea sa în rad/s, exprimată într-o anumită unitate aleasă pentru lungime.

Vectorul viteză instantanee $\mathbf{v}$ pentru un punct P al corpului avînd vectorul de poziție $\mathbf{r}$, va fi:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \tag{8.2}$$

după cum putem vedea ușor din figura 8.1 și explicația care o însoțește. Dacă P este poziția unei particule de masă m, una dintre particulele constituente ale corpului, ea va contribui cu momentul cinetic $\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, la momentul cinetic total al corpului.

Putem exprima acum momentul cinetic total ca suma vectorială a contribuțiilor tuturor particulelor sau elementelor de masă din care este compus corpul:

$$\mathbf{J} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \tag{8.3}$$

unde $\mathbf{r}_i$ este vectorul de poziție al elementului de masă m_i, și sumăm peste toate elementele existente.

Energia cinetică totală a corpului în rotație la momentul considerat este obținută sumînd contribuțiile $\frac{1}{2} mv^2$ ale tuturor elementelor de masă.

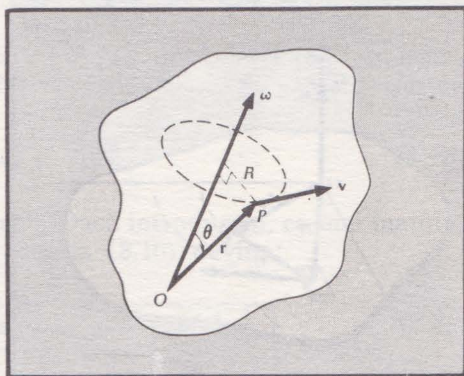


FIG. 8.1. La momentul considerat, rotația corpului face ca P să descrie un cerc de rază $R = r \sin\theta$, într-un plan perpendicular pe $\boldsymbol{\omega}$. Mărimea lui $\mathbf{v}$ este $v = \omega R = \omega r \sin\theta$ și direcția este normală la planul definit de $\boldsymbol{\omega}$ și $\mathbf{r}$. Astfel, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Ne amintim că $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, astfel încît:

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \sum m_i |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i|^2. \tag{8.4}$$

Formulările generale date mai sus pentru ecuația de mișcare, momentul cinetic și energia cinetică vor fi aplicate acum la cîteva cazuri particulare importante de rotații ale corpului rigid.

MOMENTE DE INERȚIE

Considerăm placa subțire, ilustrată în figura 8.2, sau o distribuție plană de masă, situată în planul xy și rotindu-se în jurul axei z cu viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$. Vectorul $\boldsymbol{\omega}$ este luat constant în direcția axei z. Elementul de masă m_i se mișcă cu viteza $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, și în acest caz viteza sa este pur și simplu $v_i = \omega r_i$, deoarece $\boldsymbol{\omega}$ și $\mathbf{r}_i$ sînt perpendiculari. Energia cinetică a plăcii este atunci:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \tag{8.5}$$

unde am definit mărimea I_z, numită *momentul de inerție* al plăcii în raport cu axa z, prin relația:

$$\boxed{I_z = \sum m_i r_i^2.} \tag{8.6}$$

Teorema axelor paralele. O clarificare remarcabilă se obține introducînd în imagine centrul de masă, ca în figura 8.2. Înlocuim:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i'$$

și obținem pentru I_z:

$$I_z = \sum m_i r_i^2$$
$$= \sum m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i$$

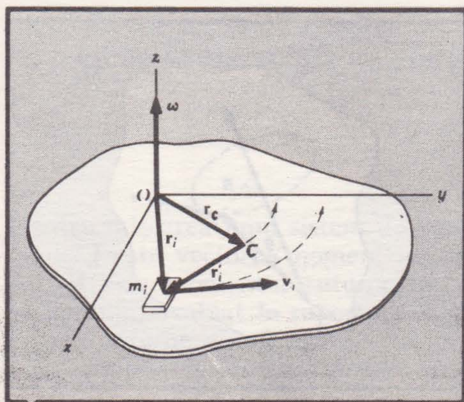


FIG. 8.2. Placa se rotește în planul său propriu (planul xy), în jurul lui O. Fiecare punct descrie cîte un cerc în jurul lui O, cu viteza $v_i = \omega r_i$. C este centrul de masă.

$$= \sum m_i(\mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i') \cdot (\mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i')$$

$$= \sum m_i(r_c^2 + 2\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r}_i' + r_i'^2).$$

Dar, deoarece $\sum m_i = M$ este masa totală a plăcii, avem

$$I_z = Mr_c^2 + 2\mathbf{r}_c \cdot \sum m_i\mathbf{r}_i' + \sum m_i r_i'^2.$$

Observăm acum că termenul din mijloc va fi egal cu zero, deoarece $\mathbf{r}_i'$ este vectorul de poziție al lui m_i în raport cu centrul de masă și suma $\Sigma m_i\mathbf{r}_i' = 0$. În plus, ultimul termen este pur și simplu momentul de inerție în raport cu o axă normală care trece prin centrul de masă situat în C.
Obținem așadar:

$$I_z = I_{cz} + Mr_c^2. \tag{8.7}$$

Acest rezultat, egalitatea (8.7), este *teorema axelor paralele*, dedusă aici pentru sistemul particular al unei distribuții plane de masă, cu o axă normală. Ea se poate demonstra ușor ca o teoremă generală pentru orice distribuție. Exprimată în cuvinte, teorema spune că:

Momentul de inerție în raport cu orice axă este egal cu momentul de inerție în raport cu o axă paralelă ce trece prin centrul de masă, plus masa corpului înmulțită cu pătratul distanței dintre cele două axe. Astfel:

$$\boxed{I = I_c + Ml^2} \tag{8.8}$$

unde l este distanța dintre axe.

După cum vom vedea, acesta este un rezultat extrem de util.

Pe baza relației (8.7), expresia (8.5) devine:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I_{cz}\omega^2 + \frac{1}{2} Mr_c^2\omega^2} \tag{8.9}$$

expresie care poate fi imediat interpretată, spunînd că energia cinetică totală a plăcii în rotație este compusă din energia datorită rotației în jurul centrului său de masă (primul termen), plus energia legată de mișcarea de translație a centrului de masă în raport cu axa de rotație (al doilea termen). Acesta este, de asemenea, un rezultat general, deși l-am demonstrat aici numai pentru cazul unei plăci care se rotește în planul său.

Momentul cinetic al plăcii în rotație se obține din relația (8.3), aplicată în acest caz particular în care $\boldsymbol{\omega}$ și $\mathbf{r}_i$ sînt perpendiculari. Se găsește ușor că rezultatul este:

$$\mathbf{J} = \sum m_i r_i^2 \omega\hat{\mathbf{z}} = I_z\omega\hat{\mathbf{z}}, \tag{8.10}$$

unde intervine din nou momentul de inerție. Dacă introducem, ca mai înainte, centrul de masă, scriind $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i'$, ecuația (8.10) devine:

$$\boxed{\mathbf{J} = \sum m_i r_i'^2 \omega\hat{\mathbf{z}} + Mr_c^2\omega\hat{\mathbf{z}} = I_{cz}\omega\hat{\mathbf{z}} + Mr_c^2\omega\hat{\mathbf{z}}.} \tag{8.11}$$

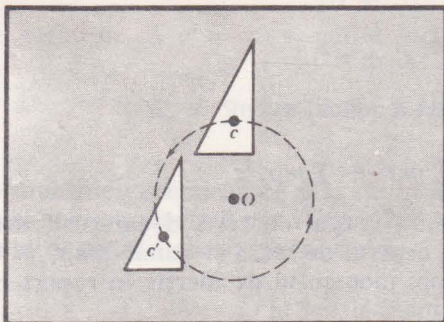


FIG. 8.3. (*a*). Centrul de masă al unei plăci triunghiulare este translatat pe un cerc în jurul lui O, dar nu există rotație. Este prezent doar al doilea termen din relațiile (8.9) și (8.11).

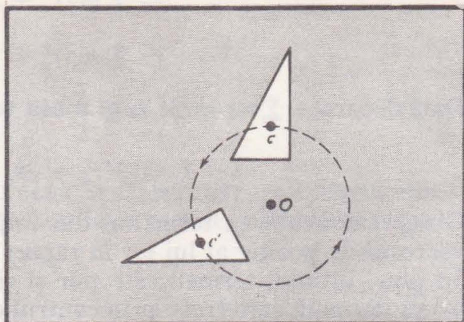


FIG. 8.3. (*b*). Contribuie ambii termeni din ecuațiile (8.9) și (8.11).

Avem din nou o teoremă, demonstrată în acest caz particular, care poate fi însă demonstrată în general:

> Momentul cinetic în raport cu orice punct este egal cu momentul cinetic în raport cu centrul de masă plus momentul cinetic datorat translației centrului de masă în raport cu punctul.

Figura 8.3 ilustrează diferența dintre cei doi termeni prezenți în aceste teoreme.

Aceste teoreme, pe care le-am stabilit pentru o placă sau o distribuție plană de masă, se vor aplica de asemenea unui sistem pe care îl construim suprapunînd plăci subțiri identice, pentru a forma un corp rigid cilindric sau prismatic, constrîns să se rotească în jurul unei axe fixe perpendiculară pe planul plăcilor cu condiția să interpretăm r_i ca distanță de la axa de rotație. Vom da cîteva exemple care ilustrează aceste probleme.

Teorema axelor perpendiculare. Înainte de a trece la tratarea exemplelor, vom demonstra o altă teoremă utilă despre momentele de inerție ale obiectelor subțiri de tip placă. Ne putem referi la figura 8.2 care ilustrează o placă în rotație și elementele sale de masă m_i. Contribuția lui m_i la momentul de inerție I_z în raport cu axa z, este $m_i r_i^2$, adică masa particulei înmulțită cu pătratul distanței pînă la axa de rotație. Dacă am considera rotații în jurul axei x, elementul de masă m_i ar contribui cu $m_i y_i^2$ la momentul de inerție în raport cu axa x; similar, el ar da $m_i x_i^2$ în raport cu axa y. Așadar:

$$I_x = \sum m_i y_i^2$$

$$I_y = \sum m_i x_i^2.$$

Prin adunare obținem:

$$I_x + I_y = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i r_i^2 = I_z.$$

Acest rezultat demonstrează *teorema axelor perpendiculare*, valabilă pentru corpuri rigide plane, subțiri, teoremă care afirmă că:

> Momentul de inerție al unei foi plane rigide în raport cu o axă normală la planul ei este egal cu suma momentelor de inerție în raport cu două axe perpendiculare arbitrare care se află în plan și intersectează axa normală.

Cîteva cazuri particulare

Inel subțire sau jantă. Un inel de masă M, rază R și de grosime radială neglijabilă va avea în mod evident toate elementele de masă situate la aceeași distanță R față de o axă normală trecînd prin centrul său. Momentul de inerție în raport cu această axă este atunci $I = MR^2$. Evident, același rezultat se aplică în cazul unui cilindru circular cu pereți subțiri care se rotește în jurul axei sale geometrice. În raport cu o axă paralelă situată la peretele cilindrului, momentul de inerție este $I = 2MR^2$, după cum se poate deduce imediat din teorema axelor paralele.

Teorema axelor perpendiculare aplicată în cazul unui inel plan, subțire, ne spune că momentul de inerție în raport cu o axă aflată în planul inelului și trecînd prin centrul său va fi $\frac{1}{2}MR^2$.

Bară subțire uniformă. Reprezentăm în figura 8.4 o bară de lungime L și masă M, a cărei lățime și grosime sînt foarte mici în comparație cu L, astfel încît bara poate fi tratată ca o masă liniară de densitate uniformă. Considerăm o axă de rotație perpendiculară pe bară la un capăt al său. Un element de lungime Δx va avea masa $\Delta M = (\Delta x/L)M$, și va contribui cu $\Delta I = (\Delta x/L)Mx^2$ la momentul de inerție, dacă el se află la distanța x față de axă. Considerînd acum Δx ca fiind un element infinitezimal $\mathrm{d}x$, putem aduna contribuțiile tuturor elementelor, prin integrare. Obținem astfel expresia:

$$I = \frac{M}{L}\int_0^L x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,ML^2$$

pentru momentul de inerție al unei bare uniforme în raport cu o axă de rotație perpendiculară care trece printr-unul din capetele sale.

Aplicînd teorema axelor paralele obținem momentul de inerție în raport cu o axă perpendiculară pe bară, trecînd prin centrul său. Astfel:

$$I_c = I - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}\,ML^2. \tag{8.12}$$

FIG. 8.4. Bară subțire, cu axa la un capăt.

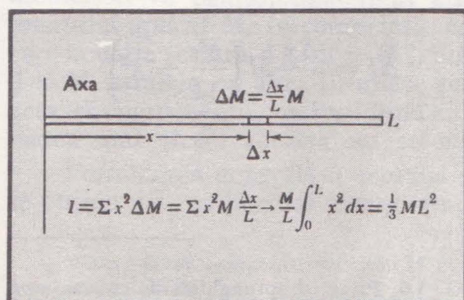
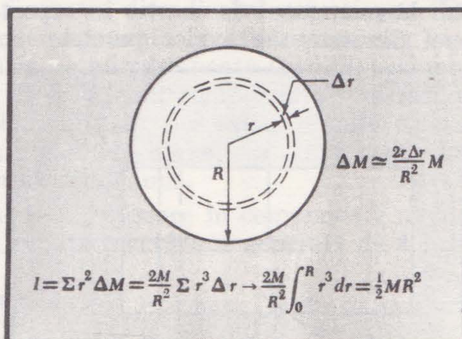


FIG. 8.5. Disc cu axa trecînd prin centru și fiind perpendiculară pe planul discului



Disc circular. După cum este ilustrat în figura 8.5, un element inelar de grosime Δr situat la distanța r față de centru va avea masa:

$$\Delta M = \frac{\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2}{\pi R^2} M \approx \frac{2r\,\Delta r}{R^2} M,$$

unde am neglijat în aproximația finală termenul mic proporțional cu $(\Delta r)^2$. Contribuția acestui element inelar la momentul de inerție în raport cu o axă normală care trece prin centrul discului, va fi:

$$\Delta I = r^2\,\Delta M \approx \frac{2M}{R^2} r^3\,\Delta r.$$

Prin evaluarea integralei care sumează toate contribuțiile elementelor inelare, obținem:

$$I = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2} MR^2. \tag{8.13}$$

Deoarece un cilindru plin de densitate uniformă poate fi privit ca o suprapunere de discuri, este evident că momentul de inerție al unui cilindru circular plin în raport cu axa sa este $I = \frac{1}{2} MR^2$.

Revenind la discul subțire, obținem prin teorema axelor perpendiculare că momentul de inerție în raport cu o axă diametrală din planul său este:

$$I = \frac{1}{4} MR^2. \tag{8.14}$$

Placă dreptunghiulară. Reprezentăm în figura 8.6 o placă de lungime a și lățime b și vrem să calculăm momentul de inerție în raport cu axa z normală la placă în centrul său de masă. Ne putem imagina că placa este compusă din fîșii înguste, dintre care una este ilustrată, avînd lățimea Δx și distanța x față de centru; pentru a obține momentul de inerție total în raport cu O, sumăm contribuțiile acestor fîșii, tratînd-o pe fiecare ca pe o bară subțire.

Fîșia ilustrată va avea o masă $(\Delta x/a)M$ și un moment de inerție egal cu $\frac{1}{12}(\Delta x/a)Mb^2$ în raport cu o axă normală prin centrul său propriu P, după cum am arătat mai sus în cazul 2, relația (8.12). Contribuția acestei fîșii la momentul de inerție în raport cu axa normală prin O este obținută apoi din teorema axelor paralele, ecuația (8.8), sub forma:

$$\Delta I = \frac{\Delta x}{a} M\left(\frac{b^2}{12} + x^2\right).$$

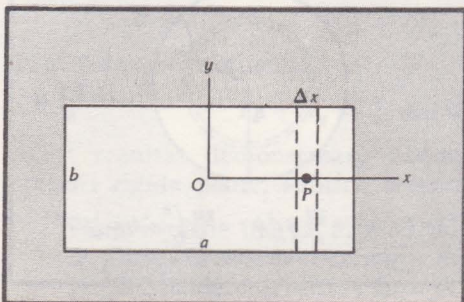


FIG. 8.6. Placă dreptunghiulară cu axa normală prin centru.

Sumăm acum toate aceste contribuţii prin integrare şi obţinem:

$$I = \frac{M}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\frac{b^2}{12} + x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{M}{12}(a^2 + b^2). \quad (8.15)$$

Deoarece acest calcul se referă la rotaţia în jurul axei z, putem numi acest rezultat I_z. Se vede uşor [folosind din nou ecuaţia (8.12)] că valorile lui I_x şi I_y sînt:

$$I_x = \frac{M}{12}b^2 \quad \text{şi} \quad I_y = \frac{M}{12}a^2.$$

Teorema axelor perpendiculare $I_z = I_x + I_y$ este evident satisfăcută.

Aceste cazuri ilustrează modul de a calcula momente de inerţie. Alte cazuri apar în probleme; printre acestea se află cazul unei sfere pline omogene, cu axa trecînd prin centru. Rezultatul este:

$$I = \frac{2}{5}MR^2. \quad (8.16)$$

Multe obiecte pot fi tratate prin superpoziţie, adică prin adunarea sau scăderea momentelor de inerţie ale unor forme simple. De exemplu, valoarea pentru un cilindru cu pereţi groşi, gol în interior se obţine luînd diferenţa între momentele de inerţie a doi cilindri plini de raze corespunzătoare.

ROTAŢII ÎN JURUL UNEI AXE FIXE: DEPENDENŢA DE TIMP A MIŞCĂRII

Putem aplica acum ecuaţia de mişcare (8.1) $\mathrm{d}\mathbf{J}/\mathrm{d}t = \mathbf{M}$ la probleme tratînd rotaţia corpurilor rigide în jurul unor axe fixe, cu scopul de a afla dependenţa de timp a rotaţiei care are loc ca răspuns la acţiunea unui moment aplicat.

Întrucît direcţia axei de rotaţie este constrînsă să rămînă fixă în spaţiu, şi de asemenea fixă în raport cu corpul, proprietăţile inerţiale ale corpului vor fi constante în raport cu axa. În deducerea mişcării vom avea nevoie să ne ocupăm de componenta momentului cinetic de-a lungul acestei axe. De asemenea, va trebui considerată numai componenta corespunzătoare a momentului aplicat **M**. În consecinţă, ecuaţia de mişcare poate fi tratată simplu ca o ecuaţie scalară $\mathrm{d}J_a/\mathrm{d}t = \mathfrak{M}_a$*, unde J_a şi $\mathfrak{M}_a$ sînt componentele vectorilor **J** şi **M** paralele cu axa. În multe probleme importante există oricum numai această componentă, vectorii fiind ei înşişi paraleli cu axa, dar, după cum vom vedea mai tîrziu aceasta nu se întîmplă totdeauna.

Formularea generală a ecuaţiei scalare de mişcare în componente axiale se obţine uşor proiectînd pur şi simplu ecuaţia vectorială generală de-a lun-

* Am notat componentele lui **M** cu $\mathfrak{M}$ pentru a le distinge de M cu care am notat masa. (N.T.)

gul direcției axei. Această direcție este desemnată prin vectorul unitate $\boldsymbol{\omega}/\omega$. Așadar, componenta paralelă cu axa a momentului cinetic este dată de:

$$J_a = \mathbf{J}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left[\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)\right] \cdot \boldsymbol{\omega}$$

unde am folosit relația (8.3).
Ultima expresie poate fi simplificată după cum urmează:

$$\frac{1}{\omega}\sum_i [m_i\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)]\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\omega}\sum_i m_i|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i|^2 = \frac{1}{\omega}\sum_i m_i(\omega r_i \sin \theta_i)^2,$$

unde la primul pas am folosit ecuația (2.56) și faptul că:

$$r_i^2\omega^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})^2 = r_i^2\omega^2 - r_i^2\omega^2 \cos^2 \theta_i.$$

Astfel:

$$J_a = \sum_i m_i R_i^2 \omega$$

unde, ca în figura 8.1, $R_i = r_i \sin \theta_i$ este distanța particulei i față de axa de rotație.

Ca și în cazul ecuației (8.5) introducem momentul de inerție al corpului în raport cu axa de rotație:

$$I_a = \sum_i m_i R_i^2.$$

Expresia pentru J_a s-a redus astfel la:

$$J_a = I_a\omega. \tag{8.17}$$

Asemănător, componenta paralelă cu axa a momentului forței se obține din:

$$\mathfrak{M}_a = \mathbf{M} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}.$$

Astfel, ecuația de mișcare în componente axiale devine:

$$\boxed{I_a \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \mathfrak{M}_a.} \tag{8.18}$$

În situațiile în care nu există ambiguități indicii sînt omiși.

Pe baza unor astfel de considerații, este evident că energia cinetică de rotație în jurul unei axe fixe este:

$$\boxed{E_{c_a} = \frac{1}{2} I_a \omega^2.} \tag{8.19}$$

Relațiile (8.17) și (8.19) corespund, respectiv ecuațiilor (8.10) și (8.5) pentru o placă rotindu-se în jurul axei fixe z, dar ele se aplică unui corp de orice formă care se rotește în jurul unei axe fixe arbitrare.

EXEMPLU

Accelerația unghiulară a unui cilindru plin supus acțiunii momentului unei forțe. Un exemplu simplu, tipic, este oferit de un cilindru plin, care se poate roti în jurul unei axe fixe care coincide cu axa sa geometrică sub acțiunea momentului unei forțe. Reprezentăm un astfel de caz în figura 8.7, unde axa de rotație este orizontală și momentul este produs de un corp atîrnat de un fir înfășurat în jurul cilindrului.

Momentul de inerție al cilindrului este, din relația (8.13), $I = \frac{1}{2} MR^2$. Momentul cinetic, la un moment în care viteza unghiulară este ω, va fi $J = I\omega = \frac{1}{2} MR^2\omega$. Momentul este datorat tensiunii din fir T și este deci $\mathfrak{M} = TR = (mg - ma)R$, unde a este accelerația în mișcarea de coborîre a masei m. Atunci, din ecuația (8.18), ecuația de mișcare se scrie sub forma:

$$\frac{MR^2}{2} \cdot \frac{d\omega}{dt} = m(g - a)R. \tag{8.20}$$

Geometria sistemului impune ca:

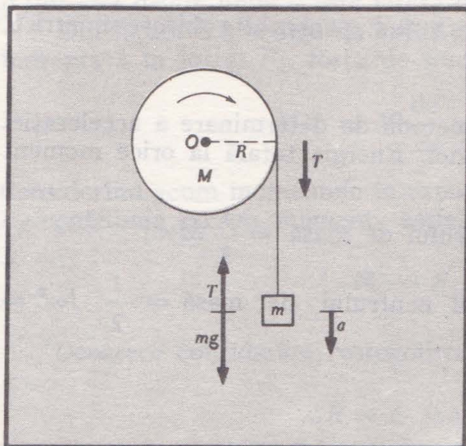
$$R\omega = v, \quad R\frac{d\omega}{dt} = a,$$

și aceste relații, împreună cu (8.20), dau pentru accelerația unghiulară a cilindrului:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{m}{M/2 + m} \cdot \frac{g}{R},$$

Rostogolire fără alunecare. Considerăm acum, ca în figura 8.8, rostogolirea în jos de-a lungul unui plan înclinat a unui obiect cu suprafața exterioară circulară și o distribuție de masă simetrică în jurul centrului său. (Obiectul ar putea fi un cilindru plin, un cilindru gol, o sferă etc.). Vom găsi accelerația de translație a mișcării pe planul înclinat în trei moduri diferite, ilustrînd în acest fel compatibilitatea diferitelor puncte de vedere în tratarea problemei.

FIG. 8.7. Cilindrul se rotește liber in jurul unei axe orizontale trecînd prin O. El este supus momentului TR produs de tensiunea din firul de care este legat corpul de masă m.



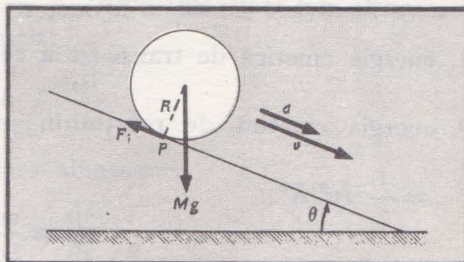


FIG. 8.8. Caracterul mișcării unui corp care se rostogolește este o rotație în jurul punctului *instantaneu* de contact P.

Rotație în jurul unui punct de contact instantaneu. În orice moment, mișcarea constă din rotația în jurul lui P, punctul de contact cu planul înclinat. *Direcția* axei de rotație este constantă, deși poziția sa coboară pe plan. Accelerația mișcării obiectului care se rostogolește se calculează observînd că, *instantaneu*, mișcarea este pur și simplu o rotație în jurul unui punct de pe suprafața obiectului. Vom cere așadar ca momentul forței în raport cu P să fie egal cu viteza de variație a momentului cinetic în raport cu P (vezi fig. 8.8).

Dacă I reprezintă momentul de inerție al obiectului în raport cu o axă trecînd prin centru, paralelă cu axa de rotație prin P, atunci putem evalua momentul de inerție necesar, în raport cu P, folosind teorema axelor paralele [ecuația (8.7)]:

$$I_p = I + MR^2.$$

Viteza unghiulară a rotației instantanee în jurul lui P este $\omega = v/r$, unde v este viteza instantanee de translație a centrului. Astfel momentul cinetic în raport cu P la orice moment este:

$$J_p = (I + MR^2)\frac{v}{R}\cdot \qquad (8.21)$$

Momentul în raport cu P este produs de forța gravitațională efectivă în centrul de masă. Astfel:

$$\mathfrak{M}_p = MgR \sin\theta. \qquad (8.22)$$

Cu relațiile (8.21) și (8.22) ecuația de mișcare $\mathfrak{M} = \mathrm{d}J/\mathrm{d}t$ se scrie sub forma:

$$MgR \sin\theta = (I + MR^2)\frac{a}{R},$$

unde am înlocuit $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ prin accelerația a.

Accelerația de translație pentru rostogolirea în jos pe planul înclinat este atunci:

$$a = \frac{1}{1 + I/MR^2} g \sin\theta. \qquad (8.23)$$

Pentru un cilindru plin $I = \frac{1}{2}MR^2$, astfel încît $a = \frac{2}{3} g \sin\theta$. Pentru o sferă plină $I = \frac{2}{5}MR^2$; astfel $a = \frac{5}{7} g \sin\theta$ ș.a.m.d., pentru alte obiecte simetrice. Alte cazuri sînt date în problema 6.

Conservarea energiei. Ca o a doua metodă de determinare a accelerației de translație, folosim conservarea energiei. Energia totală la orice moment va consta din trei contribuții:

1. energia cinetică de translație a centrului de masă $= \frac{1}{2}Mv^2$;

2. energia cinetică de rotație în jurul centrului de masă $= \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} Iv^2/R^2$;

3. energia potenţială datorită poziţiei centrului de masă $= Mgh$,

unde h este înălţimea în raport cu un nivel ales în care energiei potenţiale i s-a atribuit valoarea zero.

Cu o foarte bună aproximaţie, energia totală se conservă. Frecarea în punctul de contact produce rostogolirea în loc de alunecare, dar această forţă de frecare nu consumă lucru mecanic şi nu interzice conservarea energiei totale

$$E = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)v^2 + Mgh \cdot$$

Deoarece E este constantă, derivata sa temporală este egală cu zero:

$$\frac{dE}{dt} = \left(M + \frac{I}{R^2}\right)v\frac{dv}{dt} + Mg\frac{dh}{dt} = 0 \cdot$$

Dar $dh/dt = -v \sin\theta$ şi $dv/dt = a$, astfel încît această relaţie devine:

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right)va - Mg\,v \sin\theta = 0 \cdot$$

Împărţim prin factorul comun v şi rezolvăm ecuaţia în funcţie de a pentru a obţine:

$$a = \frac{1}{1 + I/MR^2}g \sin\theta$$

în concordanţă cu rezultatul (8.23).

Acceleraţia centrului de masă şi acceleraţia unghiulară în raport cu centrul de masă. În cea de a treia metodă considerăm acceleraţia centrului de masă şi acceleraţia unghiulară în raport cu centrul de masă:

$$Ma_c = \Sigma F$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = \Sigma \mathfrak{M}_c$$

unde a_c este acceleraţia centrului de masă iar ΣF include toate forţele externe. A doua ecuaţie presupune că direcţia axei de rotaţie este fixă astfel încît $dJ/dt = I\,d\omega/dt$, unde ω este viteza unghiulară în raport cu centrul de masă.

Din figura 8.8 vedem că există două forţe paralele cu planul: $Mg \sin\theta$ îndreptată în jos şi F_f, forţa de frecare, îndreptată în sus. Astfel:

$$Ma_c = M\frac{dv}{dt} = Mg \sin\theta - F_f \cdot$$

Considerînd acum momentele în raport cu centrul de masă, vedem că numai F_f contribuie cu un moment, astfel încît:

$$\mathfrak{M}_c = F_f R = I\frac{d\omega}{dt} \cdot$$

Deoarece considerăm rostogolirea fără alunecare:

$$\omega R = v \quad \text{sau} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{R}$$

şi astfel, din combinarea ultimelor trei relaţii rezultă că

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Mg\sin\theta - \frac{I}{R^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

şi

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_c = \frac{Mg\sin\theta}{M + I/R^2} = \frac{1}{1 + I/MR^2}\,g\sin\theta,$$

care coincide din nou cu ecuaţia (8.23) deoarece acceleraţia a_c este egală cu acceleraţia a găsită în acea relaţie.

Această analiză arată clar care este forţa care micşorează acceleraţia. Ea poate fi utilizată, de asemenea, împreună cu definiţia coeficientului de frecare pentru a determina care este, pentru un coeficient de frecare şi un I dat, unghiul necesar pentru a face corpul să alunece şi să se rostogolească în loc de a se rostogoli fără alunecare (vezi probl. 19 de la sfîrşitul capitolului).

Momentele forţelor în raport cu centrul de masă. În analiza generală de pînă acum nu am precizat în raport cu ce punct trebuie să calculăm momentul cinetic şi momentele forţelor. În exemplul anterior, referitor la obiectul care se rostogoleşte, am tratat într-adevăr problema din cîteva puncte de vedere alternative, folosind două centre de rotaţie diferite. Dar este necesară o anumită prudenţă în alegerea centrului de rotaţie în raport cu care se evaluează momentele forţelor şi se calculează mişcarea. Bineînţeles că trebuie să folosim un punct fix într-un sistem inerţial. În capitolul 6 am dedus, de asemenea, relaţiile:

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{c.m.}$$

$$\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ext} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{J}_{c.m.}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathbf{M}$$

unde momentele sînt luate în raport cu centrul de masă. Aceste două puncte, punctul fix şi centrul de masă, pot fi folosite *întotdeauna*. Altele, în special punctele accelerate, se pot folosi numai cu o deosebită grijă şi uneori trebuie introdusă o „forţă fictivă". Exemplul următor ca şi problema 18, ilustrează acest fapt.

EXEMPLU

Cilindru pe un plan accelerat, cu asperităţi. Figura 8.9 reprezintă un cilindru aflat în repaus pe un plan orizontal cu asperităţi care este tras de sub el cu acceleraţia a perpendiculară pe axa cilindrului. Care este mişcarea cilindrului, presupunînd că el nu alunecă?

Singura forţă orizontală aplicată asupra cilindrului este frecarea în punctul P. Să luăm aşadar momentele în raport cu P. Forţa gravitaţională şi reacţiunea suprafeţei trec prin punctul P, ca şi forţa de frecare, astfel încît momentul în raport cu P este egal cu zero. Avem aşadar:

$$\frac{\mathrm{d}J_P}{\mathrm{d}t} = 0,\ I_P\omega = \mathrm{const} = (MR^2 + I_c)\omega.$$

Recunoaştem acest rezultat ca fiind în mod evident fals; cu siguranţă mişcarea nu se face cu ω constant. Să luăm atunci punctul O, centrul de masă, pentru a evalua momentele forţelor şi momentul cinetic:

$$M \frac{dv_c}{dt} = F_f$$

$$F_f R = I_c \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

Deoarece are loc o rostogolire fără alunecare, acceleraţia punctului de contact este:

$$\frac{dv_c}{dt} + R \frac{d\omega}{dt} = a$$

astfel încît, folosind

$$M \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{2} M R \frac{d\omega}{dt}$$

obţinem:

$$\frac{3}{2} R \frac{d\omega}{dt} = a$$

şi în definitiv:

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{a}{3} \quad \text{şi} \quad F_f = M \frac{a}{3}.$$

Pendulul compus. Pendulul simplu, pe care l-am tratat în capitolul 7, constă dintr-un punct material suspendat de un fir fără masă, oscilînd într-un plan. Pendulul compus este un corp rigid, avînd o distribuţie de masă, liber să se rotească şi să oscileze în jurul unei axe orizontale fixe, plasată rigid în raport cu corpul şi care nu trece prin centrul său de masă. Un astfel de obiect este arătat în figura 8.10, la un moment al mişcării în care un plan de referinţă, definit de axa care trece prin P şi centrul de masă C, face un unghi θ cu verticala şi oscilează cu $d\theta/dt$ pozitiv.

FIG. 8.9. Cilindru care este accelerat cînd su prafeţei cu asperităţi pe care el se află i se imprimă o acceleraţie.

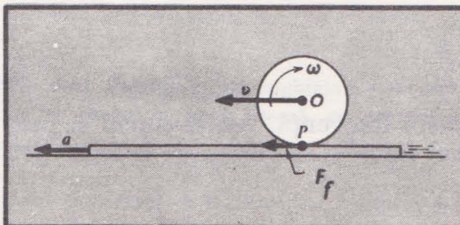
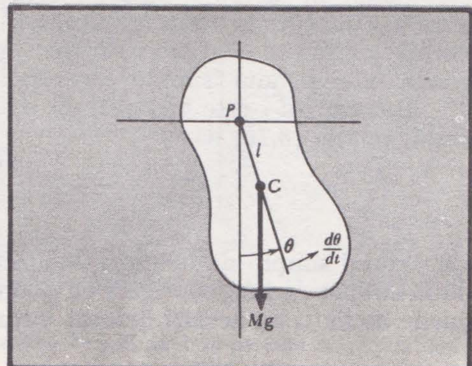


FIG. 8.10. Pendulul compus: C este centrul de masă; axa de rotaţie este orizontală şi trece prin P.



Deoarece mişcarea este constrînsă a fi o rotaţie oscilatorie în jurul axei fixe, putem studia dependenţa de timp a lui θ considerînd componenta momentului cinetic paralelă cu axa şi componentele corespunzătoare ale tuturor momentelor aplicate corpului.

Din teorema axelor paralele [relaţia (8.8)] este evident că momentul de inerţie raportat la axă de rotaţie este:

$$I = I_c + Ml^2,$$

unde l este distanţa PC. Momentul cinetic în raport cu axa la momentul ales este atunci:

$$J = I\omega = (I_c + Ml^2)\frac{d\theta}{dt}\cdot \tag{8.24}$$

Momentul în raport cu P este produs de către forţa de gravitaţie Mg, aplicată în centrul de masă (după cum s-a arătat în cap. 6, pagina 211). Acest moment în raport cu axa este:

$$\mathfrak{M} = -Mgl \sin \theta, \tag{8.25}$$

unde a fost pus semnul minus deoarece momentul acţionează în sensul negativ al unghiului θ. Ţinînd seama de relaţiile (8.24) şi (8.25) ecuaţia de mişcare $dJ/dt = \mathfrak{M}$ este atunci:

$$(I_c + Ml^2)\ddot{\theta} + Mgl \sin \theta = 0.$$

Limităm acum analiza noastră la micile oscilaţii şi luăm aproximaţia obişnuită pentru unghiuri mici, $\sin \theta \approx \theta$; rearanjăm de asemenea termenii şi factorii pentru a obţine:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(\frac{1}{1 + I_c/Ml^2}\right)\theta = 0.$$

Această ecuaţie este desigur ecuaţia diferenţială pentru mişcarea armonică simplă; şi, dacă factorul din paranteză ar fi egal cu unitatea am avea ecuaţia pentru pendulul simplu de lungime l. Acest factor cuprinde efectul distribuţiei de masă a corpului rigid, dînd o frecvenţă:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\left(\frac{1}{1 + I_c/Ml^2}\right)} \tag{8.26}$$

Pot fi discutate multe aplicaţii interesante şi practice ale acestor rezultate; cîteva sînt prezentate în problemele de la sfîrşitul capitolului. Vom ilustra aici numai un exemplu, un caz foarte simplu. Considerăm un cerc sau o jantă circulară subţire de masă M şi rază r, suspendată de un punct fix ca de pildă un mic cui în perete. Care va fi frecvenţa micilor sale oscilaţii şi care este lungimea unui pendul simplu care are aceeaşi frecvenţă?

Parametrul l este aici egal cu r, iar valoarea lui I_c este Mr^2. În consecinţă, relaţia (8.26) dă:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2r}}\,.$$

Un pendul simplu de lungime $2r$ are această frecvenţă. Astfel cercul şi pendulul simplu de lungime egală cu diametrul cercului se vor mişca în fază dacă micile oscilaţii au acelaşi defazaj iniţial.

ROTAȚIA ÎN JURUL UNEI AXE FIXE: COMPORTAREA VECTORULUI MOMENT CINETIC

În paragraful precedent ne-am concentrat atenția asupra *dependenței de timp a rotației* în jurul unei axe a cărei direcție a fost fixă în spațiu și fixă în raport cu corpul rigid. În acest scop a fost nevoie să tratăm doar componenta lui **J** de-a lungul axei, ca și componenta corespunzătoare a momentului aplicat, **M**. Ecuația de mișcare a fost pur și simplu relația scalară $dJ_a/dt = \mathfrak{M}_a$, între aceste componente. Trebuie acum să admitem că vectorul moment cinetic **J** nu este în general paralel cu axa de rotație, în afară de cazul în care aceasta este legată într-un mod particular de proprietățile de simetrie ale corpului rigid. Cînd **J** nu coincide cu axa, derivata sa temporală $d\mathbf{J}/dt$ poate să implice modificarea direcției lui **J**, ca și variația mărimii sale. Deoarece rotația în jurul unei axe fixe implică o mișcare circulară a tuturor caracteristicilor corpului, anticipăm faptul că direcția variabilă a lui **J** va fi de natura unei rotații a vectorului **J** în jurul axei fixe.

Cea mai simplă ilustrare a acestei probleme generale este oferită de un corp rigid constînd din două corpuri cu mase punctiforme egale unite printr-o tijă fără masă, în rotație în jurul unei axe fixe care trece prin centrul de masă și face un unghi θ cu tija. Descriem acest sistem în figura 8.11 la un moment de timp cînd tija coincide cu planul xy. Tija are lungime $2a$, iar viteza sa unghiulară, reprezentată prin $\boldsymbol{\omega}$ este fixă de-a lungul axei x[1]. Din definiția generală [relația (8.3)] momentul cinetic este:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}_1 \times m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_2 \times m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2).$$

Notăm particula din primul cadran prin 1, astfel încît:

$$\mathbf{r}_1 = a \cos\theta\ \hat{\mathbf{x}} + a \sin\theta\ \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{r}_2 = -a \cos\theta\ \hat{\mathbf{x}} - a \sin\theta\ \hat{\mathbf{y}} \qquad (8.27)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\ \hat{\mathbf{x}}.$$

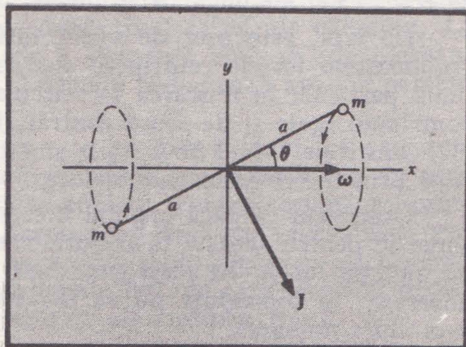


FIG. 8.11. Vectorii viteză unghiulară și moment cinetic, pentru o bară ușoară cu corpuri la capete.

[1] Observați că în acest caz vectorul $\boldsymbol{\omega}$ este de-a lungul axei x, pe cînd la pagina 266 el a fost de-a lungul axei z.

Expresia pentru J devine atunci:

$$\mathbf{J} = 2\, m\omega\, a^2 \sin\theta(\hat{\mathbf{x}} \sin\,\theta - \hat{\mathbf{y}} \cos\,\theta). \tag{8.28}$$

Acest vector este perpendicular pe tijă, cu sensul arătat în figură. El se rotește în jurul axei x, păstrînd în permanență aceeași relație cu tija și cu axa de rotație.

Întrucît J se rotește în acest fel, derivata temporală $\mathrm{d}\mathbf{J}/\mathrm{d}t$ nu este zero. De fapt, în acest caz putem scrie:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{J}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}} \tag{8.29}$$

din același motiv pentru care am scris în ecuația (8.2)

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

în legătură cu figura 8.1. Din relațiile (8.27) și (8.28) produsul vectorial din ecuația (8.29) dă:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{J}}{\mathrm{d}t} = -\, 2\, m\omega^2 a^2 \sin\,\theta \cos\,\theta\; \hat{\mathbf{z}}$$

unde sensul lui $\hat{\mathbf{z}}$ este astfel încît iese din planul figurii.

Dar, dacă $\mathrm{d}\mathbf{J}/\mathrm{d}t$ este diferit de zero, ecuația generală de mișcare (8.1) implică faptul că trebuie să existe un moment al forței, care să dea naștere variației vectorului moment cinetic.
Deci:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{J}}{\mathrm{d}t} = -\, 2\, m\omega^2\, a^2 \sin\,\theta \cos\,\theta\; \hat{\mathbf{z}}. \tag{8.30}$$

Acest vector moment (care nu este arătat în fig. 8.11) se rotește de asemenea, odată cu tija, așa cum face și J. Momentul de rotație trebuie să fie produs de suporții (ne indicați în figură) care susțin tija și o constrîng să se rotească cu un unghi θ în jurul axei x.

De fapt, este ușor de văzut rațiunea existenței acestui moment, dacă recunoaștem forțele centripete $m\omega^2 a \sin\theta$ necesare pentru a menține cele două particule în mișcarea lor circulară în jurul axei x. Aceste două forțe centripete egale și de semn contrar, înmulțite cu distanța $2\,a\,\cos\,\theta$ dintre ele, constituie cuplul M. Forțele sînt transmise particulelor din partea suporților prin intermediul tijei rigide.

Observăm că dacă unghiul θ este 90°, atunci **ω** este de-a lungul axei de simetrie pentru această distribuție simplă de masă, și direcția lui J coincide cu direcția lui **ω**. În acest caz, dacă **ω** va fi constant, J va fi de asemenea constant; în consecință nu va fi necesar nici un moment de rotație pentru a produce mișcarea.

O înțelegere calitativă clară a acestor noțiuni este adesea însușită construind un model real al unui sistem ca cel de mai sus și efectuînd rotații cu el.

MOMENTE DE INERȚIE: AXE PRINCIPALE ȘI ECUAȚIILE LUI EULER[1]

De la această ilustrare simplă a unei situații în care direcția lui J variază, ne întoarcem la definiția generală (8.3) a momentului cinetic al unui corp rigid:

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

și dezvoltăm expresia lui J folosind expresiile generale ale lui $\mathbf{r}_i$ și $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{r}_i = x_i\hat{\mathbf{x}} + y_i\hat{\mathbf{y}} + z_i\hat{\mathbf{z}}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\hat{\mathbf{x}} + \omega_y\hat{\mathbf{y}} + \omega_z\hat{\mathbf{z}},$$

unde axele x, y, z sînt considerate fixe în raport cu corpul rigid. Această operație dă pentru componentele x, y și z ale lui J rezultatele:

$$J_x = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2)\omega_x - \sum_i m_i x_i y_i \omega_y - \sum_i m_i x_i z_i \omega_z$$

$$J_y = -\sum_i m_i y_i x_i \omega_x + \sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2)\omega_y - \sum_i m_i y_i z_i \omega_z \qquad (8.31)$$

$$J_z = -\sum_i m_i z_i x_i \omega_x - \sum_i m_i z_i y_i \omega_y + \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)\omega_z.$$

Pentru eleganță și simplitate rescriem (8.31) sub forma:

$$J_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

$$J_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \qquad (8.32)$$

$$J_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

unde mărimile I_{xx} etc., sînt definite comparînd termenii corespunzători din (8.31) și (8.32).

Examinarea coeficienților I arată că termenii diagonali sînt pur și simplu momentele de inerție în raport cu axele respective; astfel, de exemplu, I_{zz} este momentul de inerție în raport cu axa z, deoarece $x_i^2 + y_i^2$ este pătratul distanței de la particula i pînă la axa z. Termenii nediagonali apar în perechi simetrice, de exemplu $I_{yx} = I_{xy}$.

Subliniem faptul remarcabil care nu este imediat evident, că este totdeauna posibil să stabilim un sistem de coordonate fix în raport cu un corp rigid, astfel încît termenii nediagonali să se anuleze. Pentru corpuri cu forme de simetrie evidente (cilindri și prisme dreptunghiulare) acest lucru este ușor de văzut, dar el este adevărat pentru *orice* corp rigid și pentru orice punct al corpului ales ca origine. Axele de coordonate față de care termenii nediagonali se anulează se numesc *axele principale* ale corpului rigid.

[1] Într-un curs introductiv, materialul expus începînd de aici și pînă la relația (8.42) poate fi omis.

Am putea să exprimăm componentele momentului cinetic și energia cinetică în raport cu axele principale, pentru a realiza astfel această simplitate dorită; dar trebuie să recunoaștem că axele principale sînt fixe în raport cu corpul și din acest motiv ele nu constituie în general un sistem de referință inerțial. De fapt, ele se rotesc împreună cu corpul sau cel puțin ele mențin în raport cu acesta o asemenea relație încît proprietățile inerțiale ale corpului sînt constante cînd se referă la aceste axe.

Să presupunem că determinăm un sistem de axe principale care se rotește împreună cu corpul și că exprimăm vectorul viteză unghiulară sub forma:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \hat{\mathbf{x}} + \omega_y \hat{\mathbf{y}} + \omega_z \hat{\mathbf{z}},$$

unde vectorii de coordonate de mărime egală cu unitatea sînt de-a lungul axelor principale, iar valorile componentelor lui $\boldsymbol{\omega}$ sînt raportate la aceste axe. În funcție de componentele pe aceste axe, vectorul moment cinetic va fi scris, simplu ca:

$$\mathbf{J} = I_{xx}\omega_x \hat{\mathbf{x}} + I_{yy}\omega_y \hat{\mathbf{y}} + I_{zz}\omega_z \hat{\mathbf{z}},$$

deoarece toți termenii nediagonali referitori la aceste axe sînt nuli. Nu mai este necesar de acum înainte să purtăm indicii dubli asupra coeficienților de inerție, întrucît rămîn numai momentele de inerție în raport cu cele trei axe principale. Scriem așadar $I_{xx} = I_x$ ș.a.m.d.; expresia lui $\mathbf{J}$ devine atunci:

$$\mathbf{J} = I_x\omega_x \hat{\mathbf{x}} + I_y\omega_y \hat{\mathbf{y}} + I_z\omega_z \hat{\mathbf{z}}. \qquad (8.33)$$

Trebuie acum să exprimăm derivata temporală a lui $\mathbf{J}$ pentru a folosi ecuația de mișcare $\mathrm{d}\mathbf{J}/\mathrm{d}t = \mathbf{M}$. Momentele de inerție sînt constante, dar componentele vitezei unghiulare ω_x, ω_y și ω_z pot să varieze, iar vectorii unitate $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ și $\hat{\mathbf{z}}$ se modifică în timp deoarece ei se rotesc împreună cu corpul. În consecință, luînd derivata temporală a relației (8.33), obținem:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{J}}{\mathrm{d}t} = I_x\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{x}} + I_y\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{y}} + I_z\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{z}} + I_x\omega_x\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} + I_y\omega_y\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{y}}}{\mathrm{d}t} + I_z\omega_z\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{z}}}{\mathrm{d}t}.$$

Dar vectorii unitate variază numai din cauză că se rotesc cu viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$, astfel încît vitezele lor de variație sînt [conform cu relațiile (8.29) sau (8.2)]:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{y}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{y}}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{z}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{z}}.$$

Aceste relații ne permit să scriem ecuația anterioară lor sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{J}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\mathbf{J}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \qquad (8.34)$$

unde $\mathrm{d}'\mathbf{J}/\mathrm{d}t$ înseamnă contribuția la variația lui $\mathbf{J}$ provenind din variația valorilor componentelor vitezei unghiulare, iar $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}$ este contribuția datorată rotației axelor principale la care este raportat $\mathbf{J}$. În cazul particular în care $\mathbf{J}$ este constant în raport cu axele principale, derivata sa temporală în raport cu un sistem inerțial conține numai ultimul termen, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}$ (ca în problema de la pag. 279, care este tratată din nou mai jos).

Dacă raportăm și vectorul moment **M** la axele principale, astfel încît componentele sale sînt momentele forțelor în raport cu aceste axe, putem scrie ecuația de mișcare sub forma:

$$\frac{d'\mathbf{J}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} = \mathbf{M}, \tag{8.35}$$

sau, pe componentele de-a lungul axelor principale:

$$\begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z &= \mathfrak{M}_x \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x &= \mathfrak{M}_y \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y &= \mathfrak{M}_z \end{aligned} \tag{8.36}$$

unde am omis indicele prim. Acest set de trei ecuații reprezintă *ecuațiile lui Euler pentru mișcarea unui corp rigid.*

Energia cinetică, exprimată în general prin expresia (8.4) ia forma particulară:

$$E_c = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2),$$

atunci cînd este formulată cu momentele de inerție și componentele vitezei unghiulare referitoare la axele principale.

Cîteva aplicații simple ale ecuațiilor lui Euler

Rotator rigid cu două particule, axă fixă. Ne întoarcem la sistemul celor două mase punctiforme unite printr-o tijă fără masă, rotindu-se în jurul unei axe fixe, care trece prin centrul de masă, dar la un unghi arbitrar, după cum este ilustrat în figura 8.11. Problema a fost tratată la paginile 279, 280, dar o vom considera acum folosind axele principale indicate în figura 8.12. Alegem axa y astfel încît să coincidă cu tija și avînd originea în centrul de masă. Axa x este perpendiculară pe tijă în planul determinat de tijă și $\boldsymbol{\omega}$. Axa z (nu este figurată) este perpendiculară și iese din planul figurii la momentul de timp considerat. Cu această alegere a axelor (observați diferența dintre fig. 8.11 și 8.12) avem:

$$I_x = 2ma^2, \qquad I_y = 0, \qquad I_z = 2ma^2$$

$$\omega_x = \omega \sin\theta, \qquad \omega_y = \omega\cos\theta, \qquad \omega_z = 0.$$

Din ecuația (8.33) rezultă atunci $\mathbf{J} = 2ma^2\,\omega\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}}$. Momentul cinetic este așadar perpendicular pe tijă, așa cum am găsit în relația (8.28) și se rotește împreună cu tija de-a lungul axei x. Momentul forței necesar pentru a constrînge sistemul să se rotească în jurul acestei axe se determină din ecuațiile lui Euler (8.36), și, întrucît ω este considerat constant, rezultatul este

$$\mathfrak{M}_z = -2ma^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta$$

în concordanță cu relația (8.30). Momentul are doar o componentă, de-a lungul axei z și se rotește împreună cu tija.

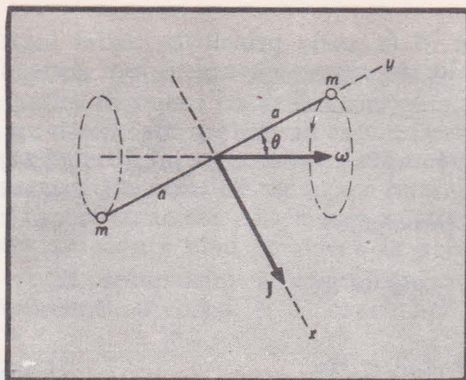


FIG. 8.12. Rotatorul rigid cu două particule axele principale. Comparați cu figura 8.11.

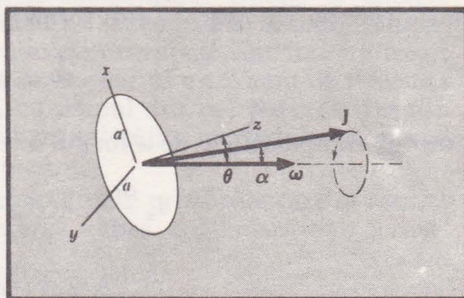


FIG. 8.13. Disc circular care se rotește în jurul unei axe, trecînd prin centru, înclinată față de normală.

Disc circular, axă fixă înclinată față de normală. Considerăm un disc, arătat în figura 8.13, de masă m și rază a, constrîns să se rotească în jurul unei axe fixe care face un unghi θ cu axa normală. Alegem axele principale după cum este indicat, cu axa z normală și axa x în planul determinat de $\boldsymbol{\omega}$ și $\hat{\mathbf{z}}$. Aplicînd relațiile (8.13) și (8.14) avem:

$$I_x = I_y = \frac{ma^2}{4}; \quad I_z = \frac{ma^2}{2}$$

$$\omega_x = -\omega \sin\theta;\ \omega_y = 0;\ \omega_z = \omega\cos\theta.$$

Momentul cinetic este deci:

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{4} ma^2 \omega \sin\theta\, \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} ma^2 \omega\cos\theta\, \hat{\mathbf{z}}.$$

Unghiul α dintre $\boldsymbol{\omega}$ și $\mathbf{J}$ poate fi găsit din produsul scalar al acestor vectori:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}}{\omega J} = \frac{1+\cos^2\theta}{1+3\cos^2\theta}.$$

Pe măsură ce mișcarea progresează, $\mathbf{J}$ se rotește în jurul lui $\boldsymbol{\omega}$ generînd un con, așa cum este figurat.

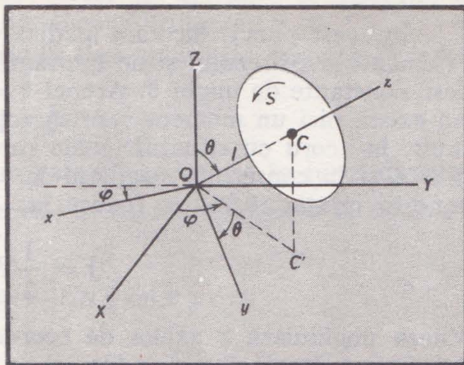
Momentul forței necesar pentru a menține discul în rotație în jurul acestei direcții înclinate a lui ω se scrie, din relația (8.35), sub forma:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J} = \frac{1}{4} ma^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta\,\hat{\mathbf{y}}.$$

Exemplele din problemele 13 și 14 aparțin clasei de sisteme în rotație care nu sînt „echilibrate dinamic". Faptul că $\mathbf{J}$ nu coincide cu direcția lui $\boldsymbol{\omega}$ înseamnă că este necesar un moment pentru a menține corpul în rotație. Echilibrarea dinamică a osiilor, roților etc. este operația de ajustare a distribuției de masă astfel încît axa de rotație dorită să fie o axă principală, făcînd astfel ca $\mathbf{J}$ să fie de-a lungul lui $\boldsymbol{\omega}$ și eliminînd momente de rotație nedorite.

Titirezul sau giroscopul — tratare aproximativă. Prezentăm în figura 8.14 o formă simplă de titirez constînd dintr-un disc circular de masă M și rază a.

FIG. 8.14. Titirezul. Axele și unghiurile folosite în descrierea mișcării. Este arătată de asemenea viteza unghiulară de rotație S.



cu un ax fără masă. Vîrful axului se află în O și centrul de masă al discului C se află la distanța l de vîrf. Figurăm un sistem inerțial XYZ și un sistem în rotație de axe principale xyz. Axele principale se mișcă împreună cu axul titirezului, dar nu se rotesc odată cu discul în jurul axului său în mișcare. Axa OZ este luată de-a lungul axului titirezului, Ox este totdeauna în planul orizontal XY iar axa Oy este înclinată cu un unghi θ dedesubtul acestui plan, θ fiind același cu unghiul dintre axele Oz și OZ. Proiecția centrului de masă pe planul XY este C', iar OC' este figurat la un unghi φ față de axa X în plan orizontal. Acest unghi coincide cu cel dintre Ox și sensul negativ al axei OY. Astfel orientarea axului este specificată prin unghiul polar θ și unghiul azimutal φ, iar mișcarea axului este descrisă de variația acestor unghiuri. Axele principale urmează o astfel de mișcare.

Discul se rotește în jurul axului său cu viteza S rad/s în sistemul xyz, dar viteza unghiulară totală a titirezului implică în general și variații ale lui φ și θ, astfel încît vectorul viteză unghiulară totală va fi suma:

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{x}} + \dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{Z}} + S\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{8.37}$$

Pentru a exprima $\boldsymbol{\omega}$ în întregime în funcție de componentele pe axele principale observăm că:

$$\hat{\mathbf{Z}} = -\sin\theta\;\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\;\hat{\mathbf{z}}$$

astfel încît (8.37) devine:

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{x}} - \dot{\varphi}\,\sin\theta\;\hat{\mathbf{y}} + (\dot{\varphi}\cos\theta + S)\hat{\mathbf{z}}.$$

Momentele de inerție în raport cu axele principale sînt [folosind din nou relațiile (8.13) și (8.14)]:

$$I_z = \frac{1}{2}Ma^2,\; I_x = \frac{1}{4}Ma^2 + Ml^2 = I_y$$

unde pentru exprimarea componentelor I_x și I_y am apelat la teorema axelor paralele. Folosind relația (8.33) scriem acum vectorul moment cinetic în raport cu O:

$$\mathbf{J} = \left(\frac{1}{4}Ma^2 + Ml^2\right)(-\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{x}} - \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}) + \frac{1}{2}Ma^2\;(\dot{\varphi}\cos\theta + S)\hat{\mathbf{z}}. \tag{8.38}$$

În acest punct, încetăm analiza cazului general al mişcării complexe şi fascinante a titirezului şi ne limităm atenţia la cazul particular al unei precesii constante de unghi θ. Atunci $\dot{\theta} = 0$ iar $\dot{\varphi}$ şi S vor fi constante deoarece nu există nici un moment care să acţioneze în raport cu OZ sau cu Oz. Mai mult, în acord cu situaţiile reale care ne sînt familiare facem aproximaţia $S \gg \dot{\varphi}$ şi în consecinţă neglijăm în expresia lui **J** termenii în φ. În aceste condiţii relaţia (8.38) se reduce la:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} Ma^2 S \hat{\mathbf{z}}.$$

Viteza unghiulară a axelor de coordonate care *nu* se rotesc cu viteza $S\hat{\mathbf{z}}$ are forma simplă (cu $\theta = 0$):

$$\omega' = \dot{\varphi} \hat{\mathbf{Z}}.$$

Derivata temporală a lui **J**, obţinută din ecuaţia (8.34) este pur şi simplu $\omega' \times \mathbf{J}$ din cauza faptului că $\dot{\varphi}$ şi S sînt constante. Aşadar, din ultimele două relaţii avem:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \omega' \times \mathbf{J} = \dot{\varphi} \hat{\mathbf{Z}} \times \frac{1}{2} Ma^2 S \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2} Ma^2 \dot{\varphi} S (\hat{\mathbf{Z}} \times \hat{\mathbf{z}}) =$$
$$= -\frac{1}{2} Ma^2 \cdot S \dot{\varphi} \sin\theta \, \hat{\mathbf{x}}. \tag{8.39}$$

Momentul forţei care acţionează asupra titirezului, în raport cu O, este datorat forţei gravitaţionale, aplicată în C îndreptată în jos, singura forţă care mai rămîne fiind forţa de reacţiune în O. Rezultatul este:

$$\mathbf{M} = -Mgl \sin\theta \, \hat{\mathbf{x}}. \tag{8.40}$$

Egalînd relaţiile (8.39) şi (8.40) în conformitate cu ecuaţia fundamentală de mişcare (8.1) obţinem, pentru viteza de precesie expresia:

$$\dot{\varphi} = \frac{Mgl}{\frac{1}{2} Ma^2 S}. \tag{8.41}$$

Remarcăm că viteza de precesie este independentă de înclinarea θ.

Factorul $\frac{1}{2} Ma^2$, valoarea lui I_z pentru disc, apare la numitorul expresiei (8.41). În cazul particular al precesiei staţionare şi în aproximaţia $S \gg \dot{\varphi}$, putem să generalizăm corect relaţia (8.41) la forma:

$$\dot{\varphi} = \frac{Mgl}{I_z S} \tag{8.42}$$

pentru a include forme mai generale de titirez sau giroscop.

Acest [1] rezultat aproximativ, care exprimă viteza precesiei constante, cînd viteza unghiulară de rotaţie S este mai mare în comparaţie cu viteza

[1] Acei cititori care au omis discuţia ecuaţiilor lui Euler, la pagina 281 pot folosi tratarea simplă a giroscopului care începe aici.

unghiulară de precesie $\dot{\varphi}$, poate fi obținut direct din aplicarea ecuației fundamentale de mișcare (8.1). Procedăm după cum urmează.

Cînd S este mare, momentul cinetic al titirezului este aproape în întregime dat de expresia:

$$\mathbf{J} = I_z S \hat{\mathbf{z}}.$$

Viteza de variație a lui $\mathbf{J}$ este datorată rotației constante în jurul direcției verticale $\hat{Z}$ cu viteza unghiulară de precesie $\dot{\varphi}$. Astfel (referiți-vă la fig. 8.14) avem:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \dot{\varphi}\, \hat{\mathbf{Z}} \times I_z S \hat{\mathbf{z}} = -I_z S\, \dot{\varphi} \sin\theta\, \hat{\mathbf{x}}.$$

Momentul este dat de relația (8.40), iar egalarea acesteia cu expresia obținută acum pentru $d\mathbf{J}/dt$ dă iarăși rezultatul (8.42):

$$\dot{\varphi} = \frac{Mgl}{I_z S}.$$

Trebuie să subliniem că această tratare a problemei giroscopului implică numai un caz simplu dar important. Aspecte mai generale ale mișcării pot fi demonstrate în experiențe cu giroscopul și ele sînt toate tratabile prin ecuațiile lui Euler (8.36). Acest domeniu de studiu este esențial în tehnologia navigației inerțiale și a stabilizării giroscopice. Cu modificări, el are de asemenea aplicații la molecule, nuclee atomice și particule elementare care sînt supuse la acțiunea unor momente în cîmpuri magnetice, datorită momentelor lor magnetice intrinseci.

PROBLEME

1. *Teorema axelor paralele.* Plecînd de la faptul că momentul de inerție al unui disc subțire în raport cu o axă diametrală este $\frac{1}{4}ma^2$, utilizați teorema axelor paralele pentru a demonstra că pentru un cilindru circular plin de masă M, rază a și lungime L, momentul de inerție în raport cu o axă transversală care trece prin centrul de masă este $Ma^2/4 + ML^2/12$.

2. *Aditivitatea momentelor de inerție.* Folosind principiul că momentele de inerție sînt simplu aditive, calculați momentul de inerție în raport cu axa centrală, a obiectului cilindric din figura 8.15, dacă masa sa este M, raza a, raza fiecăruia din cele 4 goluri cilindrice $a/3$, iar axa fiecărui gol este la distanța $a/2$ de axa centrală.

R: $\frac{59}{90} Ma^2$.

3. *Momentul de inerție al sferei pline.* Arătați că momentul de inerție al unei sfere pline în raport cu un diametru este $\frac{2}{5} Mr^2$. Rezultatul se poate obține simplu considerînd că sfera este o suprapunere de discuri circulare de grosime infinitezimală așezate într-o suprafață înfășurătoare sferică.

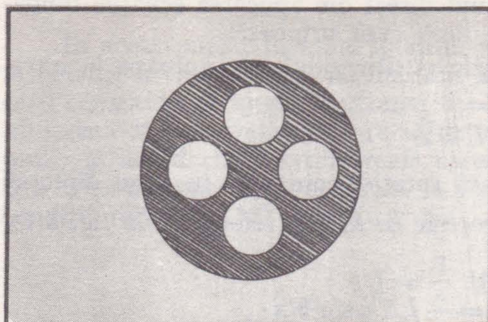


FIG. 8.15.

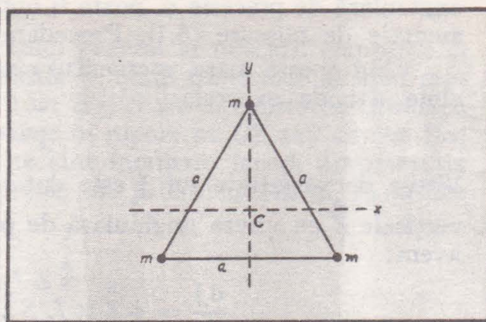


FIG. 8.16.

4. *Momente de inerție ale triunghiului.* Trei corpuri de mase punctiforme egale care se află în vîrfurile unui triunghi echilateral (vezi fig. 8.16) sînt unite printr-o foaie triunghiulară rigidă de masă neglijabilă.

(*a*) Găsiți momentul de inerție I_z, în raport cu axa normală care trece prin centrul C.

(*b*) Evaluați I_y pentru axa y indicată.

(*c*) Evaluați I_x, făcînd apel la teorema axelor perpendiculare.

5. *Placă pătrată; egalitatea momentelor.* Demonstrați că momentul de inerție al unei plăci pătrate rigide în raport cu o axă diagonală din planul său, este egal cu momentul de inerție în raport cu o axă care este situată în plan, trece prin centru și este paralelă cu laturile pătratului. (Teorema axelor perpendiculare, împreună cu simetria, vă permit să faceți demonstrația fără nici un calcul.)

6. *Corpuri rigide care se rostogolesc.* Un cilindru plin, o pătură cilindrică cu pereții groși, o sferă plină și o pătură sferică cu pereți groși se rostogolesc în jos pe un plan înclinat care face unghiul θ cu orizontala. Toate obiectele au aceeași rază R. Găsiți accelerația fiecărui corp.

7. *Rostogolirea unei sfere goale.* O sferă goală cu raza interioară R_1 și raza exterioară R_2, se rostogolește în jos fără să alunece pe un plan înclinat la un unghi θ cu orizontala.

(*a*) Găsiți accelerațiile unghiulară și liniară.

$$\mathbf{R}: \alpha = \frac{a}{R_2};$$

$$a = \frac{g \sin\theta}{1 + \frac{2}{5}(1 - R_1^5/R_2^5)/(1 - R_1^3/R_2^3)}.$$

(*b*) La capătul inferior, planul se continuă cu o zonă de tranziție curbă care devine în final un plan orizontal. Cu ce viteză se va mișca obiectul pe planul orizontal final, dacă a plecat din repaus pe planul inclinat avînd centrul la înălțimea h deasupra planului orizontal final? (Folosiți conservarea energiei.)

$$\mathbf{R}: v^2 = \frac{2g(h - R_2)}{1 + \frac{2}{5}(1 - R_1^5/R_2^5)/(1 - R_1^3/R_2^3)}$$

8. *Momentul forței de frecare.* Un volant greu de forma unui cilindru plin de rază 0,5 m, grosime 0,20 m și masă 1 200 kg se rotește liber pe suporți cu o viteză inițială de 150 rot/s. El trebuie adus în repaus printr-o frînă de fricțiune în care un sabot de frînă este apăsat pe periferia volantului cu o forță echivalentă cu greutatea a 40 kg. Coeficientul de frecare între suprafețele în contact este 0,4 și este presupus a fi independent de viteza relativă a suprafețelor.

(*a*) Cu ce unghi se va roti volantul pînă cînd ajunge în repaus, dacă frîna este aplicată în mod constant?

R: $8{,}5 \cdot 10^5$ rad sau aproximativ 135 000 revoluții.

(*b*) Cît timp durează mișcarea pînă la oprire?

R: 1 800 s.

9. *Pendulul compus: lungimea echivalentă.* Demonstrați că o bară uniformă de

lungime L, articulată la un capăt ca un pendul compus, are aceeași frecvență a micilor oscilații ca și un pendul simplu a cărui lungime este $2L/3$.

10. *Centru de percuție.* Considerăm o bară rigidă de lungime L, suspendată la un capăt printr-un pivot aflat în punctul P. O forță F care acționează pentru o perioadă scurtă (adică o forță impulsivă) trebuie aplicată pentru a pune bara în mișcare de pendulare, după cum este arătat în figura 8.17. Articulația din P este foarte fragilă și este necesar să aplicăm forța F la o asemenea distanță x încît în P să nu apară nici o forță de reacțiune. Găsiți valoarea lui x care satisface această cerință. Această poziție se numește *centru de percuție* pentru punctul de suspensie P. (Indicație: efectul lui F va consta în accelerarea centrului de masă și producerea unei accelerații unghiulare în jurul lui P prin momentul său în raport cu P. Compatibilitatea acestor accelerații, în presupunerea că nu există forță de reacțiune în P, va specifica valoarea lui x în funcție de L.)

R: $x = 2L/3$.

11. *Corp rigid neechilibrat.* O jantă subțire sau un cerc de masă M și rază R este prevăzută cu un număr de spițe fără masă, astfel încît se rotește liber în plan vertical în jurul unui ax orizontal care trece prin centrul său. O particulă de masă m este legată de jantă, făcînd ca sistemul să stea în repaus cu masa m la extremitatea sa inferioară. Găsiți frecvența micilor oscilații. Găsiți de asemenea viteza unghiulară maximă atinsă, dacă sistemul este lăsat liber din repaus cu masa m aflată în punctul cel mai de sus.

12. *Pendulul reversibil.* Demonstrați că pentru un pendul compus există două distanțe l_1 și l_2 ale articulației față de centrul de masă, care vor produce aceeași frecvență a micilor oscilații și că aceste distanțe sînt corelate prin relația:

$$l_1 l_2 = \frac{I_c}{M}.$$

În plus, arătați că dacă am localizat o astfel de pereche de puncte conjugate și

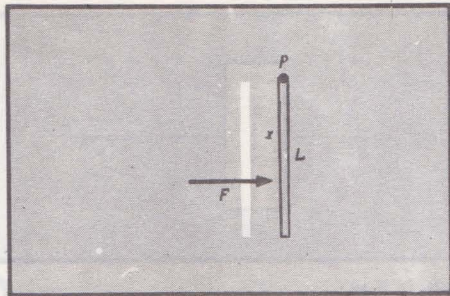


FIG. 8.17;

le-am măsurat frecvența comună ω, putem obține valoarea lui g din

$$g = \omega^2(l_1 + l_2).$$

(Aceasta este o tehnică numită metoda *pendulului reversibil* pentru măsurarea lui g. Punctele de articulație se află pe o dreaptă care trece prin centrul de masă de o parte și de alta a acestuia; astfel $l_1 + l_2$ este pur și simplu distanța dintre punctele de articulație. În acest fel poziția centrului de masă nu este necesară.)

13. *Moment de rotație.* O placă dreptunghiulară de masă M, cu laturile a și b se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe fixe de-a lungul unei diagonale. Evaluați vectorul moment de rotație pe care suporții trebuie să îl aplice plăcii, pentru a o menține în această rotație particulară. Trasați o diagonală corectă arătînd vectorul moment cinetic. Exprimați-l ca vector.

Răspuns parțial: mărimea momentului forței $= \frac{1}{12} Mab\,\omega^2(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$.

14. *Lipsa echilibrării dinamice.* O bară subțire, uniformă, de masă M și lungime L, se rotește în jurul unei axe transversale care trece prin centrul său. Se presupune că axa este perpendiculară pe bară, dar din cauza unei imperfecțiuni ea deviază de la această direcție printr-un mic unghi δ. Găsiți vectorul moment aplicat, dacă rotația are loc cu viteza unghiulară ω. Exprimați vectorul moment cinetic și reprezentați-l intr-o diagramă.

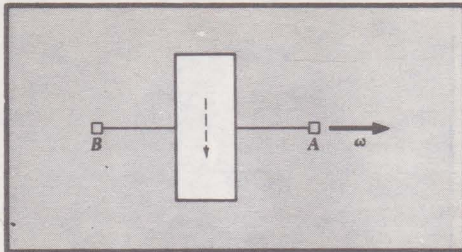


FIG. 8.18;

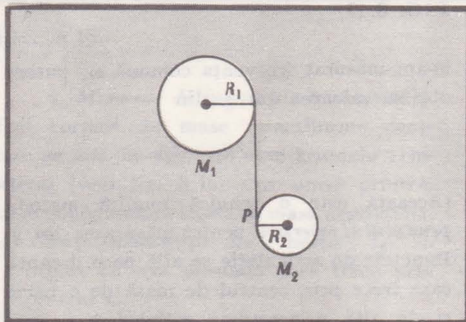


FIG. 8.19.

15. *Giroscopul.* Un giroscop particular constă dintr-un cilindru plin de rază $a = 0{,}04$ m. El se sprijină pe un ax fără masă a cărui extremitate pivotează liber într-un punct situat la 0,05 m față de centrul de masă al cilindrului. Giroscopul se află, în mișcare de precesie staționară la un anumit unghi de înclinare față de verticală, iar precesia face să se execute o mișcare circulară completă la fiecare 3 secunde. Evaluați viteza unghiulară a rotației giroscopului în jurul axei sale proprii.

R: 293 rad/s.

16. *Accelerația unghiulară.* Un cilindru plin cu masa de 2 kg și raza de 0,04 m este constrîns să se rotească în jurul axei sale, care este orizontală. În jurul cilindrului este înfășurat un fir de al cărui capăt liber este atașat un corp cu masa de 0,15 kg (vezi fig. 8.7). Găsiți accelerația liniară a corpului, accelerația unghiulară a cilindrului, tensiunea în fir și forța verticală care menține cilindrul.

17. *Rotația giroscopului.* Figura 8.18 reprezintă o roată de giroscop văzută dintr-o parte, cu osia montată în articulațiile A și B. Ea se rotește cu viteza unghiulară indicată, partea dinspre cititor a roții mișcîndu-se în jos. În punctele A și B se dezvoltă forțe de reacțiune îndreptate în sus.

(*a*) Vrem să reorientăm roata pentru a-l plasa pe A direct peste B, fără a deplasa centrul de masă al sistemului. Descrieți forțele suplimentare, în afara reacțiunilor suportului, care trebuie aplicate în A și B.

(*b*) Dacă, în loc de a-l plasa pe A peste B, vrem să-l aducem pe A către noi, și pe B în spatele lui A, descrieți forțele pe care trebuie să le aplicăm în A și B.

18. *Momente în raport cu centrul de masă.* Un cilindru de masă M_1, rază R_1, cu axă orizontală, este constrîns să se rotească în jurul axei sale. Un fir înfășurat în jurul acestui cilindru este înfășurat de asemenea și în jurul unui cilindru de masă M_2 și rază R_2, care este liber să se desfășoare și să cadă, axa sa rămînînd orizontală ca în figura 8.19. În aproximația firului vertical, găsiți:

(*a*) Accelerația centrului de masă al lui M_2.

$$\mathbf{R}: a = (M_1 + M_2)g \Big/ \left(\frac{3}{2} M_1 + M_2\right).$$

(*b*) Accelerația unghiulară a lui M_2.

(*c*) Accelerația unghiulară a lui M_1.

(*d*) Tensiunea în fir.

Dacă se iau momentele forțelor în raport cu punctul P din figură, care este „forța fictivă" în centrul de masă al celui de-al doilea cilindru?

19. *Coeficientul de frecare minim.* Arătați că pentru ca un corp simetric să se rostogolească în jos fără să alunece pe un plan înclinat, este necesar ca:

$$\mu \geqslant \frac{\operatorname{tg} \theta}{MR^2/I_c + 1}$$

unde simbolurile au semnificația obișnuită.

LECTURI SUPLIMENTARE

Expuneri interesante, clare și cuprinzătoare ale mișcării corpurilor rigide, și în particular a giroscopului, se găsesc în unele dintre tratatele mai vechi, ca de exemplu: Arthur Gordon Webster, *Dinamica particulelor și a corpurilor rigide, elastice și fluide* („The Dinamics of Particles and of Rigid, Elastic and Fluid Bodies"), B. G. Teubner, Leipzig, 1904 (Strechert—Hafner, Inc., New York, 1920).

O expunere mai nouă de nivel mediu se află în cartea lui John L. Synge și Byron A. Griffith, *Principiile mecanicii* („Principles of Mechanics"), capitolul 14, Mc Graw—Hill Book Company, New York, 1959.

9

Forțe invers proporționale cu pătratul distanței

Cuprins

Mărimea forței gravitaționale și a forței electrostatice dintre două particule punctiforme aflate în repaus este dată de:

$$F = \frac{C}{r^2}$$

unde C este o constantă. Astfel de forțe se numesc *forțe centrale invers proporționale cu pătratul distanței*. Noțiunea de *forță centrală* exprimă faptul că forța este dirijată de-a lungul dreptei care unește cele două particule. Dacă una dintre particule se găsește în origine și cea de a doua în poziția dată de vectorul de poziție $\mathbf{r}$, forța asupra celei de a doua particule este dată de:

$$\mathbf{F} = \frac{C}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} \tag{9.1}$$

unde pentru forța gravitațională dintre masele punctiforme M_1, M_2 avem:

$$C = -GM_1M_2$$

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg \cdot s^2} \tag{9.2}$$

iar pentru forța electrostatică dintre sarcinile punctiforme q_1, q_2,

$$C = 9 \cdot 10^9 q_1 q_2 \tag{9.3}$$

sarcina, lungimile și forțele exprimate în unități SI (vezi cap. 3, paginile 86—92), sau:

$$C = q_1 q_2 \tag{9.3, a}$$

cu condiția ca sarcina să fie exprimată în unități gaussiene CGS. Forța gravitațională este întotdeauna atractivă. Forța electrostatică (coulombiană) este atractivă dacă sarcinile q_1, q_2 au semne opuse și repulsivă dacă q_1, q_2 au același semn.

Se știe din experiență, cu foarte mare precizie, că exponentul lui r în relația (9.1) este egal cu 2,000 ... ; pentru forțe electrostatice acest fapt este stabilit mergînd pînă la distanțe mici de ordinul 10^{-15} m. O mare diversitate de rezultate experimentale ar fi sensibile într-un grad înalt față de mici abateri de la legea exactă de proporționalitate inversă cu pătratul distanței. Experiențele fundamentale sînt discutate în volumul 2, capitolul 1, cu accent special asupra forțelor electrostatice. Pentru forțele gravitaționale apelăm, pentru suportul experimental, în special la acordul excelent dintre predicție și observație în cazul mișcării planetelor din sistemul solar.

Legea forței invers proporționale cu pătratul distanței se exprimă, de asemenea, prin faptul că energia potențială este invers proporțională cu puterea

întîi a distanței. După cum am văzut în capitolul 5, forța F este egală cu $-\partial U/\partial r$. Din relația (9.1) avem atunci:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{C}{r^2}$$

și

$$E_p(r) = U(r) = \frac{C}{r} + \text{const.}$$

Dacă alegem $U(r)$ astfel încît să fie egal cu zero cînd particulele sînt la distanță infinită una față de alta, constanta de integrare este zero și avem:

$$U(r) = \frac{C}{r},$$

unde C este dat de relațiile (9.2), (9.3) sau (9.3,*a*) pentru forțele gravitaționale și electrostatice în sistemele SI sau CGS. Astfel avem:

$$U(r) = -\frac{GM_1M_2}{r} \quad \text{sau} \quad U(r) = \frac{kq_1q_2}{r}, \tag{9.4}$$

sau alternativ

$$U = \frac{q_1q_2}{r}. \tag{9.4, a}$$

Legea forței dintre doi protoni sau doi neutroni sau dintre un proton și un neutron diferă foarte mult atît de legea gravitațională cît și de cea coulombiană. Această forță se manifestă ca o atracție foarte puternică atunci cînd particulele sînt foarte aproape una de alta, la mai puțin de $2 \cdot 10^{-13}$ cm și devine neglijabilă cînd ele se află la distanță mare. Asemenea forțe sînt tratate în cărți de fizică nucleară. Forța electrică între doi electroni este cu mare precizie coulombiană pînă la cele mai mici distanțe cunoscute. În plus față de sarcina lor electrică, electronii au momente magnetice dipolare care dau naștere unei forțe necentrale invers proporționale cu cubul distanței (vezi vol. 2, cap. 10).

Care sînt caracteristicile particulare ale unei forțe invers proporționale cu pătratul distanței? Ce aspecte cruciale ale universului se reflectă într-o asemenea forță? Vom trata acum aceste probleme importante. Vom considera adesea energia potențială în loc de forță. În rezolvarea problemelor, studentul va constata aproape întotdeauna că este mai ușor să se folosească energia potențială și nu forța. El poate obține componentele forței derivînd potențialul și poate folosi adesea energia potențială într-o ecuație energetică. Energia potențială este un scalar; forța este un vector.

ENERGIA POTENȚIALĂ ȘI FORȚA DINTRE O MASĂ PUNCTIFORMĂ ȘI O PĂTURĂ SFERICĂ

O consecință importantă a legii forței invers proporționale cu pătratul distanței este că forța exercitată asupra unei mase punctiforme de probă, M_1, la distanța r față de centrul unei pături sferice uniforme, subțiri, de rază R,

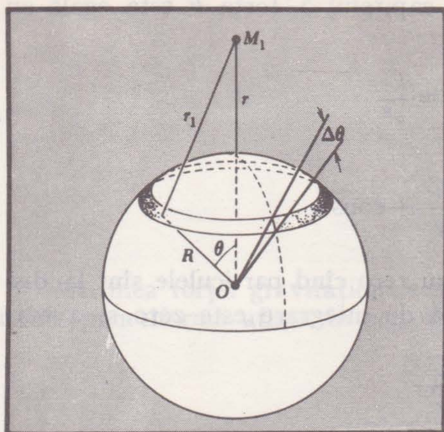


FIG. 9.1. Imagine in perspectivă a unei pături sferice și a unei mase punctiforme M_1, arătînd cum se imparte pătura sferică in inele. Pătura are densitatea de masă σ pe unitatea de arie.

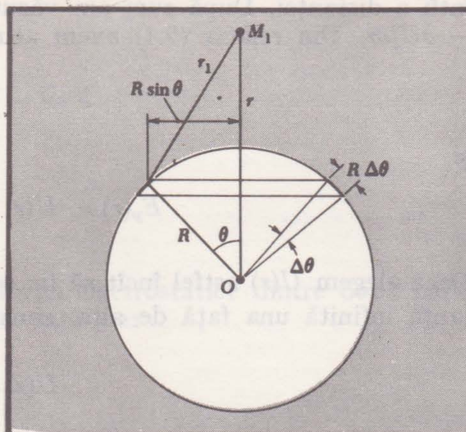


FIG. 9.2. Imagine în secțiune a aceleiași sfere arătînd inelul de arie totală $2\pi R^2 \sin\theta\,\Delta\theta$.

este exact aceeași în toate punctele $r > R$ din afara păturii, ca și cum întreaga sa masă ar fi concentrată în centru. A doua consecință este că pentru puncte $r < R$ din interiorul păturii, forța asupra masei punctiforme este *zero*. Aceste consecințe sînt atît de importante încît le vom da deducerea completă. Aplicăm o metodă particulară de rezolvare care ține seama de simetria geometrică a problemei.

Vom considera întîi din pătura sferică un inel de lărgime unghiulară $\Delta\theta$ sau grosime $R\,\Delta\theta$, ca în figura 9.1. Fie σ masa unității de arie a păturii. Facem această alegere întrucît tot inelul este echidistant față de masa de probă M_1, distanța fiind r_1. Raza inelului este $R \sin\theta$, iar circumferința sa este $2\pi R \sin\theta$. Aria inelului este așadar dată de (vezi fig. 9.2):

$$(2\pi R \sin\theta)(R\Delta\theta) = 2\pi R^2 \sin\theta\,\Delta\theta.$$

Masa inelului se obține făcînd produsul dintre arie și masa σ pe unitatea de arie:

$$M_{inel} = (2\pi R^2 \sin\theta \cdot \Delta\theta)\,\sigma. \tag{9.5}$$

Combinînd relațiile (9.5) și (9.4), energia potențială U_{inel} a masei de probă în cîmpul gravitațional al inelului se obține sub forma:

$$U_{inel} = -\frac{GM_1(2\pi R^2 \sin\theta\,\Delta\theta)\,\sigma}{r_1}. \tag{9.6}$$

Aici r_1 este distanța de la masa de probă pînă la inel. Din teorema cosinusului [relația (2.8)] aplicată triunghiului format de R, r și r_1 avem:

$$r_1^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta, \tag{9.7}$$

unde R și r sînt constante. În aceste condiții, cînd evaluăm variația Δr_1 a lui r_1, în funcție de variația lui θ, $\Delta\theta$, obținem:

$$2r_1\,\Delta r_1 = -2rR\,\Delta(\cos\theta) = 2rR\sin\theta\,\Delta\theta.$$

Această relație utilă ne permite să rescriem expresia (9.6) sub forma:

$$U_{inel} = -\frac{GM_1(2\pi R\,\Delta r_1)\,\sigma}{r}. \tag{9.8}$$

Observați că numitorul este acum r, distanța dintre masa de probă și centrul sferei.

Energia potențială totală $U_{pătură}$ a masei de probă în cîmpul gravitațional al păturii sferice este dată de suma contribuțiilor U_{inel} ale tuturor inelelor care alcătuiesc pătura. Cînd facem această operație trebuie să sumăm numai peste Δr_1. În cazul în care masa se află în afara păturii se vede că domeniul valorilor lui r_1 se întinde de la $r - R$ la $r + R$, astfel încît avem (vezi fig. 9.3):

$$\sum \Delta r_1 = (r + R) - (r - R) = 2R. \tag{9.9}$$

Din fericire problema s-a redus la o astfel de sumă simplă. Folosind ecuația (9.9) în efectuarea sumei peste expresiile (9.8) avem:

$$U_{pătură} = \sum U_{inel} = -\frac{GM_1 2\pi R\sigma}{r}\sum \Delta r_1 = -\frac{GM_1 4\pi R^2\sigma}{r}. \tag{9.10}$$

Dar $4\pi R^2$ este aria păturii sferice, iar $4\pi R^2\sigma$ este masa păturii $M_{pătură}$. Putem, prin urmare, să rescriem expresia (9.10) sub forma:

$$U_{pătură} = -\frac{GM_1 M_{pătură}}{r} \quad (r > R) \tag{9.11}$$

unde r este distanța dintre masa de probă și centrul păturii sferice. Am arătat că *pătura sferică acționează în punctele din afară ca și cum toată masa sa $M_{pătură}$ ar fi concentrată în centrul păturii.*

Dacă masa de probă se află în orice punct din interiorul păturii, demonstrația este identică cu excepția faptului că domeniul de sumare pentru Δr_1 în $\sum U_{inel}$ este de la $R - r$ la $R + r$ (vezi fig. 9.4), astfel încît de astă dată avem:

$$\sum \Delta r_1 = (R + r) - (R - r) = 2r. \tag{9.12}$$

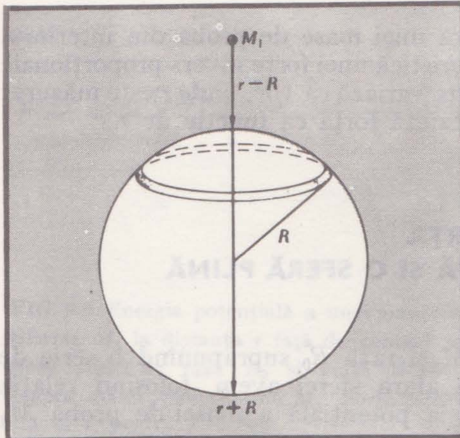


FIG. 9.3. Limitele de sumare pentru $r > R$, masa de probă M_1 în afara păturii sferice.

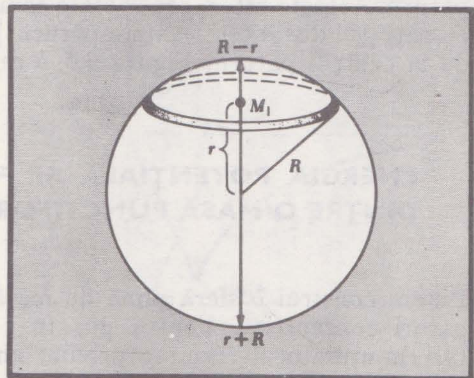


FIG. 9.4. Limitele de sumare pentru $r < R$, masa de probă M_1 în interiorul păturii sferice.

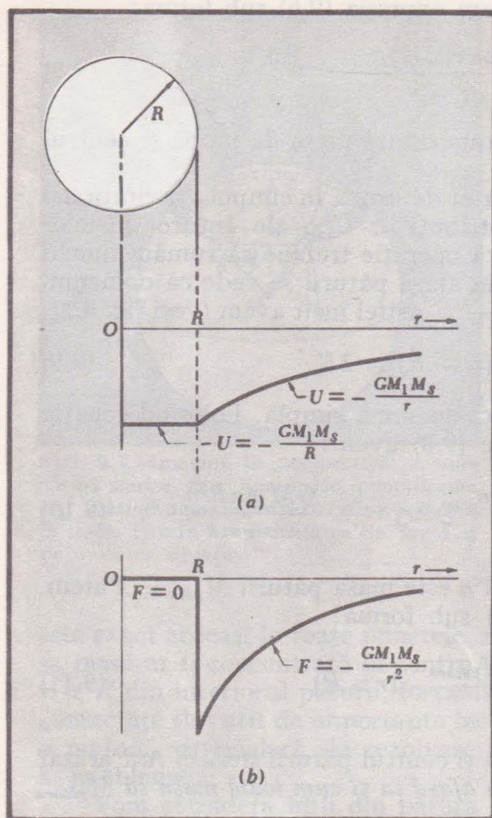


FIG. 9.5. (*a*). Energia potențială a masei punctiforme M_1 la distanța r de centrul păturii de rază R și masă M. (*b*) Forța exercitată asupra masei punctiforme M_1 (semnul minus indicînd atracția). Forța este zero pentru $r < R$.

Folosind egalitatea (9.12) în efectuarea sumei peste contribuțiile (9.8) obținem

$$U_{pătură} = \sum U_{inel} =$$

$$= -\frac{GM_1 2\pi R\sigma}{r} \sum \Delta r_1 =$$

$$= -GM_1 4\pi R\sigma = -\frac{GM_1 4\pi R^2\sigma}{R} =$$

$$= -\frac{GM_1 M_{pătură}}{R} \quad (r < R). \qquad (9.13)$$

Potențialul din ecuația (9.13) este constant în toate punctele interioare păturii și este egal cu expresia (9.11) evaluată pentru $r = R$. Figura 9.5,*a* îl reprezintă pe U, atît în interiorul cît și în exteriorul păturii.

Am văzut mai înainte ecuațiile (5.28) și (5.29)] că mărimea forței F care acționează asupra masei de probă M_1 este egală cu $-\partial U/\partial r$, deoarece forța este pe direcția radială. Din ecuațiile (9.11) și (9.13) avem, pentru forța produsă de pătură, expresia:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{GM_1 M_{pătură}}{r^2} & (r > R) \\ 0 & (r < R). \end{cases} \qquad (9.14)$$

Așadar nu se exercită nici o forță asupra unei mase de probă din interiorul păturii. Aceasta este o proprietate caracteristică unei forțe invers proporționale cu pătratul distanței. În afara păturii, forța variază ca $1/r^2$, unde r este măsurat de la centrul păturii. Figura 9.5, *b* reprezintă forța ca funcție de r.

ENERGIA POTENȚIALĂ ȘI FORȚA DINTRE O MASĂ PUNCTIFORMĂ ȘI O SFERĂ PLINĂ

Putem construi o sferă plină de masă M și rază R_0 suprapunînd o serie de pături concentrice. Pentru puncte r în afara sferei avem, folosind relația (9.11), următorul rezultat privind energia potențială a masei de probă M_1

în cîmpul gravitaţional al sferei pline:

$$U_{sferă} = \sum U_{pătură} = -\frac{GM_1}{r}\sum M_{pătură} = -\frac{GM_1M}{r}.$$

Amintim că r este distanţa de la masa de probă pînă la centrul sferei.

Mărimea forţei asupra lui M_1 este, pentru $r > R_0$:

$$\boxed{F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{GM_1M}{r^2}.} \qquad (9.15)$$

Acesta este un rezultat fundamental al analizei noastre. El s-ar fi putut obţine de asemenea printr-o integrare directă a componentelor forţei produse de toate păturile ca în problema 13, dar în modul în care am rezolvat problema, matematica este mai concisă. Printr-o generalizare imediată a relaţiei (9.15), vedem că forţa dintre două sfere uniforme de mase M_1, M_2 este egală cu forţa dintre două mase punctiforme M_1, M_2 care ar fi situate în centrele lor respective. Deoarece am putut înlocui o sferă printr-o masă punctiformă, putem să înlocuim apoi cea de a doua sferă tot printr-o masă punctiformă. Acest rezultat fericit simplifică multe calcule.

Dacă o masă punctiformă se află în interiorul unei sfere pline, forţa va fi dirijată către centrul sferei şi va avea mărimea:

$$\frac{GM_1M_{int}}{r^2}.$$

Dacă masa are densitatea uniformă ρ atunci avem:

$$M_{int} = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho; \text{ unde } M = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \rho$$

astfel încît:

$$F = -\frac{GM_1 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi G M_1 \rho r$$

sau

$$F = -\frac{GM_1Mr}{R_0^3}. \qquad (9.16)$$

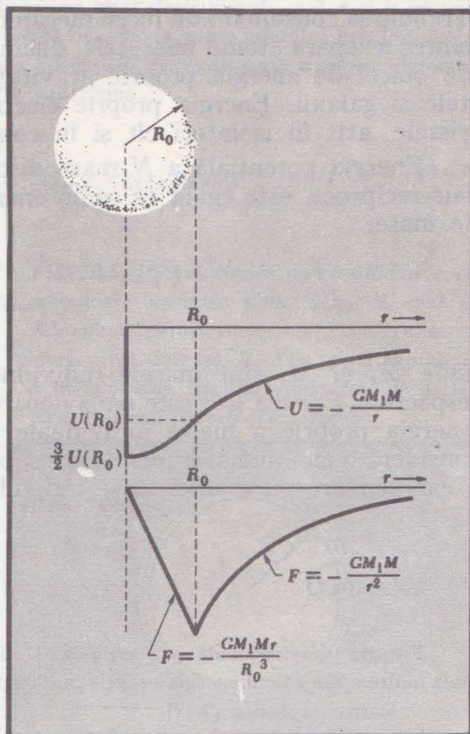


FIG. 9.6. Energia potenţială a unei mase punctiforme M_1 la distanţa r faţă de centrul unei sfere pline de rază R_0 şi masă M. Forţa asupra masei punctiforme M_1. Forţa este liniară în r pentru $r < R_0$.

Energia potențială pentru $r < R_0$ se obține adăugînd la $(-GM_1M)/R_0$ energia necesară pentru a deplasa masa M_1 din R_0 în r. Folosind pentru expresia forței relația (9.16), obținem pentru această energie:

$$\int_{R_0}^{r} \frac{GM_1Mr\,\mathrm{d}r}{R_0^3} = -\frac{GM_1M}{2R_0^3}(R_0^2 - r^2).$$

Adunînd la această energie termenul $(-GM_1M)/R_0$, obținem energia potențială pentru $r < R_0$ sub forma:

$$U(r) = -\frac{GM_1M}{R_0} - \frac{GM_1M}{2R_0^3}(R_0^2 - r^2) = -\frac{GM_1M}{R_0}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R_0^2}\right).$$

Pentru $r = 0$ avem:

$$U(0) = -\frac{3}{2}\frac{GM_1M}{R_0}.$$

Atît $U(r)$ cît și $F(r)$ sînt reprezentați în figura 9.6 pentru $0 \leq r \leq R_0$ și pentru $R_0 \leq r$.

ENERGIA PROPRIE GRAVITAȚIONALĂ ȘI ELECTROSTATICĂ

Energia proprie a unui corp este definită ca fiind lucrul mecanic consumat pentru formarea corpului din elemente infinitezimale care se află inițial la distanță infinită unul față de altul. Să considerăm energia proprie gravitațională; ea va avea semnul negativ, întrucît forța gravitațională este atractivă. (Trebuie să consumăm un lucru mecanic pozitiv împotriva forței gravitaționale pentru a separa atomii unei stele, ducînd fiecare atom la infinit.) Avem nevoie de obicei de energia proprie gravitațională pentru probleme referitoare la stele și galaxii. Energia proprie electrostatică este adesea calculată pentru cristale, atît în izolatori cît și în conductori, ca și pentru nuclee.

Energia potențială a N mase discrete, datorată atracției lor gravitaționale reciproce, este egală cu suma energiilor potențiale ale tuturor perechilor de mase:

$$U_p = -G \sum_{\substack{\text{Toate perechile} \\ i \neq j}} \frac{M_iM_j}{r_{ij}}, \tag{9.17}$$

unde M_i și M_j sînt masele individuale, iar r_{ij} este distanța dintre masele respective. Cazul $i = j$ este omis deoarece acesta nu constituie nici o pereche. Energia proprie a masei individuale m_i este de asemenea omisă deoarece considerăm aici numai interacțiile reciproce ale maselor. O metodă de evaluare a energiei proprii a unei mase individuale este descrisă în cele ce urmează.

EXEMPLU

Energia gravitațională a unei galaxii. Să estimăm energia gravitațională a galaxiei. Dacă omitem din calcul energia proprie gravitațională a stelelor individuale, trebuie să estimăm doar valoarea expresiei (9.17).

Aproximăm grosier compoziția galaxiei prin N stele, fiecare de masă M, fiecare pereche de stele fiind caracterizată de o distanță reciprocă de ordinul R. Atunci ecuația (9.17) se reduce la

$$U \approx \frac{1}{2} G(N - 1) N \frac{M^2}{R}.$$

[În suma peste toate perechile luăm fiecare dintre cele N stele la rînd și sumăm peste cele $N - 1$ stele care pot constitui o pereche cu ea. Procedînd astfel, socotim fiecare pereche de două ori (vezi fig. 9.7 pentru $N = 3$).] Dacă $N \approx 1{,}6 \cdot 10^{11}$, $R \approx 10^{21}$ m și $M \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg (ca în cazul Soarelui) atunci:

$$U \approx -\frac{1}{2} \frac{(7 \cdot 10^{-11})(1{,}6 \cdot 10^{11})^2 (2 \cdot 10^{30})^2}{10^{21}} \approx -4 \cdot 10^{51} \text{ J}.$$

EXEMPLU

Energia gravitațională a unei sfere uniforme. Nu este dificil să evaluăm energia proprie U_p a unei sfere uniforme de masă M și rază R. Transformăm sumele multiple implicit din relația (9.17) în integrale și efectuăm integrările. Să încercăm însă mai înainte de aceasta să ghicim răspunsul. Care ne așteptăm să fie acesta? Răspunsul trebuie să conțină G, M și R în combinația de dimensiune corectă. De ce nu ar fi

$$U_p \approx -\frac{GM^2}{R}?$$

Această estimare este într-adevăr corectă, cu excepția unui factor numeric de ordinul unității.

Pentru a calcula exact acest factor, construim sfera plină într-un mod particular. Considerăm întîi (vezi fig. 9.8) energia interacțiilor dintre un miez sferic plin de rază r și o pătură sferică înconjurătoare de grosime dr. Dacă ρ reprezintă densitatea, masa miezului este $(4\pi/3)\, r^3\rho$ și masa păturii este $(4\pi r^2)\cdot(\mathrm{d}r)\,\rho$. Atunci energia potențială gravitațională a păturii datorită prezenței miezului se scrie, pe baza relației (9.11), sub forma:

$$-\frac{G\left(\frac{4\pi}{3} r^3\rho\right)(4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,\rho)}{r} = -\frac{1}{3} G(4\pi\rho)^2 r^4 \mathrm{d}r. \qquad (9.18)$$

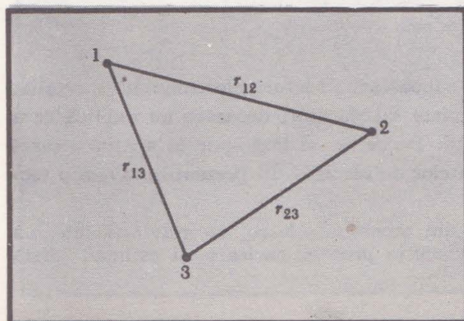


FIG. 9.7. Energia potențială gravitațională a trei atomi de mase M_1, M_2, M_3 este:

$$U = -G\left(\frac{M_1M_2}{r_{12}} + \frac{M_1M_3}{r_{13}} + \frac{M_2M_3}{r_{23}}\right)$$

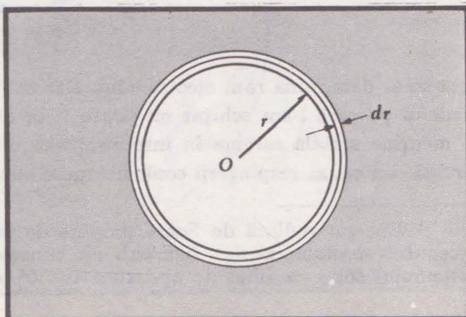


FIG. 9.8. Pătură sferică de grosime dr, care înconjoară un miez sferic plin, de rază r. Adăugînd pături succesive, construim o sferă plină de rază R. Aria unei suprafețe a inelului este $4\pi r^2$, grosimea este dr, astfel încît volumul păturii este $4\pi r^2$dr.

Energia proprie a sferei pline este dată de integrala expresiei (9.18) de la $r = 0$ la $r = R$. Integrarea corespunde la adăugarea de pături succesive miezului, pînă cînd miezul are raza R. Inițial miezul are raza egală cu zero. Simetria sferei ne-a permis să reducem sumările multiple la o singură integrală. Integrînd expresia (9.18) obținem rezultatul:

$$U_p = -\frac{1}{3} G(4\pi\rho)^2 \frac{1}{5} R^5 = -\frac{3}{5} G\left(\frac{4\pi}{3} \rho R^3\right)^2 \frac{1}{R} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \tag{9.19}$$

deoarece masa este dată de:

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3.$$

Energia proprie gravitațională a Soarelui este, din ecuația (9.19) cu $M_s \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg și $R_s \approx 7 \cdot 10^8$m:

$$U_p \approx -\frac{(3)\,(7 \cdot 10^{-11})\,(2 \cdot 10^{30})^2}{(5)\,(7 \cdot 10^8)} \approx -2 \cdot 10^{41}\ \text{J}.$$

Aceasta este o cantitate enormă de energie, dacă ne amintim că viteza de eliberare a energiei de către Soare este de $4 \cdot 10^{26}$ J/s, astfel încît Soarelui îi trebuie $\frac{1}{2} \cdot 10^{15}$ s sau $2 \cdot 10^7$ ani pentru a radia această energie imensă [1]. Soarele își poate continua evoluția ca o stea pitică albă, densă, cu o rază de aproximativ 0,1 din raza sa actuală. Este clar că într-o asemenea contracție va fi eliberată o mare cantitate de energie gravitațională. Aceste considerații sînt foarte importante în studii de astrofizică și pot interveni și în teoria stelelor nove. Energia proprie electrostatică a unei distribuții sferice uniforme de sarcină totală q și rază R se obține înlocuind în ecuația (9.19) pe $-GM^2$ prin kq^2.

EXEMPLU

Raza electronului. Pentru a estima energia proprie electrostatică a unui electron trebuie să cunoaștem raza R. Întrucît nu avem o teorie fundamentală a electronului, tot ce putem face este să procedăm în sens invers și să estimăm raza cunoscînd energia.

Există o relație celebră descoperită de Einstein care spune că o masă M este întotdeauna asociată cu o energie E în conformitate cu egalitatea:

$$E = Mc^2 \tag{9.20}$$

unde c este viteza luminii. (Deducem această relație în capitolul 12.) Dacă energia electronului ar fi în întregime energia electrostatică a unei distribuții uniforme de sarcină, atunci am avea:

$$U_p = \frac{3e^2}{5R} = mc^2$$

ceea ce ar determina raza electronului. Dar noi nu cunoaștem structura electronului în detaliu. Modelul pe care l-am schițat nu poate fi în întregime satisfăcător, deoarece nu explică cum se menține stabilă sarcina în interiorul electronului. De ce nu se împrăștie în spațiu această sarcină din cauza respingerii coulombiene a elementelor de sarcină? În prezent nu avem o teo-

[1] Energia radiată de Soare provine de fapt din procese nucleare, *nu* gravitaționale. La începutul secolului nostru fizicienii nu cunoșteau aceste procese nucleare și estimau vîrsta sistemului solar ca fiind de aproximativ 10^6 ani.

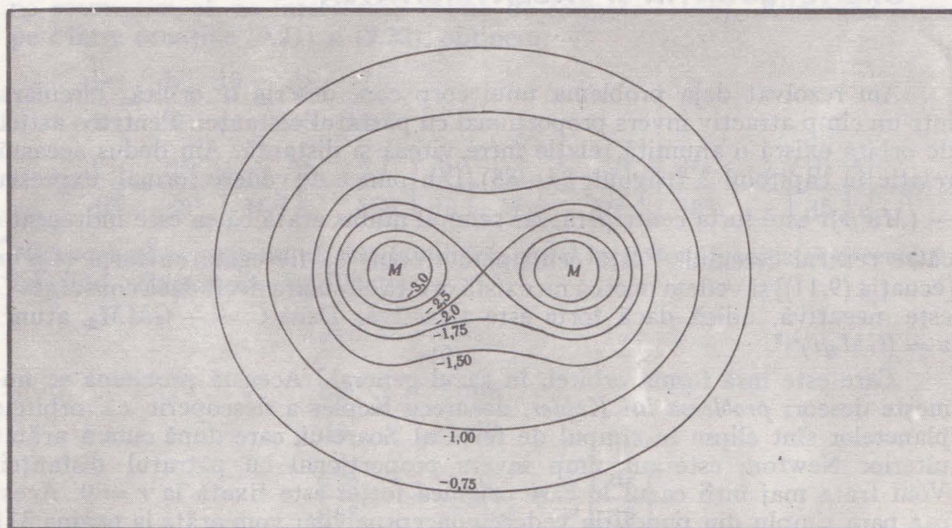
rie care să explice de ce există electronul. Să omitem atunci factorul $\frac{3}{5}$. Ar fi pretențios să păstrăm acest factor deoarece el sugerează o subtilitate a cunoștințelor despre electron pe care nu o posedăm. Definim (prin convenție universală) o lungime r_0 prin relația:

$$\frac{e^2}{r_0} \equiv mc^2, \quad r_0 \equiv \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}82 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

Această lungime se numește raza clasică a electronului. Ea are o legătură cu electronul, dar nu știm exact care este aceasta! Cu toate acestea, ea este numită o lungime fundamentală și apare în expresii ca secțiunea de împrăștiere pentru raze X sau raze γ. De fapt, știm că forța electrică între doi electroni este cu precizie egală cu e^2/r^2 pînă la distanțe mici, cel puțin pînă la $r = 10^{-17}$ m.

Forțe invers proporționale cu pătratul distanței și echilibrul static. În volumul 2, capitolul 2, arătăm că nu poate să existe echilibru *static* stabil între un grup de mase (sau sarcini) care interacționează numai prin forțe invers proporționale cu pătratul distanței. Prin echilibru static înțelegem că toate particulele se află în repaus. Acest rezultat este făcut plauzibil de figurile 9.9 și 9.10. Ele indică liniile de valoare egală a potențialului, liniile echipotențiale, în cazul a două sau patru mase egale (marcate prin litera M), aflate în poziții fixe. Locul în care două echipotențiale se intersectează este o poziție de echilibru. Cînd ne deplasăm din poziția de echilibru, forța este în direcția potențialului mai scăzut, adică a potențialului mai negativ. Observați că în cazul a două corpuri un corp de probă, deplasat în sus, va simți o forță îndreptată înapoi către punctul de echilibru, dar atunci cînd îl deplasăm lateral forța va fi îndreptată în sens opus revenirii la echilibru. Pentru ca echilibrul să fie stabil, forța trebuie să fie îndreptată către punctul de echilibru, indiferent de direcția deplasării. (Vezi cap. 5 din acest volum, pagina 179). Forța este invers proporțională cu distanța între echipotențiale și astfel ne-am putea aștepta ca pe măsură ce trecem de la două la patru,

FIG. 9.9. Conturul suprafețelor echipotențiale între două corpuri de mase egale.



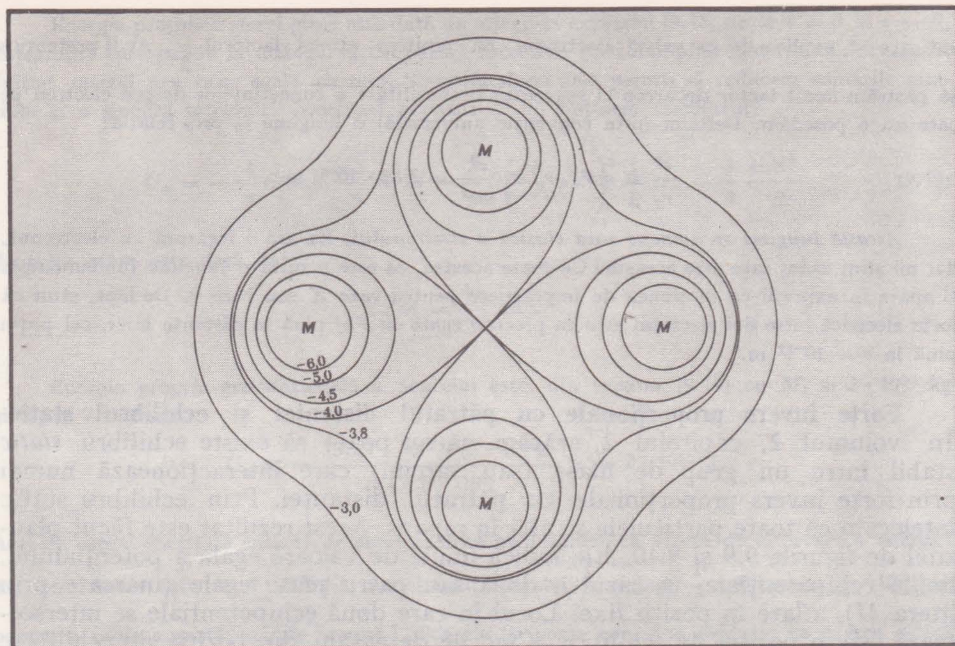


FIG. 9.10. Conturul suprafețelor echipotențiale pentru o distribuție plană de patru corpuri de mase egale. Numerele sînt complet arbitrare.

la opt, la un număr foarte mare de particule pe o sferă, forța să tindă către zero și chiar să fie îndreptată înapoi către centru. Dar după cum știm, sau cel puțin putem deduce din ecuația (9.14), forța tinde către zero și avem în acest caz o stare de echilibru indiferent.

ORBITE: ECUAȚIA ȘI EXCENTRICITATEA

Am rezolvat deja problema unui corp care descrie o orbită circulară într-un cîmp atractiv invers proporțional cu pătratul distanței. Pentru o astfel de orbită există o anumită relație între viteză și distanță. Am dedus această relație în capitolul 3 (paginile 84—88). Din punct de vedere formal, expresia $-(Mv^2/r)\hat{\mathbf{r}}$ este forța centripetă, iar semnul minus arată că ea este îndreptată către centrul cercului. Forța centripetă trebuie să fie egală cu forța $(C/r^2)\hat{\mathbf{r}}$ [ecuația (9.11)] și vedem deci că nu există orbită circulară decît dacă constanta C este negativă, adică dacă forța este atractivă. Dacă $C = -GMM_2$, atunci $v = (GM_2/r)^{1/2}$.

Care este însă forma orbitei, în cazul general? Această problemă se numește deseori *problema lui Kepler*, deoarece Kepler a descoperit că orbitele planetelor sînt elipse în cîmpul de forțe al Soarelui, care după cum a arătat ulterior Newton, este un cîmp invers proporțional cu pătratul distanței. Vom trata mai întîi cazul în care originea forței este fixată la $r = 0$. Acest caz pare simplu din punct de vedere conceptual, dar vom arăta la pagina 311

că problema reală a două corpuri poate fi redusă la această situație. Ecuația de mișcare va fi așadar:

$$M\mathbf{a} = \frac{C}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

Nu presupunem aici o mișcare circulară și lăsăm nespecificată natura forțelor invers proporționale cu pătratul distanței. Faptul important este însă acela că, dacă C este negativ, atunci forța este atractivă, iar dacă C este pozitiv, forță este repulsivă.

Ce coordonate sînt mai avantajoase? În primul rînd, de cîte coordonate avem nevoie? De trei? Nu, ci numai de două, întrucît mișcarea are loc într-un plan, planul este cel determinat de vectorul viteză și de vectorul de poziție $\mathbf{r}$ ale mobilului deoarece componentele vitezei și ale forței, perpendiculare pe acest plan, sînt nule. Așadar această componentă a vitezei va rămîne totdeauna egală cu zero. Este ușor de apreciat că coordonatele polare r și θ din figura 9.11 sînt mai convenabile decît coordonatele carteziene x și y. Cum se va scrie accelerația în funcție de aceste coordonate și de versorii $\hat{\mathbf{r}}$ și $\hat{\theta}$! Din formula (2.30), rezultă:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})\,\hat{\theta}.$$

Așadar, ecuațiile de mișcare sînt:

$$M(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{C}{r^2}\,; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mr^2\dot{\theta}) = 0.$$

A doua lege se integrează imediat și dă

$$Mr^2\dot{\theta} = J, \tag{9.21}$$

unde J este momentul cinetic definit în capitolul 6. Înlocuind $\dot{\theta}$ din prima relație prin J/Mr^2 obținem:

$$\ddot{r} - rJ^2/M^2r^4 = \ddot{r} - J^2/M^2r^3 = C/Mr^2. \tag{9.22}$$

Din păcate, această ecuație diferențială nu poate fi rezolvată direct, dar să ne reamintim că ne interesează orbite de forma $r = r(\theta)$. Eliminînd atunci pe t între ecuațiile (9.21) și (9.22), obținem:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{J}{Mr^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2}\cdot\left(\frac{J}{Mr^2}\right)^2 - \frac{2J}{Mr^3}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\frac{J}{Mr^2} = \frac{J^2}{M^2r^4}\left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right] \tag{9.23}$$

Nici această ecuație nu ne este familiară, astfel încît vom încerca să o rezolvăm folosind schimbarea de funcție:

$$w(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2.$$

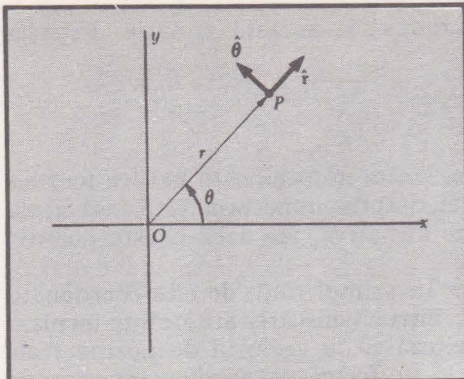


FIG. 9.11. Coordonatele polare, avantajoase pentru descrierea mișcării unui corp de masă M, aflat în punctul P sub acțiunea unei forțe centrale exercitate de către centrul de forță fix O; $\hat{r}$ și $\hat{\theta}$ sînt versorii corespunzători.

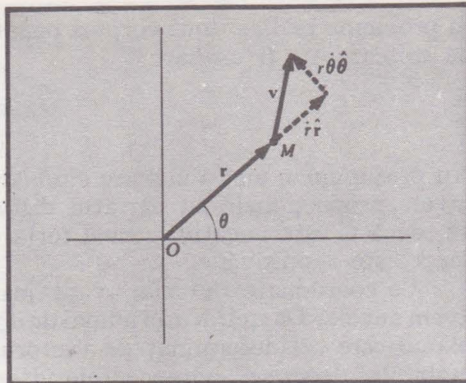


FIG. 9.12. Descompunerea vitezei particulei în componentele radială și unghiulară. Energia cinetică este $E_c = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$. Energia totală este $E = E_c + U = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2} Mr^2 \dot{\theta}^2 + U$.

Înlocuind acest rezultat în ecuația (9.23), sîntem conduși la:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{J^2}{M^2r^2}\frac{d^2w}{d\theta^2}$$

care, folosind ecuația (9.22) și înlocuind pe $\frac{1}{r}$ cu w, trece în:

$$-\frac{J^2}{M^2}\frac{d^2w}{d\theta^2} - \frac{J^2}{M^2} w = \frac{C}{M} \quad \text{sau} \quad \frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{CM}{J^2}.$$

Am întîlnit această ecuație în capitolul 7, ecuația (7.1); soluția ei este:

$$w = A\cos(\theta + \Phi) - \frac{CM}{J^2}.$$

(Folosirea cosinusului în loc de sinus este mai obișnuită în acest caz.)

Întrucît orientarea orbitei în planul (r, θ) este neesențială, luăm $\Phi = 0$ și obținem:

$$\frac{1}{r} = -\frac{CM}{J^2} + A\cos\theta. \tag{9.24}$$

E convenabil să folosim ecuația energiei pentru determinarea constantei A, deoarece energia totală, E, este ușor interpretabilă în funcție de tipul orbitei. Energia totală este (vezi fig. 9.12):

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{C}{r} = \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{C}{r} = \frac{1}{2}M\left(\frac{J^2}{M^2r^4}\right)\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] + \frac{C}{r} \tag{9.25}$$

unde pentru a obține ultima expresie am folosit ecuațiile (9.21) și (9.23). Menționăm că energia potențială $\frac{C}{r}$ este pozitivă pentru o forță repulsivă (C pozitiv) și negativă pentru o forță atractivă (C negativ). Dacă folosim acum expresia (9.24) și derivatele ei pentru a înlocui pe r și pe $\frac{dr}{d\theta}$ în formula (9.25), obținem o ecuație în care intervine doar A^2 și cîteva constante. Rezolvînd în raport cu A, rezultă:

$$A = \left(\frac{2ME}{J^2} + \frac{C^2M^2}{J^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{CM}{J^2}\left(1 + \frac{2EJ^2}{C^2M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

astfel încît forma finală a orbitei este:

$$\boxed{\frac{1}{r} = -\frac{CM}{J^2}\left[1 - \left(1 + \frac{2EJ^2}{C^2M}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta\right]} \qquad (9.26)$$

Dacă forța este atractivă, C va fi negativ, ca în cazul gravitațional, unde $C = -GMM_2$. Atunci, ecuația (9.26) devine:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM^2M_2}{J^2}\left[1 - \left(1 + \frac{2EJ^2}{G^2M^3M_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta\right].$$

Ecuația (9.26) este tocmai forma polară a ecuației unei conice (elipsă, cerc, parabolă sau hiperbolă). Vă puteți reaminti dintr-un manual de geometrie analitică sau din capitolul 2, pagina 75 că ecuația unei conice (curba care se obține prin secționarea unei suprafețe conice printr-un plan) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{se}(1 - e\cos\theta). \qquad (9.27)$$

Constanta e se numește *excentricitate*. Constanta s determină scala figurii. Cele patru tipuri de conice descrise de ecuația (9.27) sînt:

hiperbola	$e > 1$
parabola	$e = 1$
elipsa	$0 < e < 1$
cercul	$e = 0$.

Nu este greu să se determine caracteristicile principale ale orbitei din valorile lui e (vezi de asemenea fig. 9.13). Dacă $e = 0$, atunci r este constant. Dacă $0 < e < 1$, mărimea razei vectoare, r, rămîne finită, variind de la valoarea $se/(1-e)$ la valoarea $se/(1+e)$. Dacă însă $e > 1$, atunci vor exista două valori ale lui $\cos\theta$ pentru care $1-e\cos\theta$ se anulează, iar r devine infinită; obținem în acest caz o hiperbolă. Pentru parabolă ($e = 1$), r tinde la infinit doar pentru θ tinzînd la 0, iar acest lucru se întîmplă atît la valori negative cît și la valori pozitive ale unghiului θ. Din ecuațiile (9.26) și (9.27), rezultă:

$$e = \left(1 + \frac{2EJ^2}{C^2M}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (9.28)$$

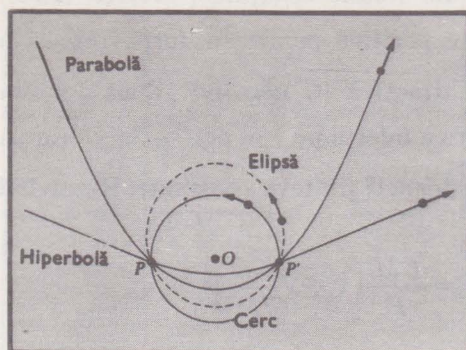


FIG. 9.13. Orbitele unor particule care au aceeaşi masă M şi acelaşi moment cinetic J, dar energii E diferite, în raport cu centrul de forţă fix O. Toate orbitele se intersectează în P şi P'.

Orbita	*Excentricitatea*
Cerc	$e = 0$ } $E < 0$
Elipsă	$e = \frac{1}{3}$ } $E < 0$
Parabolă	$e = 1$, $E = 0$
Hiperbolă	$e = 3$, $E > 0$

Din consideraţiile asupra energiei şi din formula (9.25), observăm că, pentru o forţă repulsivă, $C > 0$, E trebuie să fie pozitivă, e va fi totdeauna mai mare ca 1, iar orbita va fi o hiperbolă. Pe de altă parte, pentru o forţă atractivă $C < 0$ (în cazul gravitaţional $C = -GMM_2$, unde pentru sistemul solar M_2 este masa Soarelui), E va fi pozitivă dacă energia cinetică este mai mare decît energia potenţială, iar energia cinetică rămîne încă pozitivă la $r = \infty$; E va fi negativă dacă are loc situaţia contrară, caz în care particula nu se va putea îndepărta niciodată la infinit. Este interesant că tipul eliptic sau hiperbolic al orbitei în cazul forţei atractive este determinat numai de semnul lui E şi nu de valorile lui J. Desigur că, pe măsură ce J creşte, la o valoare dată a lui r, vor creşte şi energia cinetică şi energia totală E: dar, indiferent cît de mare este J, vor exista totdeauna orbite cu $E < 0$.

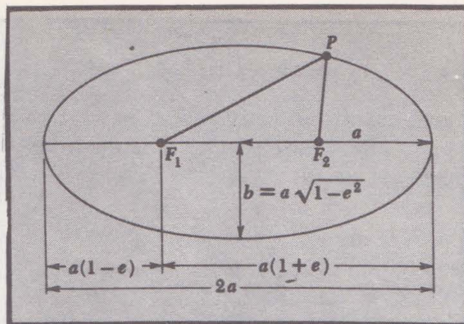
O metodă aproximativă, dar eficientă pentru a vă convinge că ecuaţia (9.27) poate descrie o curbă care să aibă alura unei elipse, constă în calcularea lui r pentru un domeniu de valori ale lui θ. Rezultatele pot fi trecute într-un grafic în coordonate polare, pe o hîrtie milimetrică specială. O astfel de hîrtie este liniată cu linii de unghi constant şi de rază constantă. În tabelul 9.1

TABELUL 9.1

θ	$\cos\theta$	$2\left(1 - \frac{1}{2}\cos\theta\right)$	
0°	1,00	1,00	1,00
20°	0,94	1,06	0,94
40°	0,77	1,23	0,81
60°	0,50	1,50	0,67
80°	0,17	1,83	0,55
90°	0,00	2,00	0,50
100°	−1,17	2,17	0,46
120°	−0,50	2,50	0,40
140°	−0,77	2,77	0,36
160°	−0,94	2,94	0,34
180°	−1,00	3,00	0,33

sînt trecute calculele aproximative obţinute din ecuaţia (9.27) pentru $s = 1$ şi $e = \frac{1}{2}$; dacă veţi trece aceste valori ale lui r în funcţie de θ pe graficul

FIG. 9.14. Proprietățile elipsei. Pentru orice punct P de pe elipsă, suma distanțelor $F_1P + F_2P = \text{const} = 2a$. Ecuația elipsei este:
$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 - e\cos\theta} \qquad 0 < e < 1.$$
Semiaxa mică este $b = a\sqrt{1-e^2}$. Aria elipsei este egală cu πab.



în coordonate polare, vă veți convinge că, curba arată ca o elipsă. Faceți calcule asemănătoare pentru $s = 1$, $e = 2$; curba obținută este o hiperbolă.

Trebuie amintită o expresie folositoare a excentricității elipsei, care se poate scrie observînd că valorile extreme ale lui r se obțin la $\theta = \pi$ și $\theta = 0$; se obține:

$$e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}. \tag{9.29}$$

Alte cîteva relații sînt date în figura 9.14.

Orbita circulară. Am pus în evidență mai sus condițiile în care se obține o orbită circulară. Să demonstrăm că ele implică relația $e = 0$. Să considerăm orbita circulară a unei planete de masă M în jurul unei stele de masă M_2. Egalînd forța centripetă cu cea gravitațională, obținem:

$$\frac{Mv^2}{r} = \frac{GMM_2}{r^2}.$$

Momentul cinetic este:

$$J = Mvr = M\sqrt{\frac{GM_2}{r}}\, r = (GM^2M_2r)^{\frac{1}{2}}$$

Energia totală este:

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{GMM_2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GMM_2}{r}$$

și astfel

$$e = \sqrt{1 + \left(-\frac{GMM_2}{r}\cdot\frac{M^2GM_2r}{G^2M^2M_2^2M}\right)} = 0.$$

Am observat că unii studenți sînt înclinați să creadă că toate orbitele închise sînt circulare. Pentru a „simți" mai bine orbitele eliptice priviți figura 9.15. În această figură vedem o familie de traiectorii ale unei particule atrase de originea O (marcată cu o cruce) cu o forță proporțională cu inversul pătratului distanței. Familia de curbe a fost astfel aleasă, încît toate traiectoriile să treacă printr-un punct P în care viteza să fie perpendiculară pe direcția OP. Diversele orbite sînt caracterizate de diverse valori ale vitezei în P.

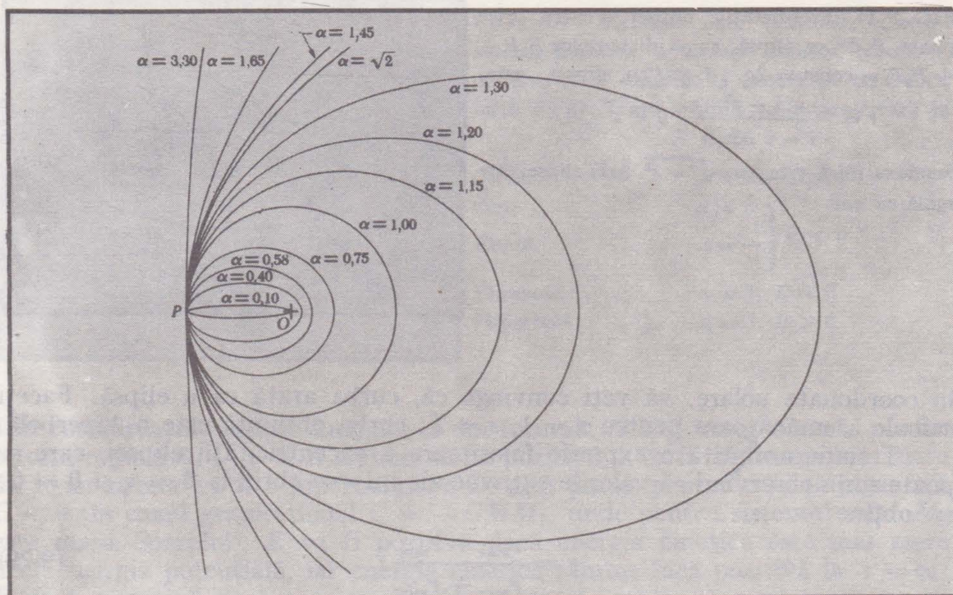


FIG. 9.15. Traiectorii care trec toate prin punctul P şi care sînt perpendiculare pe dreapta OP (O este centrul de forţă fix). Dacă v_0 este viteza pe orbita circulară, parametrul α se defineşte prin relaţia $v_P(\alpha) = \alpha v_0$. Se arată în relaţia (9.31) că $E(\alpha) = (2 - \alpha^2)E_0$.

Viteza generală v_p este scrisă convenţional ca:

$$\frac{v_P}{v_0} \equiv \alpha$$

unde v_0 este viteza pe orbita circulară centrată în O, care trece prin P. Pentru $\alpha = 1$, orbita este circulară; pentru $\alpha < \sqrt{2}$, orbita este o elipsă, pentru $\alpha = \sqrt{2}$, orbita este o parabolă, iar pentru $\alpha > \sqrt{2}$, orbita este o hiperbolă. [Aceste rezultate se obţin uşor din formula (9.31).]

Calculînd energia, se vede că tranziţia între traiectoriile închise şi deschise apare la $\alpha = \sqrt{2}$. În punctul P energia totală poate fi scrisă sub forma:

$$E = \frac{1}{2} Mv_P^2 - \frac{GMM_2}{r_0} = \frac{1}{2} M\alpha^2 v_0^2 - \frac{GMM_2}{r_0} = \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) Mv_0^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} Mv_0^2 - \frac{GMM_2}{r_0} = E_0 + \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) Mv_0^2, \qquad (9.30)$$

unde E_0 şi v_0 se referă la energia şi viteza pe orbita circulară, iar r_0 este distanţa OP. Pe orbita circulară, forţa centripetă este egală cu forţa gravitaţională:

$$\frac{Mv_0^2}{r_0} = \frac{GMM_2}{r_0^2}.$$

Folosind acest rezultat, putem scrie energia pe orbita circulară sub forma:

$$E_0 = \frac{1}{2} Mv_0^2 - \frac{GMM_2}{r_0} = \frac{1}{2} Mv_0^2 - Mv_0^2 = -\frac{1}{2} Mv_0^2.$$

iar expresia (9.30) poate fi scrisă după cum urmează:

$$E = E_0 - (\alpha^2 - 1) E_0 = (2 - \alpha^2) E_0 = (\alpha^2 - 2) |E_0|. \quad (9.31)$$

Dacă $\alpha^2 > 2$, atunci energia totală este pozitivă și orbita este deschisă. Dacă $\alpha^2 < 2$, energia totală este negativă, iar orbita este închisă: particula nu se poate îndepărta la distanță infinită. Dacă $\alpha^2 = 2$, orbita este parabolică.

Legile lui Kepler. Descoperirea de către Kepler a faptului că orbitele planetelor sînt elipse în jurul Soarelui, a fost una dintre cele mai mari descoperiri experimentale din istoria științei. Împreună cu formularea legilor empirice ale mișcării planetelor, ea a constituit prima bază experimentală a legilor newtoniene ale mecanicii și a teoriei atracției gravitaționale. În esență, Kepler și-a enunțat cele trei legi astfel:

1. Toate planetele se mișcă pe orbite eliptice, care au Soarele într-unul din focare.
2. Raza vectoare mătură arii egale în intervale de timp egale.
3. Pătratele perioadelor de revoluție ale planetelor în jurul Soarelui sînt proporționale cu cuburile semiaxelor mari ale traiectoriilor eliptice respective. (Această aserțiune este mai generală decît formularea originală a lui Kepler.)

De-a lungul întregii noastre discuții am neglijat efectele celorlalte planete asupra celei luate în considerare.

Am arătat mai sus că orbitele închise sînt eliptice. Legea a doua a lui Kepler a fost demonstrată în capitolul 6, ecuația (6.36), ca o simplă consecință a conservării momentului cinetic.

Vom deduce acum legea a treia a lui Kepler. Dacă dS este aria măturată de raza vectoare în timpul dt, atunci:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{J}{2M} = \text{const.} \quad (9.32)$$

unde J este momentul cinetic, iar M este masa. Integrînd ecuația (9.32) pe perioada T a mișcării, obținem:

$$S = \frac{JT}{2M} \quad \text{sau} \quad T = \frac{2SM}{J} = \frac{2\pi abM}{J}. \quad (9.33)$$

$S = \pi ab$ este aria elipsei de semiaxă mare a și semiaxă mică b. Relația $2a = r_{max} + r_{min}$ este o proprietate evidentă a elipsei. Folosind ecuația (9.27) avem:

$$2a = \frac{se}{1 + e} + \frac{se}{1 - e} = \frac{2se}{1 - e^2},$$

sau, împreună cu ecuațiile (9.26) și (9.27):

$$2a = \frac{2}{1 - e^2} \frac{J^2}{GM^2M_2}. \quad (9.34)$$

Ridicînd la pătrat expresia (9.33) și folosind pentru J^2 expresia (9.34), obținem:

$$T^2 = \frac{(2\pi abM)^2}{aGMM_2M(1 - e^2)} = \frac{4\pi^2ab^2M}{GMM_2(1 - e^2)} \quad (9.35)$$

Ţinînd seama de proprietatea excentricităţii e (vezi fig. 9.14)

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

formula (9.35) se reduce la:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_2} \tag{9.36}$$

Puteţi verifica egalitatea (9.36) pentru o orbită circulară.

Tabelul 9.2 dă o serie de date referitoare la orbitele planetelor mari. Înclinarea trecută în tabel este unghiul dintre planul orbitei planetei şi planul orbitei Pămîntului (ecliptica). Remarcaţi că orbita Pămîntului este aproape circulară.

TABELUL 9.2

Planeta	Semiaxa mare, UA	Perioada s	Excentricitatea	Înclinarea	Masa, în raport cu masa Soarelui
Mercur	0,387	$7,60 \times 10^6$	0,2056	7°00	$1,671 \times 10^{-7}$
Venus	0,723	$1,94 \times 10^7$	0,0068	3°24′	$2,448 \times 10^{-6}$
Pămînt	1,000	$3,16 \times 10^7$	0,0167	...	$3,003 \times 10^{-6}$
Marte	1,523	$5,94 \times 10^7$	0,0934	1°51′	$3,227 \times 10^{-7}$
Jupiter	5,202	$3,74 \times 10^8$	0,0481*	1°18′	$9,548 \times 10^{-4}$
Saturn	9,554	$9,30 \times 10^8$	0,0530*	2°29′	$2,858 \times 10^{-4}$
Uranus	19,218	$2,66 \times 10^9$	0,0482*	0°46′	$4,361 \times 10^{-5}$
Neptum	30,109	$5,20 \times 10^9$	0,0054*	1°46′	$5,192 \times 10^{-5}$
Pluton	39,60	$7,82 \times 10^9$	0,251*	17° 8′	$5,519 \times 10^{-7}$

* Excentricitatea variază în timp datorită perturbaţiilor produse de celelalte planete. Acestea sînt valorile din 1972.

O unitate astronomică (UA) de lungime se defineşte ca semisuma dintre distanţa cea mai mare şi cea mai mică a Pămîntului faţă de Soare.

$$1\ \text{UA} = 1{,}495 \cdot 10^{11}\ \text{m}.$$

Această unitate nu trebuie confundată cu parsecul. Un *parsec* este distanţa de la care unitatea astronomică este văzută sub unghiul de o secundă.

$$1\ \text{parsec} = 3{,}084 \cdot 10^{16}\ \text{m}.$$

Distanţa pînă la cea mai apropiată stea este de 1,31 parseci. Să verificăm acum legea a treia a lui Kepler pentru orbita lui Uranus şi a Pămîntului. Cubul raportului semiaxelor mari este:

$$\left(\frac{19{,}22}{1}\right)^3 \approx 71{,}0 \times 10^2.$$

Pătratul raportului perioadelor este:

$$(84{,}2)^2 = 70{,}9 \times 10^2,$$

ceea ce reprezintă o concordanţă foarte bună. (Pentru efectuarea calculelor s-a folosit riglă de calcul; studentul poate reface calculul pentru orbitele lui Mercur şi a Pămîntului.) În figura 9.16 s-a folosit o hîrtie milimetrică cu scară logaritmică pentru a trece perioadele şi semiaxele mari ale planetelor. Pe o

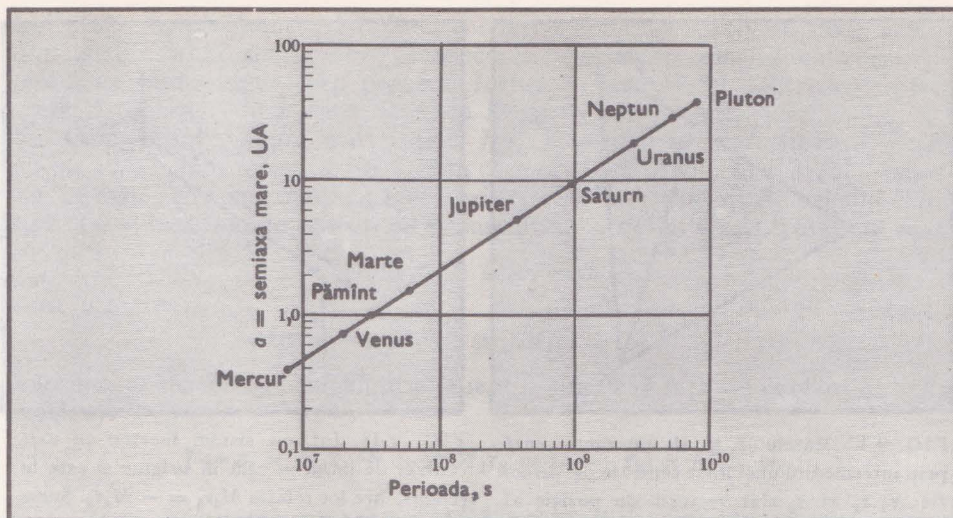


FIG. 9.16. Studiind panta acestei drepte se vede uşor că perioada T este proporţională cu $a^{3/2}$.

scală logaritmică o lege de tip putere va apărea ca o linie dreaptă. Panta acestei drepte reprezintă exponentul puterii respective. (Dovediţi acest lucru.)

Newton însuşi a verificat legea a treia a lui Kepler, folosind perioadele de revoluţie observate ale celor patru sateliţi mari ai lui Jupiter şi a găsit un acord foarte bun cu teoria.

Problema celor două corpuri: masa redusă. Am rezolvat pînă acum problema unui corp care se mişcă în cîmpul generat de un corp de masă infinită aflat în repaus şi am menţionat că soluţia problemei poate fi folosită şi atunci cînd cele două corpuri au mase comparabile, adică nici una dintre mase nu este infinită. Vom arăta cum se face acest lucru, cu ajutorul unui nou concept, acela de *masă redusă*.

Presupunem că nu există forţe externe, adică singurele forţe care acţionează sînt forţele de interacţiune reciprocă. Atunci, aşa cum s-a arătat în capitolul 6, viteza centrului de masă este constantă şi, printr-o transformare galileană corespunzătoare, o putem lua egală cu zero. (Dacă ar exista forţe externe, atunci centrul de masă ar fi accelerat şi ar trebui să raportăm soluţia noastră la acest punct aflat în mişcare accelerată.) Figura 9.17 arată vectorii folosiţi:

$$\mathbf{R}_{c.m.} = \frac{M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2}{M_1 + M_2}.$$

Menţionăm aici că forţele care acţionează asupra lui M_1 şi M_2 sînt îndreptate către centrul de masă, care se află în mod necesar pe dreapta ce uneşte cele două corpuri. Întrucît analiza noastră este valabilă pentru orice forţă centrală, vom scrie în general forţa care acţionează asupra lui M_1 şi M_2 sub forma $F(r_{12})\,\hat{\mathbf{r}}$, unde r_{12} este distanţa dintre M_1 şi M_2:

$$M_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = F(r_{12})\,\hat{\mathbf{r}}; \quad M_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -F(r_{12})\,\hat{\mathbf{r}}.$$

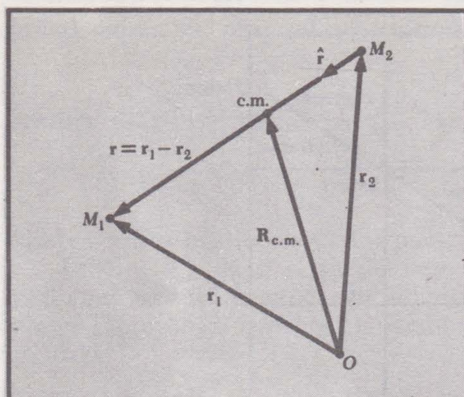


FIG. 9.17. Masele M_1 și M_2 interacționează prin intermediul unei forțe centrale de direcție; $\mathbf{r}$; $\mathbf{r}_1$ și $\mathbf{r}_2$ sînt vectorii de poziție ai corpurilor de mase M_1 și M_2, raportate la un sistem de coordonate inerțial cu originea în O. În absența forțelor externe, $\mathbf{R}_{c.m.} = \text{const}$ (vezi pagina 198).

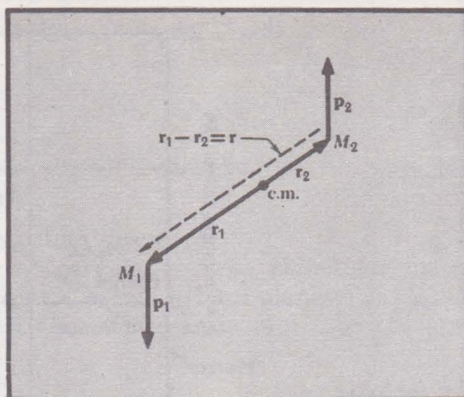


FIG. 9.18. Intr-un sistem inerțial in care centrul de masă se află în origine și este în repaus, are loc relația $M_1\mathbf{r}_1 = -M_2\mathbf{r}_2$. Suma dintre momentele cinetice ale lui M_1 și M_2 în raport cu centrul de masă este momentul cinetic total $\mathbf{J}$, care rămîne constant în timpul mișcării. Remarcați diferența dintre semnificația lui $\mathbf{r}_1$ și $\mathbf{r}_2$ în raport cu figura 9.17.

În loc să adunăm aceste două ecuații, ceea ce ar conduce la conservarea impulsului total, le vom scădea, după ce le împărțim prin masele respective:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{dt^2} = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) F(r_{12})\,\hat{\mathbf{r}}.$$

Observăm din figura 9.17 că $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ este vectorul de poziție al lui M_1 în raport cu M_2, și că $\hat{\mathbf{r}}$ este versorul lui $\mathbf{r}$. Introducînd acum *masa redusă* μ prin relația:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$$

$$\boxed{\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}} \tag{9.37}$$

obținem ecuația $\mu \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = F(r_{12})\,\hat{\mathbf{r}}$. În cazul forței gravitaționale, ecuația corespunzătoare:

$$\mu \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}, \tag{9.38}$$

a fost deja rezolvată.

Folosim ecuațiile (9.37) și (9.38) în felul următor: reamintim că $\mathbf{r}$ este vectorul de la M_2 la M_1. Cu ajutorul ecuației (9.38) putem rezolva mișcarea lui M_1 în raport cu M_2 exact *ca și cum* M_2 ar fi originea fixă a sistemului inerțial, însă cu deosebirea că folosim masa μ în locul lui M_1. Am redus astfel problema celor două corpuri M_1, M_2 la problema unui singur corp de masă μ. Menționăm însă că forța din ecuația (9.38) *nu* este $-\frac{G\mu M_2}{r^2}$! Pentru a afla

traiectoria în problema celor două corpuri trebuie să rezolvăm doar această problemă a unui singur corp. Reducerea problemei celor două corpuri la problema unui singur corp poate fi făcută în același fel pentru orice forță centrală; masa redusă va apărea de fiecare dată.

Cum definim acum constantele J și E pentru această mișcare a unui singur corp? Vom folosi figura 9.18 în care originea se află în centrul de masă, dar în care atragem atenția că vectorii $\mathbf{r}_1$ și $\mathbf{r}_2$ sînt diferiți de cei din figura 9.17. Ca și mai înainte, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ dar din însăși definiția centrului de masă,

$$M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2 = 0$$

și ca urmare:

$$M_1\mathbf{r}_1 = -M_2\mathbf{r}_2 \quad \text{și} \quad M_1\dot{\mathbf{r}}_1 = -M_2\dot{\mathbf{r}}_2.$$

Folosind ultima relație calculăm momentul cinetic $\mathbf{J}$ față de centrul de masă (origine):

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}_1 \times M_1\dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times M_2\dot{\mathbf{r}}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times M_1\dot{\mathbf{r}}_1 =$$

$$= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2}(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) = \mathbf{r} \times \mu\dot{\mathbf{r}}.$$

unde am folosit relațiile:

$$M_1\dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{M_1(M_1 + M_2)\,\dot{\mathbf{r}}_1}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}(-M_2\dot{\mathbf{r}}_2 + M_2\dot{\mathbf{r}}_1) =$$

$$= \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2}(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2). \tag{9.39}$$

Constanta moment cinetic $\mathbf{J}$ este așadar calculată presupunînd că masa redusă se mișcă în jurul masei M_2 considerată fixă.

Pentru calculul energiei E vom considera din nou centrul de masă fix și vom folosi ecuația (9.39):

$$E = \frac{1}{2}M_1\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{2}M_2\mathbf{r}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 - \frac{GM_1M_2}{r} = \frac{1}{2}\left(M_1 + M_2\frac{M_1^2}{M_2^2}\right)\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 -$$

$$-\frac{GM_1M_2}{r} = \frac{1}{2}M_1\left(\frac{M_1 + M_2}{M_2}\right)\left[\frac{M_2^2(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2)\cdot(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2)}{(M_1 + M_2)^2}\right] - \frac{GM_1M_2}{r} =$$

$$= \frac{1}{2}\mu(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2)\cdot(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) - \frac{GM_1M_2}{r} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GM_1M_2}{r} \tag{9.40}$$

așadar, putem considera din nou că masa redusă se mișcă în jurul masei M_2, considerată fixă (vezi probl. 11).

Masa redusă este mai mică decît oricare dintre masele M_1, M_2. Pentru $M_1 = M_2 = M$, rezultă:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{2}{M}, \quad \mu = \frac{1}{2}M.$$

Dacă $M_1 \ll M_2$, obținem din ecuația (9.37):

$$\mu = \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2} = M_1\frac{1}{(M_1/M_2) + 1} \approx M_1\left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right).$$

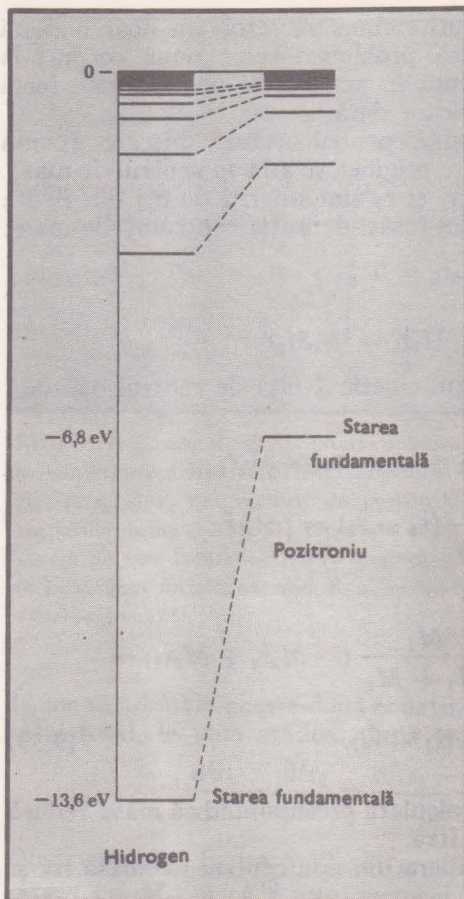
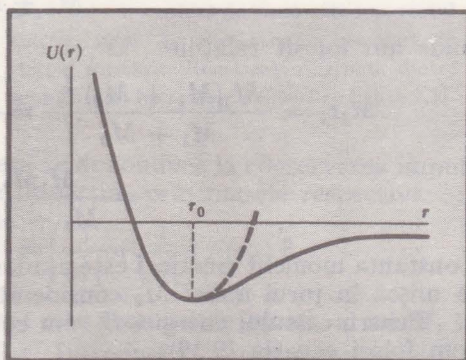


FIG. 9.19. Nivelele energetice ale atomului de hidrogen atomic şi de pozitroniu. Masa redusă a hidrogenului este $\mu = m_e / \left(1 + \frac{1}{1836}\right) \approx m_e$. Masa redusă a pozitroniului este $\mu = \frac{1}{2} m_e$. Acest fapt duce la apariţia unui factor 2 în nivelele energetice.

FIG. 9.20. Graficul energiei potenţiale ca funcţie de distanţa dintre cei doi atomi ai unei molecule. Poziţia de echilibru se află la r_0. Curba punctată reprezintă parabola corespunzătoare energiei potenţiale pătratice date de relaţia (9.42).



Am dezvoltat aici fracţia în serie, reţinînd doar termenii de ordinul întîi în M_1/M_2. Dacă M_1 este m (masa electronului), iar M_2 este M_p (masa protonului), atunci masa redusă este:

$$\mu \approx m\left(1 - \frac{1}{1836}\right).$$

Valoarea masei reduse este mai apropiată de valoarea masei celei mai mici. Diferenţa dintre μ şi m se pune uşor în evidenţă în spectrul hidrogenului atomic.

Pozitroniul este un atom hidrogenoid alcătuit dintr-un electron şi un pozitron în locul protonului. Pozitronul este o particulă care are masa egală cu cea a electronului dar sarcină pozitivă e. Pornind de la faptul că masa redusă a pozitroniului este aproximativ jumătate din masa redusă a hidrogenului atomic, ecuaţia (9.41) sugerează (ceea ce se va dovedi corect) că ar trebui să existe o similaritate între spectrele de linii ale hidrogenului atomic şi ale pozitroniului. Interacţia coulombiană dintre un electron şi un pozitron are exact aceeaşi formă ca şi cea dintre un electron şi un proton. În figura 9.19 sînt prezentate nivelele energetice ale hidrogenului atomic şi pozitroniului.

EXEMPLU

Vibrația unei molecule biatomice. Doi atomi legați într-o moleculă stabilă au o energie potențială care variază pătratic cu diferența $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ a distanței față de poziția de echilibru $\mathbf{r}_0$:

$$U(r) = \frac{1}{2} k(r - r_0)^2 \tag{9.42}$$

dacă $(r - r_0)/r_0 \ll 1$ (vezi fig. 9.20). Forța este îndreptată de-a lungul dreptei care unește cei doi atomi și (dacă molecula *nu* are mișcare de rotație) ea este dată de formula:

$$F = -\frac{dU}{d(r - r_0)} = -k(r - r_0). \tag{9.43}$$

Această forță descrie un oscilator armonic de constantă elastică k. Masele atomilor sînt M_1 și M_2. Care este frecvența vibrației?

Într-o vibrație liberă ambii atomi se mișcă, iar centrul de masă este în repaus. Ecuația de mișcare este dată evident de ecuația (9.38) unde în locul forței gravitaționale apare expresia (9.43):

$$\mu \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k(r - r_0)\,\hat{\mathbf{r}}. \tag{9.44}$$

Dacă molecula nu are mișcare de rotație, direcția lui $\hat{\mathbf{r}}$ este fixă și atunci:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2}\cdot\hat{\mathbf{r}}.$$

(Derivata lui $\mathbf{r}$ nu are această formă simplă în cazul în care $\hat{\mathbf{r}}$ variază.) Putem rescrie atunci ecuația (9.44) ca o ecuație scalară:

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r - r_0),$$

care este tocmai ecuația de mișcare a oscilatorului armonic de pulsație:

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9.45}$$

Din măsurători spectroscopice se știe că frecvențele fundamentale de vibrație ale moleculelor de acid fluorhidric (HF) și acid clorhidric (HCl) sînt:

$$\omega_0(\mathrm{HF}) = 7{,}55 \cdot 10^{14}\ \mathrm{rad/s}$$

$$\omega_0(\mathrm{HCl}) = 5{,}47 \cdot 10^{14}\ \mathrm{rad/s}.$$

Să comparăm aceste date cu constantele elastice k_{HF} și k_{HCl}. Masele reduse sînt, în unități atomice de masă:

$$\frac{1}{\mu_{\mathrm{HF}}} \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{19} = \frac{20}{19}\ ;\quad \mu_{\mathrm{HF}} \approx 0{,}950$$

$$\frac{1}{\mu_{\mathrm{HCl}}} \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{35} = \frac{36}{35}\ ;\quad \mu_{\mathrm{HCl}} \approx 0{,}973.$$

(Am folosit aici masa atomică a celui mai abundent izotop al clorului, ^{35}Cl). Observați că masele reduse sînt foarte apropiate, deoarece hidrogenul, care este cel mai ușor, preia cea mai mare parte a oscilației.

Din ecuația (9.45) rezultă:

$$\frac{k_{HF}}{k_{HCl}} = \frac{(\mu\omega_0^2)_{HF}}{(\mu\omega_0^2)_{HCl}} \approx \frac{54{,}0\times 10^{28}}{29{,}0\times 10^{28}} \approx 1{,}86$$

și constanta elastică:

$$k_{HF} \approx (54\times 10^{28})\,(1{,}66\times 10^{-27}) \approx 9{,}0\times 10^{2}\ \mathrm{N/m}.$$

Am introdus aici factorul care transformă unitatea atomică de masă în kilograme. Este rezonabilă această valoare a constantei elastice k? Să presupunem că molecula (al cărui diametru este de aproximativ $1\text{Å} = 1\cdot 10^{-10}$ m) este alungită cu 0,5Å. Lucrul mecanic necesar va fi aproximativ egal cu cel necesar pentru disocierea moleculei în atomi de hidrogen (H) și fluor (F). Din ecuația (9.42) lucrul mecanic necesar pentru îndepărtarea atomilor cu 0,5Å este de același ordin de mărime cu:

$$\frac{1}{2}\,k(r-r_0)^2 \approx \frac{1}{2}\,(9\cdot 10^2)\,(0{,}5\cdot 10^{-10})^2 \approx 1\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} \approx 6\ \mathrm{eV}.$$

Aceasta este o valoare rezonabilă pentru energia de disociere a unei molecule. În estimarea de mai sus am folosit forma pătratică a energiei potențiale [ecuația (9.42)] în afara regiunii în care ea este valabilă. Dependența reală a energiei potențiale intermoleculare de distanță, este ilustrată în figura 9.20.

PROBLEME

1. *Atracția gravitațională exercitată de o masă distribuită pe o linie infinită.* Arătați că forța gravitațională care acționează asupra unui corp de masă M_1 situat la distanța R de o distribuție liniară infinită de densitate liniară constantă ρ este $\frac{2G\rho M_1}{R}\cdot$ (Fiți atenți la direcția forței datorate unui element de linie.)

2. *Atracția gravitațională exercitată de o masă distribuită pe un segment finit.* Un corp de masă m se află la distanța x pe mediatoarea unui segment omogen de lungime $2L$ și de masă M; originea sistemului de coordonate se află la mijlocul segmentului.

(*a*) Găsiți expresia energiei potențiale a corpului de masă m dacă la $x = \infty$, $U = 0$.

R: $-\dfrac{GMm}{L}\log\dfrac{L+\sqrt{x^2+L^2}}{x}$.

(*b*) Găsiți expresia forței gravitaționale exercitată de către segment asupra

corpului de masă m. În ce direcție acționează această forță?

(c) Arătați că rezultatul de la punctul (a) se reduce la $U \approx -GMm/x$ pentru $x \gg L$.

Considerăm o sîrmă subțire de lungime 2 m și densitate liniară 0,2 kg/m.

(d) Care este valoarea forței gravitaționale exercitată de către sîrmă asupra unei mase punctiforme $m = 5 \cdot 10^{-4}$ kg aflată pe direcția sîrmei, la distanța de 3 m de centrul ei?

R: $1{,}7 \cdot 10^{-15}$ N.

(e) Care este energia potențială a unei mase punctiforme aflată în cîmpul de forțe al sîrmei, în poziția indicată la punctul (d)?

R: $-4{,}6 \cdot 10^{-15}$ J.

3. *Energia gravitațională a unui sistem de stele.* Aflați energia potențială gravitațională a unei configurații de opt stele, care au, fiecare dintre ele, masa Soarelui și sînt situate în vîrfurile unui cub cu muchia de un parsec. (Neglijați energia proprie a fiecărei stele.)

R: $2 \cdot 10^{35}$ J.

4. *Tunelul care străbate Pămîntul.* Să considerăm un tunel care trece prin centrul Pămîntului. Arătați că, dacă se neglijează rotația Pămîntului și frecarea, mișcarea unei particule prin acest tunel va fi oscilatorie armonică. Aflați perioada. Faceți o legătură între această perioadă și perioada unui satelit care se rotește aproape de suprafața Pămîntului. (Notă: rotația Pămîntului nu schimbă caracterul oscilatoriu armonic al mișcării, dar perioada este ușor modificată. Puteți arăta acest lucru? În ce sens se modifică perioada?)

5. *Mișcarea în galaxie.* Considerăm o distribuție sferică uniformă a stelelor în galaxia de masă totală M și de rază R_0. O stea de masă M_s aflată la distanța $r < R_0$ față de centru, se va mișca sub acțiunea unei forțe centrale a cărei mărime depinde de masa inclusă în sfera de rază r.

(a) Care este forța la distanța r?

R: $F = GM_sMr/R_0^3$.

(b) Care este viteza stelei dacă ea se mișcă în jurul centrului pe o orbită circulară?

R: $v = (GMr^2/R_0^3)^{\frac{1}{2}}$

6. *Traiectoria meteoritului.* Un meteorit are viteza de $7{,}0 \cdot 10^4$ m/s la periheliu, cînd distanța lui față de Soare este $5{,}0 \cdot 10^{10}$ m. Găsiți distanța și viteza la afeliu, precum și excentricitatea orbitei, folosind formulele (9.21), (9.25) și (9.28).

R: distanța $= 5{,}5 \cdot 10^{11}$ m; viteza $= 6{,}3 \cdot 10^3$ m/s; $e = 0{,}83$.

7. *Satelit terestru.* Închipuiți-vă că Luna nu ar avea masă, astfel încît ea nu ar influența orbita unui satelit. Ce viteză (perpendiculară pe raza vectoare) ar trebui să aibă un satelit aflat la 320 km deasupra Pămîntului astfel încît la capătul opus al traiectoriei sale eliptice, să se afle la aceeași distanță cu Luna (aflată la 384 000 km față de Pămînt)?

8. *Viteza de evadare.* Neglijînd frecarea, aflați viteza care trebuie imprimată unui satelit la suprafața pămîntului pentru a ajunge (cu viteză nulă) în punctul dintre Pămînt și Lună în care forța gravitațională datorată acestor aștri se anulează? Dacă el depășește acest punct, cu ce viteză va ajunge pe Lună?

R: v(de evadare) $= 1{,}1 \cdot 10^4$ m/s.

9. *Variația masei Soarelui.* Ce s-ar întîmpla cu orbita Pămîntului, presupusă circulară, dacă masa Soarelui s-ar reduce brusc la jumătate?

10. *Orbita heliului.* Presupunem că pe nivelul energetic $-13{,}6$ eV al hidrogenului,

electronul se află pe o orbită circulară.

(a) Calculați momentul cinetic

R: $1{,}1 \cdot 10^{-34}$ J · s

(b) Care ar fi raza și energia unui electron aflat pe o orbită circulară în jurul unui nucleu de heliu (sarcina $+2e$) și avînd același moment cinetic?

11. *Mișcarea orbitală a stelelor duble.* Steaua descoperită de J. S. Plaskett este una dintre cele mai masive stele cunoscute pînă în prezent. Ea este o stea dublă [1], adică este formată din două stele care interacționează gravitațional. Din studii spectroscopice se știe că:

(a) Perioada de revoluție a sistemului în jurul centrului de masă este de 14,4 zile ($1{,}2 \cdot 10^6$ s).

(b) Viteza fiecărei componente este de aproximativ 220 km/s. Întrucît ambele stele au aproape aceeași viteză (dar cu sensuri opuse), putem trage concluzia că ele sînt situate la aproape aceeași distanță de centrul de masă și deci că masele lor sînt aproape egale.

(c) Orbita este aproape circulară.

Calculați din aceste date masa redusă și distanța dintre cele două stele.

R: $\mu \approx 0{,}6 \cdot 10^{32}$ kg;

distanța $\approx 0{,}8 \cdot 10^{11}$ m.

12. *Forma mării pe un Pămînt uniform.* Un Pămînt perfect sferic este acoperit cu apă. Se presupune că atunci cînd Pămîntul se învîrtește în jurul axei sale cu viteza unghiulară ω, suprafața mării este sferoidală (ca o sferă turtită). Găsiți o expresie aproximativă pentru diferența de adîncime a mării la pol și la ecuator, presupunînd că suprafața mării este o suprafață echipotențială. (De ce este plauzibilă această presupunere?) Neglijați atracția gravitațională a mării asupra ei însăși. *Indicație*: avem nevoie de o expresie a energiei potențiale în care să intervină efectul rotației Pămîntului. Potențialul centrifugal a fost menționat în figura 6.21, *b* și în capitolul 6, problema 13:

$$U_{centrif.} = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2.$$

Întrucît $F = -\dfrac{\partial U}{\partial r}$ vedem că:

$$F_{centrif.} = \omega^2 r$$

care este tocmai forța centrifugă obișnuită (exercitată asupra unei mase egale cu unu). Reamintim că veți folosi formula pentru raze r foarte puțin mai mari decît raza Pămîntului, R_p.

Vom pune potențialul gravitațional la pol (Nord sau Sud), unde $U_{centrif.} = 0$, (deoarece r din expresia potențialului centrifugal este distanța pînă la axa de rotație), egal cu suma dintre potențialul gravitațional și $U_{centrif.}$ la ecuator. La pol suprafața liberă a mării se va afla la o distanță $R_p + D_{pol}$ de centrul Pămîntului, în timp ce la ecuator ea va fi la distanța $R_p + D_{ec.}$ (D_{pol} și $D_{ec.}$ sînt ambele mult mai mici decît R_p).

R: $(D_{ec.} - D_{pol})/R_p \approx \omega^2 R_p/2g \approx \dfrac{1}{580}$.

Aceasta se apropie de valoarea reală $\dfrac{1}{298}$.

13. *Calculul direct al forței.* Folosiți un calcul direct pentru a arăta că formula (9.14) este adevărată, mai precis, considerați elementul diferențial de forță și integrați. (*Indicație*: folosiți simetria problemei pentru a arăta că forța trebuie să fie pe direcția care unește pe M_1 cu centrul suprafeței sferice, astfel încît în integrală apare doar componenta corespunzătoare a forței.)

14. *Satelit în jurul Lunii.* Găsiți perioada unui satelit care se mișcă în jurul Lunii, luînd valorile date în tabelul de la paginile 435, 436.

[1] O analiză serioasă a problemei stelelor duble poate fi găsită în cartea lui O. Struve, B. Lynds și H. Pillans, *Astronomie elementară* (Elementary Astronomy) cap. 29, Oxford Univ. Press, New York 1959. Cel puțin jumătate din cele 50 de stele cele mai apropiate de Soare sînt stele duble sau multiple.

TEME AVANSATE

Artificiu pentru integrarea ecuației în $1/r$.

Integrarea directă a ecuației diferențiale pentru r poate fi evitată dacă se folosește o altă constantă a mișcării:

$$\varepsilon = \frac{-1}{MC}\mathbf{J}\times\mathbf{p} + \frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (9.46)$$

unde $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ = impulsul, iar C este constanta din legea forței $F = C/r^2$. Cititorul poate verifica că ε este o mărime adimensională. Pentru a arăta că ε este o constantă, va trebui să arătăm că:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0.$$

Efectuăm derivarea:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{MC}\left[\left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\times\mathbf{p}\right) + \mathbf{J}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right] + \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{1}{r^2}\mathbf{r}\frac{dr}{dt}.$$

Dar:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0; \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{C}{r^3}\mathbf{r}; \quad \mathbf{J} = M\mathbf{r}\times\mathbf{v}$$

și:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{r}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\frac{\mathbf{r}}{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}\right) = r\frac{dr}{dt}.$$

Așadar folosind formula (2.55) a dublului produs vectorial obținem:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{MC}\mathbf{J}\times\frac{C\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{1}{r^3}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} = $$

$$= \frac{(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\times\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} = $$

$$= -\frac{r^2\mathbf{v}}{r^3} + \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

Din definiția (9.46) a lui ε, rezultă:

$$\varepsilon\cdot\mathbf{r} = \varepsilon r\cos\theta = -\frac{1}{MC}(\mathbf{J}\times\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) + r$$

sau:

$$r(1-\varepsilon\cos\theta) = -\frac{\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}}{MC} = -\frac{J^2}{MC}$$

unde am folosit faptul că:

$$\mathbf{J}\times\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{p}\times\mathbf{r} = -\mathbf{J}\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p} = -\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$$

sau:

$$\frac{1}{r} = -\frac{MC}{J^2}(1-\varepsilon\cos\theta),$$

care este tocmai ecuația (9.24).

Vedem că vectorul ε are mărimea egală cu excentricitatea și direcția $\theta = 0$, a semiaxei mari a elipsei (sau a axei hiperbolei); desigur ε poate fi calculat, ca și mai înainte, din ecuația energiei.

LECTURI SUPLIMENTARE

Fizica PSSC (PSSC Physics), cap. 21 D. C. Heath and Company, Boston, 1965.

Curs de Fizică HPP (HPP „Project Physics Course"), capitolele 5—8, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970. Dă o bună prezentare elementară a aspectelor istorice și a mișcării planetelor.

P. van de Kamp. *Elemente de mecanică cerească.* („Elements of Astromechanics").

W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1964. Ediție broșată; subiecte elementare, alese, de mecanică cerească.

O. Struve, B. Lynds și H. Pillans, *Astronomie elementară* („Elementary Astronomy"), Oxford Univ. Press, New York, 1959. Evidențiază ideile principale ale fizicii în legătură cu Universul; excelentă.

T. S. Kuhn, *Revoluția lui Copernic* („The Copernican Revolution"), Vintage Books (ediție broșată) Random House, Inc., New York, 1962.

Asociația Americană a profesorilor de fizică (American Association of Physics Teachers), retipăriri alese, *Cinematica și dinamica orbitelor sateliților* („Kinematics and Dynamics of Satellite Orbits"), American Institute of Physics, New York, 1963.

Arthur Koestler, *Cumpăna apelor; o biografie a lui Johannes Kepler* („The Watershed: A Biography of Johannes Kepler"), Anchor Books, Doubleday and Company, Inc., Garden City, N. Y., 1960. O prezentare fascinantă a efortului intelectual și spiritual al lui Kepler de a găsi o descriere corectă a orbitelor planetelor.

10

Viteza luminii

Cuprins

c — O CONSTANTĂ NATURALĂ FUNDAMENTALĂ

Viteza luminii [1] în vid c, este una dintre constantele fundamentale ale fizicii. Iată cîteva caracteristici ale sale:

1. Ea este viteza tuturor undelor electromagnetice în vid, independent de frecvență.
2. Nici un semnal nu poate fi transmis printr-un mijloc oarecare, în vid sau în orice alt mediu, cu o viteză mai mare decît viteza luminii, c.
3. Viteza luminii în vid nu depinde de sistemul de referință din care este observată. Dacă viteza unui semnal luminos este egală într-un sistem galilean cu $c = 2{,}99793 \cdot 10^8$ m/s, ea va avea exact aceeași valoare și într-un sistem galilean care se mișcă cu viteza V în raport cu primul (valoarea ei nu va fi $c + V$ sau $c - V$).
4. Viteza luminii apare în ecuațiile lui Maxwell din teoria electromagnetismului și în expresia forței Lorentz. Faptul este evident atunci cînd expresiile sînt scrise în sistemul de unități Gauss.
5. Constanta adimensională (numită și constanta reciprocă sau constanta structurii fine)

$$\frac{\hbar c}{e^2} \approx 137{,}04$$

conține și ea viteza luminii. $2\pi\hbar$ este constanta lui Planck, iar e este sarcina protonului. Această constantă joacă un rol important în fizica atomică și va fi discutată în volumul 4. Nu există nici o teorie care să prezică valoarea constantei structurii fine.

Acest capitol este dedicat în mod special experiențelor și rezultatelor experimentale. Vom discuta măsurarea vitezei luminii și dovada experimentală a invarianței vitezei luminii în raport cu viteza de deplasare a oricărui sistem de referință inerțial. Vom include în volumul 3 problemele privind natura electromagnetică a luminii, precum și propagarea luminii în medii refractive și dispersive, ca solidele și lichide. (Un mediu refractiv este un mediu în care indicele de refracție, definit ca raportul dintre viteza luminii în vid și cea în mediu, nu este egal cu unu. Un mediu dispersiv este un mediu în care indicele de refracție depinde de frecvență.)

---

[1] Menționăm că prin viteza luminii înțelegem totdeauna (cu excepția mențiunii contrare și explicite) viteza luminii în vid (c). Viteza luminii în orice alt mediu este mai mică decît c și poate fi chiar mai mică decît viteza de deplasare a unei particule încărcate în același mediu (efectul Cerenkov).

MĂSURĂTORI ALE LUI c

S-au folosit multe metode pentru determinarea vitezei luminii [1]. În cele ce urmează vom enumera şi vom schiţa cîteva dintre aceste metode.

Timpul în care lumina străbate orbita Pămîntului. Cu cîteva secole înainte de a fi fost experimental dovedit, se credea că viteza luminii trebuie să fie finită. Prima dovadă experimentală a faptului că viteza luminii este finită a fost făcută de către Roemer în 1676. El a observat că mişcarea lui Io, cel mai apropiat satelit al lui Jupiter, nu se desfăşoară conform unui calendar perfect regulat. Există o uşoară variaţie a perioadelor eclipselor lui Io, datorate lui Jupiter. Cînd la un anumit moment al anului (vezi fig. 10.1) el a prezis momentul unei eclipse ce urma să aibă loc şase luni mai tîrziu (vezi fig. 10.2), el a găsit o eroare de 22 minute. Roemer a postulat că această

FIG. 10.1. Eclipsa satelitului lui Jupiter, *I*, are loc atunci cînd *I*, observat de pe Pămînt, dispare în spatele lui *J*. Timpul real de observaţie pe Pămînt este decalat cu L/c din cauza vitezei finite de propagare a luminii. Perioada lui *I* este de aproape 42 h.

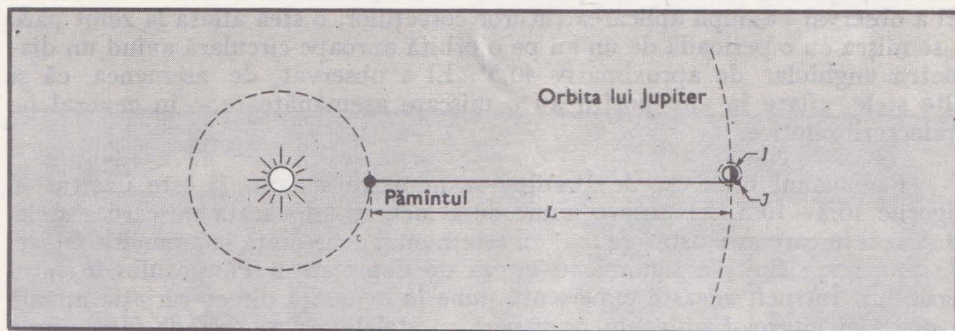
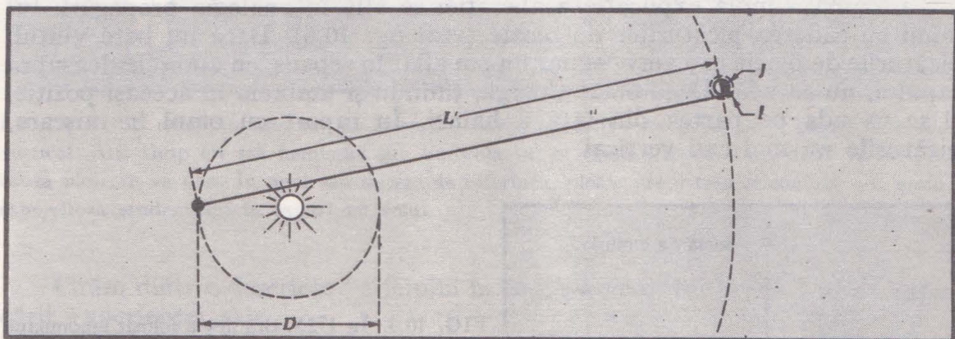


FIG. 10.2. Şase luni mai tîrziu, Pămîntul a parcurs o jumătate a orbitei sale, dar Jupiter s-a deplasat doar cu 15°. Eclipsa este observată acum cu o întîrziere egală cu L'/c unde $L' \approx L + D$.



[1] O excelentă trecere în revistă (în limba engleză) a măsurătorilor vitezei luminii este dată de către E. Bergstrand în „Handbuch der Physik", S. Flügge (ed.), vol. 24, pag. 1–43 (Springer-Verlag OHG, Berlin, 1956). Valorile citate ale lui *c* sînt cele date de Bergstrand. Vezi, de asemenea, J. F. Mulligan şi D. F. Mc Donald, Am. J. Phys. 25: 180 (1957).

diferență provine din timpul în care lumina străbate orbita Pămîntului. Cea mai bună evaluare pe care a obținut-o el asupra diametrului orbitei terestre era $2,83 \cdot 10^{11}$ m și astfel a calculat viteza luminii:

$$c = \frac{2,83 \cdot 10^{11}}{22 \cdot 60} = 2,14 \cdot 10^{8} \text{ m/s}.$$

Ținînd seama de epocă, concordanța cu valoarea reală de $3,0 \cdot 10^{8}$ m/s este satisfăcătoare. Mișcarea de rotație a lui Jupiter în jurul Soarelui este mai lentă (12 ani) decît cea a Pămîntului (1 an); astfel ceea ce apare în mod esențial în calcule este diametrul orbitei terestre, și nu diametrul orbitei lui Jupiter. Metoda lui Roemer nu este foarte precisă, dar ea a arătat astronomilor că, pentru a găsi adevărata mișcare a planetelor sau Lunii din analiza observațiilor asupra mișcării planetelor, este necesar să se țină seama de timpul de propagare a semnalului luminos.

Aberația luminii. În 1725 James Bradley a început o serie interesantă de observații precise ale mișcării aparente a stelei γ Draconis în decursul unui an. El a observat că după aplicarea tuturor corecțiilor, o stea aflată la zenit pare a se mișca cu o perioadă de un an pe o orbită aproape circulară avînd un diametru unghiular de aproximativ 40,5″. El a observat, de asemenea, că și alte stele, aflate în alte poziții aù o mișcare asemănătoare — în general pe traiectorii eliptice.

Fenomenul observat de Bradley se numește *aberație* și este ilustrat în figurile 10.3—10.5. El nu are nimic de a face cu adevărata mișcare a stelei (în cazul în care ar exista vreuna), ci este numai consecința compunerii vitezei de propagare finite a luminii cu viteza de deplasare a Pămîntului în jurul Soarelui. Întrucît această experiență pune în evidență direct variația anuală a direcției vitezei Pămîntului în raport cu stelele, ea a fost de fapt prima experiență care a arătat că Soarele este un sistem inerțial mai bun decît Pămîntul — adică, e mai bine să se considere că Pămîntul se mișcă în jurul Soarelui decît invers.

Cea mai simplă explicație a aberației se află în analogia propagării luminii cu căderea picăturilor de ploaie (vezi fig. 10.6). Dacă nu bate vîntul, picăturile de ploaie cad vertical, iar un om aflat în repaus, cu umbrela deasupra capului, nu se udă. Dacă omul aleargă, ținîndu-și umbrela în aceeași poziție, el se va uda pe partea din față a hainei. În raport cu omul în mișcare, picăturile nu mai cad vertical.

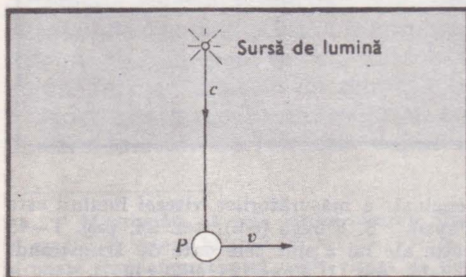


FIG. 10.3. În 1725, Bradley a folosit fenomenul de aberație pentru a determina viteza luminii c. Presupunem că lumina care vine de la o sursă îndepărtată luminează obiectul P, care are viteza v, perpendiculară pe direcția luminii incidente.

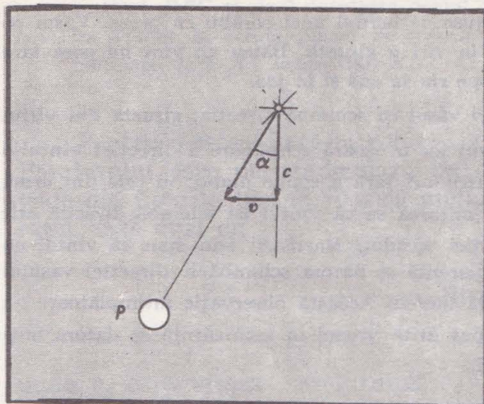


FIG. 10.4. Pentru un observator de pe Pămînt lumina are componenta orizontală v și componenta verticală c. Astfel, raza de lumină incidentă este înclinată sub unghiul α, unde $tg\,\alpha = v/c$.

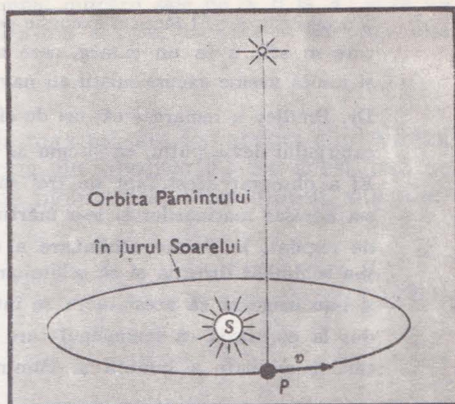


FIG. 10.5. Cunoscînd viteza Pămîntului (v_p 30 km/s), Bradley a folosit lumina care vine de la o stea îndepărtată aflată la zenit, pentru a determina pe c din măsurarea lui α; $tg\,\alpha = v_p/c$.

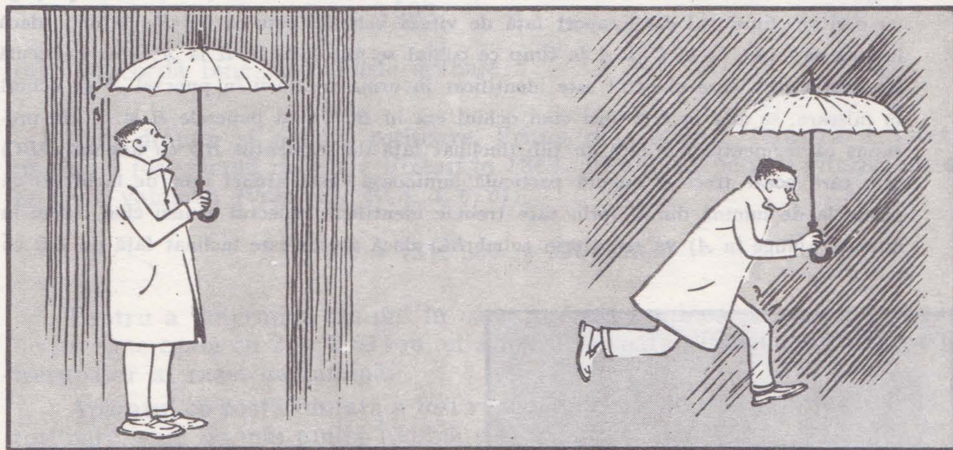


FIG. 10.6. Un exemplu familiar de aberație. Acest student este prins de o ploaie care cade vertical. Atît timp cît stă nemișcat sub umbrela sa, el rămîne uscat. Dar, dacă va fugi, din cauza ploii, se va uda. În noul său sistem de referință, ploaia are viteza orizontală $-v$, unde v este viteza studentului în raport cu solul.

Cităm dintr-o descriere [1] a felului în care i-a venit lui Bradley ideea explicării experienței sale:

În cele din urmă, cînd pierduse nădejdea că va fi în stare să explice fenomenele pe care le observase, o explicație satisfăcătoare îi apăru dintr-o dată, tocmai cînd renunțase

[1] T. Thomson, Istoria Societății Regale, (History of the Royal Society), p. 346, London, 1812.

a o mai căuta.[1] El făcea o excursie pe Tamisa, la bordul unei corăbii cu pînze. Vasul pe care se afla avea un catarg, care avea în vîrf o giruetă. Bătea un vînt nu prea tare şi multă vreme excursioniştii au navigat pe rîu în sus şi în jos.

Dr. Bradley a remarcat că, ori de cîte ori vasul îşi schimbă direcţia, girueta din vîrful catargului devia puţin, ca şi cum ar fi avut loc o uşoară schimbare a direcţiei vîntului El a observat acest fapt de trei sau patru ori fără a spune nimic; în cele din urmă s-a adresat marinarilor şi le-a mărturisit mirarea sa că vîntul îşi schimbă direcţia atît de regulat, la fiecare schimbare a direcţiei vasului. Marinarii i-au spus că vîntul nu şi-a schimbat direcţia şi că schimbarea aparentă se datora schimbării direcţiei vasului şi l-au asigurat că acest lucru se întîmplă mereu. Această observaţie întîmplătoare l-a dus la concluzia că fenomenul care l-a pus atîta vreme în încurcătură se datora mişcării combinate a luminii şi Pămîntului.

Iată explicarea aberaţiei dată de însuşi Bradley[2]

Am considerat problema în felul următor. Am presupus că *CA* (vezi fig. 10.7) este o rază de lumină, care cade perpendicular pe segmentul *BD*; atunci, dacă ochiul se află în repaus în *A*, obiectul trebuie să apară în direcţia *A*, indiferent dacă lumina se propagă instantaneu sau nu. Dacă însă ochiul se mişcă de la *B* la *A* şi lumina se propagă cu o viteză finită, al cărei raport faţă de viteza ochiului este ca *CA*/*BA*, atunci dacă lumina se mişcă de la *C* la *A* în timp ce ochiul se mişcă de la *B* la *A*, acea particulă luminoasă prin care obiectul este identificat în urma întîlnirii în punctul *A* cu ochiul în mişcare, se afla în *C* atunci cînd ochiul era în *B*. Unind punctele *B* şi *C*, am presupus că segmentul *CB* este un tub (înclinat faţă de segmentul *BD* cu unghiul *DBC*) prin care poate trece o singură particulă luminoasă; este atunci uşor de închipuit că particula de lumină din *C* (prin care trebuie identificat obiectul atunci cînd ochiul în mişcare ajunge în *A*) va trece prin tubul *BC* dacă acesta este înclinat faţă de *BD* cu

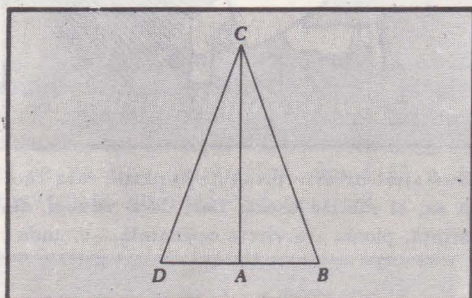


FIG. 10.7. Diagrama vitezelor folosită de către Bradley.

[1] Multe invenţii şi descoperiri au fost făcute atunci cînd, după un eşec iniţial, omul de ştiinţă părăsise problema. Un distins matematician discută acest aspect într-o fascinantă şi importantă cărticică: J. Hadamard, „Un eseu asupra psihologiei invenţiei în matematică" (An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field), Princeton University Press, Princeton N.J., 1945, retipărită la Dover Publications, Inc., New York, 1954.

[2] J. Bradley, Phil. Trans. Roy. Soc., London, *35*: 637 (1728).

unghiul DBC şi dacă însoţeşte ochiul în timpul mişcării sale de la B la A; şi că nu va ajunge la ochiul plasat în spatele unui astfel de tub, dacă acesta are orice altă înclinare faţă de segmentul BD.

Pentru o stea aflată la zenit, aberaţia maximă are loc atunci cînd viteza Pămîntului este perpendiculară pe direcţia de observaţie. În acest caz se vede din figurile 10.4 şi 10.5 că unghiul de înclinare al telescopului, sau aberaţia, este egal cu

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_p}{c} \tag{10.1}$$

unde v_p este viteza Pămîntului.

Viteza orbitală a Pămîntului în jurul Soarelui este de $3{,}0 \cdot 10^4$ m/s; viteza de rotaţie a Pămîntului în jurul axei sale, care este de circa 100 ori mai mică, poate fi neglijată. Unghiul din formula (10.1) va fi jumătate din valoarea diametrului unghiular de 40,5″, observat de către Bradley. Luînd $\alpha = 20''$ şi calculînd pe c din expresia (10.1) obţinem pentru c valoarea (cu $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$):

$$c = \frac{v_p}{\alpha} = \frac{3 \cdot 10^4}{\dfrac{20}{3\,600} \cdot 1/57{,}3} = 3{,}1 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

care concordă bine cu valorile actuale.

Roţi dinţate şi oglinzi rotitoare. Prima determinare terestră a vitezei luminii a fost făcută de către Fizeau în 1849. El a găsit pentru viteza luminii în aer [1] valoarea (vezi fig. 10.8, *a, b, c*):

$$c = (315\,300 \pm 500) \text{ km/s}.$$

Pentru a determina timpul în care un puls luminos parcurge un drum de lungime egală cu $2 \times 8\,633$ m, el a folosit o roată dinţată rotitoare ca întrerupător al razei de lumină.

Aparatul cu roată dinţată a fost repede înlocuit cu o instalaţie cu oglindă rotitoare, care dă mai multă lumină şi o focalizare mai bună. Montajul folosit în 1850 de către Foucault este prezentat în figurile 10.9, *a, b, c*. Cea mai bună valoare a vitezei luminii obţinută de el cu acest aparat (1862) a fost

$$c = (298\,000 \pm 500) \text{ km/s}.$$

Un montaj îmbunătăţit cu oglindă rotitoare a fost folosit de către Michelson (1927) pe o distanţă de aproximativ 35,5 km între muntele Wilson şi muntele San Antonio în California. Montajul său are sursa luminoasă într-unul dintre focarele lentilei şi dă un fascicul paralel pe distanţă mare. El a găsit valoarea

$$c = (299\,796 \pm 4) \text{ km/s}.$$

[1] Viteza luminii în vid este cu circa 91 km/s mai mare decît în aer.

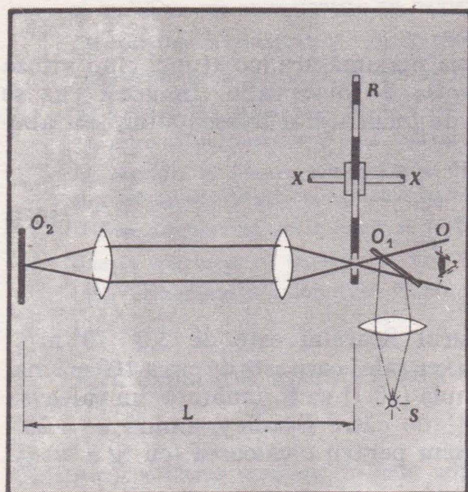


FIG. 10.8, (*a*). Aparatul cu roată dințată al lui Fizeau, 1849. Lumina care vine de la o sursă punctiformă *S*, este reflectată de o oglindă semiargintată O_1 și străbate roata dințată *R* care se rotește în jurul axei $X-X$. Apoi lumina ajunge la oglinda O_2 și se reîntoarce la observatorul *O* prin *R* și O_1. O oglindă semiargintată reflectă jumătate din lumina incidentă și transmite cealaltă jumătate.

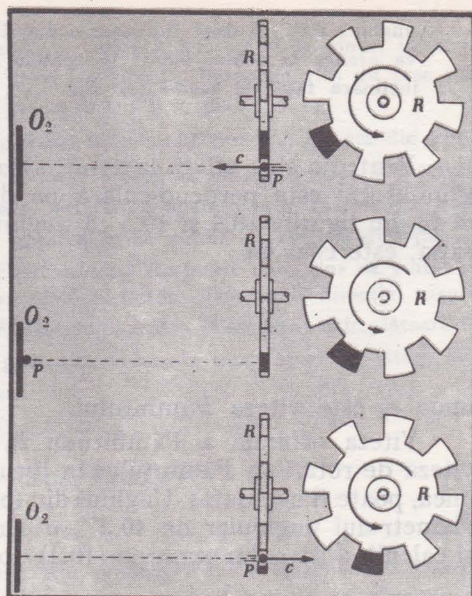


FIG. 10.8, (*b*). Pentru ca pulsul luminos *P*, avînd viteza *c*, să fie transmis observatorului, el trebuie să ajungă la oglinda O_2 și să se reîntoarcă la roata dințată *R* (distanță totală $2L$) în timpul în care un dinte ocupă locul în care se aflase cel anterior. Fizeau a determinat viteza *c* din lungimea *L* și din viteza unghiulară a roții *R*.

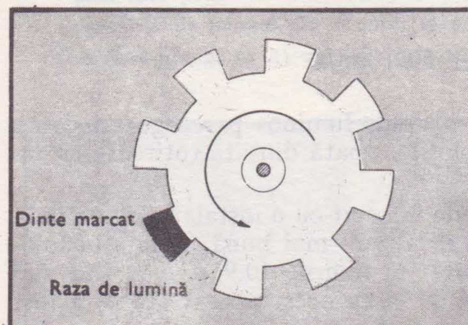


FIG. 10.8, (*c*). Vederea razei luminoase și a roții dințate *R* de către observatorul *O*. Rotirea lui *R* fragmentează raza de lumină care vine de la *S* și O_1 în pulsuri scurte. (Lumina poate trece de la O_1 la O_2 doar dacă nu este obturată de un dinte.)

Acest rezultat depășește cu mult în precizie, toate celelalte rezultate anterioare. (Detalii suplimentare sînt date în probl. 3.)

Cavitatea rezonantă. Frecvențele la care o cavitate rezonantă de dimensiuni date (o cutie de metal) conține un anumit număr de semilungimi de undă electromagnetică, pot fi determinate cu mare precizie. Viteza luminii se calculează atunci cu ajutorul relației teoretice:

$$c = \lambda\nu \qquad (10.2)$$

care leagă lungimea de undă λ de frecvența ν. De obicei în cavitate se face vid.

Este necesară o corecție a dimensiunilor interioare ale cavității datorată micii penetrații [1] a cîmpului electromagnetic în interiorul metalului.

Folosind frecvențele de $5{,}96 \cdot 10^9$, $9 \cdot 10^9$ și $9{,}5 \cdot 10^9$ Hz, Essen (1950) a obținut valoarea:

$$c = (299\,792{,}5 \pm 1) \text{ km/s}.$$

Celula Kerr. Atunci cînd lumina polarizată trece printr-o celulă Kerr (un lichid în care prezența cîmpului electric poate influența transmisia luminii polarizate), intensitatea luminii emergente, polarizate în direcția inițială, poate fi modulată modificînd intensitatea cîmpului electric dintre plăci. Dacă se folosește aceeași frecvență pentru a modula sensibilitatea unei fotocelule care detectează lumina, atunci aparatul prezentat în figura 10.10 poate folosi la măsurarea vitezei luminii. Răspunsul detectorului D va fi maxim, dacă un flux luminos de intensitate maximă ajunge la D atunci cînd acesta are sensibilitatea maximă. Presupunînd că maximele intensității și sensibilității se ating în același timp, răspunsul maxim va apărea doar dacă timpul

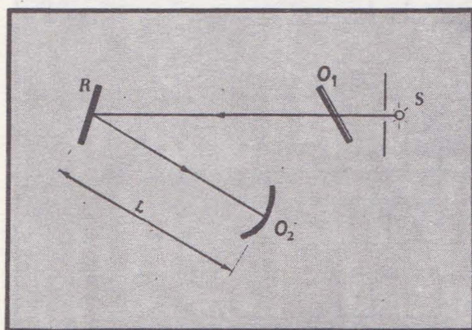


FIG. 10.9, (*a*). Aparatul cu oglindă rotitoare al lui Foucault, (1850), constă din sursa S, oglinda semiargintată O_1, oglinda rotitoare R (axa de rotație este perpendiculară pe pagină) și oglinda sferică O_2. Este desenat drumul razei de la S la O_2.

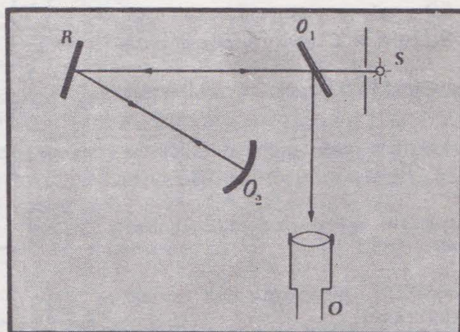


FIG. 10.9, (*b*). Cînd oglinda R stă pe loc, raza luminoasă care vine de la O_1 la R și apoi la O_2 este reflectată înapoi pe același drum și detectată de către observatorul O.

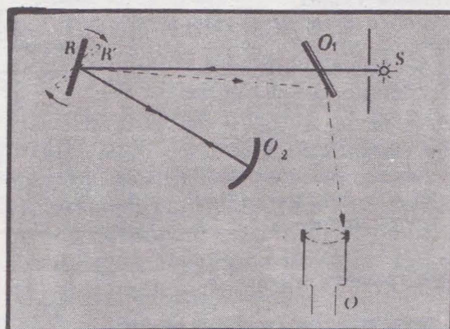


FIG. 10.9, (*c*). Cînd oglinda R se rotește, lumina care vine de la sursa S la O_2 (prin R) se întoarce cînd oglinda rotitoare se află într-o nouă poziție R'. Observatorul O vede o imagine deplasată pe oglinda O_1. Foucault a determinat viteza luminii c din lungimea L, din deplasarea imaginii și din viteza unghiulară a oglinzii.

---

[1] Regiunea de penetrație se numește *adîncime de pătrundere*. Ea este de ordinul unui micron (prescurtat μ; $1\mu = 10^{-6}$m), în grosimea cuprului la temperatura camerei și la frecvența de 10^{10} Hz. Mai trebuie făcute însă și alte corecții.

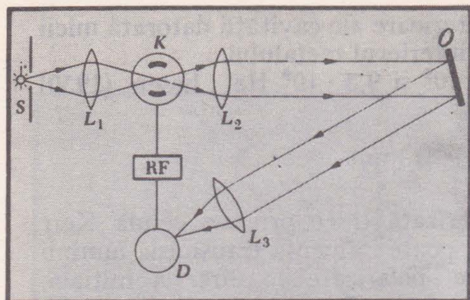
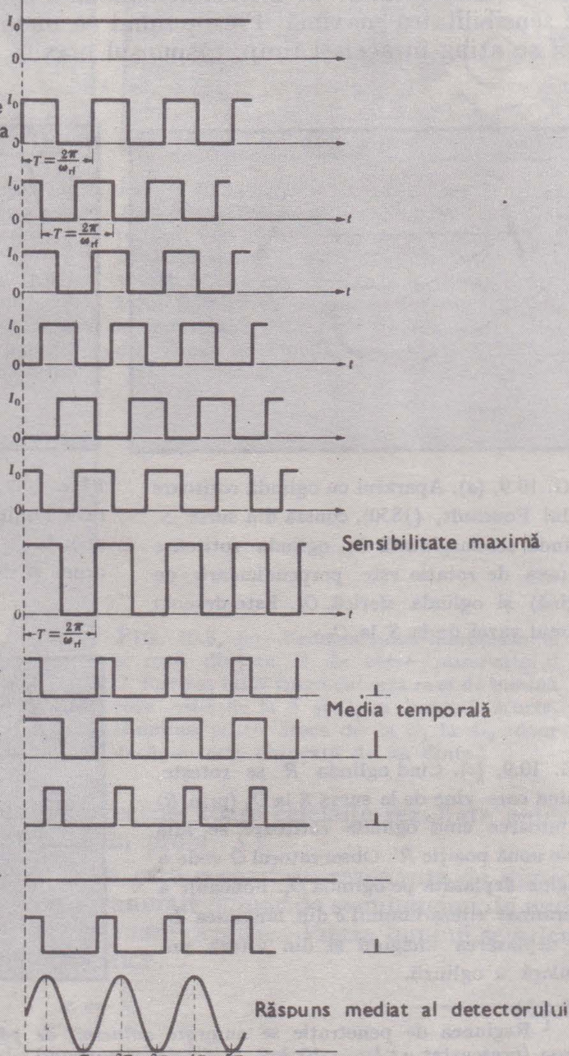


FIG. 10.10. O metodă modernă de determinare a lui c. Lumina provenită de la sursa S şi modulată în amplitudine în celula Kerr K, se îndreaptă prin lentilele L_1 şi L_2 spre oglinda O şi apoi spre fotodetectorul D. Sensibilitatea fotodetectorului şi celula Kerr sînt sincronizate cu ajutorul unei surse modulate de frecvenţă radio RF.

FIG. 10.11. Măsurătorile lui c efectuate de către Bergstrand se bazează pe metoda „detecţiei sensibile la fază" şi este asemănătoare cu experienţa descrisă în text.



Intensitatea luminii care vine de la sursă în celula Kerr este staţionară...

dar lumina care iese din celula Kerr este modulată. Timpul în care lumina parcurge distanţa KD poate fi modificat prin mişcarea oglinzii O, oglinda O poate fi plasată astfel încît lumina să ajungă în D după cum va fi ilustrat. ^{a}

Dacă îndepărtăm puţin oglinda O, lumina $_b$ ajunge mai tîrziu...

dacă îndepărtăm oglinda *mai mult*, lumina $_c$ ajunge *mai tîrziu*...

dacă îndepărtăm oglinda mai mult, lumina $_d$ ajunge mai tîrziu...

dacă îndepărtăm oglinda mai mult, lumina $_e$ ajunge mai tîrziu.

Presupunem acum că sensibilitatea detectorului este modulată ca în figură...

Detectorul răspunde doar dacă este sensibil şi dacă primeşte lumină.

Atunci în cazul a avem acest răspuns al detectorului.

Pentru cazul b lumina incidentă şi sensibilitatea detectorului sînt în fază.

Acesta este răspunsul în cazul c.

In cazul d lumina incidentă şi sensibilitatea detectorului sînt defazate cu 180°, astfel încît nu avem răspuns.

Acesta este răspunsul în cazul e.

Pe măsură ce variem în mod continuu poziţia oglinzii O, obţinem acest răspuns mediat al detectorului.

Distanţa dintre două maxime succesive ale acestei curbe corespunde unei variaţii a drumului luminii cu $2\Delta L$, datorită deplasării oglinzii O.

necesar luminii să parcurgă distanța de la celula Kerr K la oglinda O și înapoi la D, este un număr întreg N de perioade ale radiofrecvenței ν. Acest timp va fi N/ν și astfel obținem:

$$c = \frac{L\nu}{N},$$

unde L este distanța de la K la D. În experiența reală L este ordinul a 10 km. Unele detalii referitoare la această metodă sînt date în figura 10.11.

Folosind metoda de mai sus, Bergstrand a găsit pentru c valoarea:

$$c = (299\,793{,}1 \pm 0{,}3)\ \text{km/s}.$$

Remarcați că eroarea este foarte mică. Același dispozitiv este folosit (împreună cu o valoare etalon pentru c) pentru a determina lungimile geodezice pe distanțe pînă la 40 km; în astfel de aplicații, aparatul este cunoscut sub numele de *geodimetru*.

În ultima sută de ani, au fost făcute sute de măsurători ale lui c, cu aceste metode sau cu circa douăsprezece alte metode. Valoarea admisă în prezent este:

$$c = (2{,}977\,925 \pm 0{,}000\,001) \cdot 10^8\ \text{m/s}. \tag{10.3}$$

Acest rezultat este o coroborare a celor mai fiabile măsurători recente făcute prin diferite metode, în care au fost folosite unde electromagnetice cu frecvențe de la 10^8 Hz (unde radio) pînă la 10^{22} Hz (raze γ). Precizia obținută la frecvențe înalte nu este atît de mare ca cea obținută la frecvențe radio sau optice, dar nu există nici un motiv să credem că c variază cu frecvența radiației.

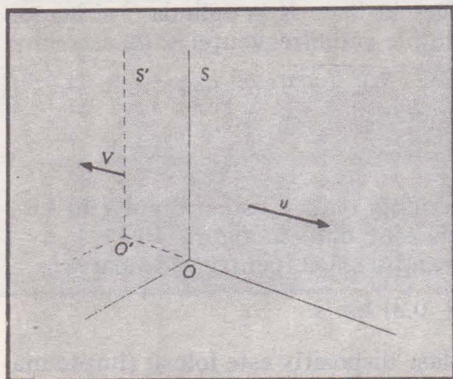
VITEZA LUMINII ÎN SISTEME INERȚIALE AFLATE ÎN MIȘCARE RELATIVĂ

O aplicație directă a transformării galileene la problema observatorului în mișcare conduce la concluzia că în sistemul de referință al observatorului viteza luminii diferă de c. Într-adevăr, bunul simț ne spune că viteza luminii în raport cu observatorul în mișcare, c_0, este:

$$c_0 = c \pm V \tag{10.4}$$

unde V este viteza observatorului presupus în mișcare înspre (+) și dinspre (—) sursă. Acest mod de adunare a vitezelor pare perfect rezonabil și el este prezentat în figurile 10.12, *a* și *b*. Aceeași relație trebuie să fie valabilă și atunci cînd sursa și observatorul sînt în repaus, iar mediul se mișcă cu viteza V. Relația (10.4) este verificată aparent în nenumărate experiențe de zi cu zi, cel puțin în măsura în care nu este implicată propagarea luminii. Ea este valabilă, de exemplu, pentru viteza sunetului, dacă prin c înțelegem viteza sunetului. Dar ea *nu este adevărată*, nici măcar aproximativ, pentru undele luminoase în vid. Experiența arată (după cum se vede în figurile 10.12, *c* și *d*) că:

$$c_0 = c \tag{10.5}$$



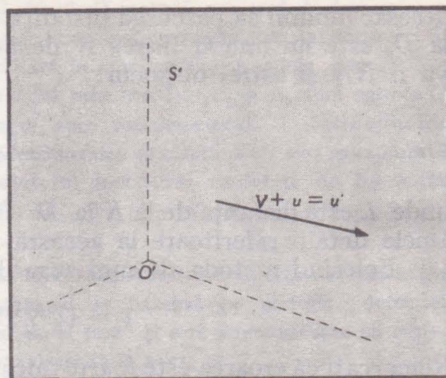
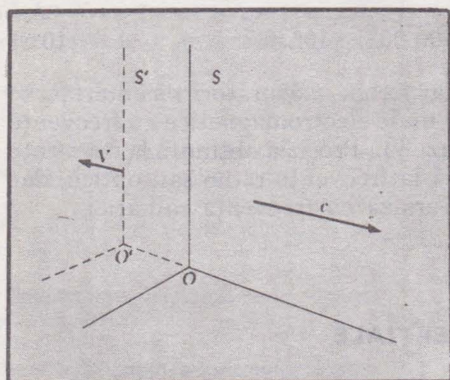
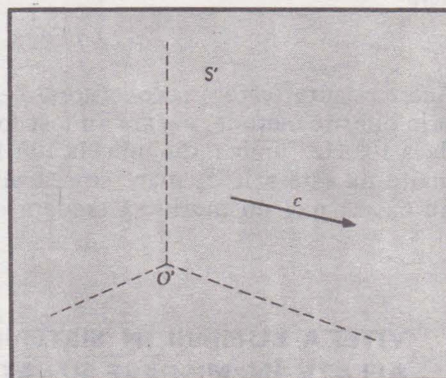


FIG. 10.12. Compunerea vitezelor prezisă de transformarea galileiană (*a*, *b*) şi cea observată de fapt în cazul luminii (*c*, *d*).
(*a*) Dacă u este o viteză terestră uzuală, observată în sistemul inerţial *S*,

(*b*) transformarea galileiană ne spune că în sistemul inerţial *S'* vom observa viteza $u' = V + u$.





(*c*) Totuşi, experienţele arată că dacă un obiect are în sistemul *S* viteza c,

(*d*) el are tot viteza c şi în sistemul *S'*.

pentru orice sistem de referinţă, *independent de viteza lui* şi de viteza relativă în raport cu un eventual mediu de propagare. Acest fapt dovedit stă la baza formulării relativiste a legilor fizice.

Vom examina acum baza experimentală a relaţiei (10.5). Există multe tipuri de experienţe care servesc la fundamentarea teoriei restrînse a relativităţii; cele care conduc la relaţia (10.5) reprezintă un punct de plecare convenabil. Vom considera o serie de experienţe care arată că viteza luminii este independentă de viteza orbitală a Pămîntului ($3 \cdot 10^4$ m/s).

Să presupunem mai întîi, aşa cum au făcut fizicienii din secolul trecut, că lumina se propagă ca o oscilaţie printr-un mediu la fel cum şi sunetul se propagă ca o oscilaţie a atomilor dintr-un lichid, solid sau gaz. Mediul transparent prin care lumina se propagă în spaţiu a fost numit *eter*.

Ce este eterul? Astăzi eterul este doar un alt cuvînt pentru spaţiul vid (vacuum). Dar Maxwell şi mulţi alţii nu şi-au putut imagina cîmpul ca o entitate care să se propage în spaţiu şi al cărei suport să fie ea însăşi. Maxwell argumenta astfel:

Dar în toate aceste teorii apare în mod natural întrebarea: dacă ceva este transmis de la o particulă la alta, aflată la o anumită distanţă, ce devine acel ceva după ce a

părăsit prima particulă și pînă ajunge la a doua? Dacă acest ceva este energia potențială a celor două particule, ca în teoria lui Neumann, cum ne putem oare închipui existența acestei energii într-un punct al spațiului, care nu coincide nici cu prima particulă nici cu cealaltă? În adevăr, ori de cîte ori se transmite energie de la un corp la altul, trebuie să existe un mediu sau o substanță în care se află energia după ce a părăsit primul corp și înainte de a-l fi atins pe celălalt, pentru că, după cum remarca Torricelli, „energia este o chintesență de o natură atît de subtilă încît ea nu poate fi conținută în nici un vas cu excepția substanței intrinseci a lucrurilor materiale". Așadar, toate aceste teorii sugerează conceperea unui mediu în care să aibă loc propagarea, și dacă, prin ipoteză, admitem existența unui astfel de mediu, cred că el trebuie să ocupe un loc primordial în cercetările noastre, iar noi trebuie să construim un model care să cuprindă toate detaliile modurilor sale de manifestare și acesta a fost scopul meu în acest tratat.

O experiență directă simplă pentru găsirea unei eventuale dependențe a vitezei luminii de mișcarea Pămîntului, este aceea de a măsura cu precizie timpul în care un puls luminos parcurge o singură dată o distanță măsurată. Acest lucru va fi făcut separat în cele două sensuri ale direcției nord-sud și apoi ale direcției est-vest și apoi repetate peste șase luni, cînd viteza Pămîntului în jurul Soarelui are un sens opus. Datorită dezvoltării laserilor, dispunem de ceasuri suficient de precise pentru a efectua astfel de experiențe directe; factorul tehnologic limitativ este în prezent timpul de stabilire a pulsului. Un timp de 10^{-9} s introduce o eroare efectivă de $10^{-9}\, c = 0{,}3$ m în lungimea drumului. Într-o astfel de experiență, ceasurile trebuie să fie sincronizate în același loc și apoi separate lent către pozițiile lor finale.

S-au făcut multe experiențe pentru verificarea relației (10.4), adică pentru observarea *curgerii eterului* (vezi fig. 10.13). Nici una nu a putut pune în evidență o mișcare a Pămîntului prin eter; foarte importante și conceptual simple au fost experiențele lui Michelson și Morley [1].

Experiențele lui Michelson și Morley. Două trenuri de unde luminoase provenite din aceeași sursă monocromatică pot interfera constructiv sau distructiv într-un punct, în funcție de faza relativă a undelor în acel punct. Faza relativă poate fi modificată, impunînd condiția ca unul dintre trenurile de unde să parcurgă un drum mai lung decît celălalt. Michelson și Morley au construit un interferometru perfecționat, prezentat schematic în figurile 10.14 și 10.15, *a*. O rază de lumină provenită de la o sursă *s* este împărțită în două cu ajutorul unei oglinzi semi-argintate aflate în *a*. Vom continua descrierea experienței cu cuvintele și notațiile celor care au efectuat-o prima oară [2].

Fie *sa* (vezi fig. 10.15, *a*—*h*) o rază de lumină care este parțial reflectată și parțial transmisă, fasciculele respective *ab* și *ac* fiind reflectate de oglinzile *b* și *c* de-a lungul direc-

[1] Influența acestei experiențe asupra lui Einstein este discutată într-un articol interesant de către Holton, Am. J. Phys., *37*: 968 (1969).

[2] A. A. Michelson și E. W. Morley, Am. J. Sci., *34*: 333 (1887). Aceasta a fost una dintre cele mai remarcabile experiențe ale secolului XIX. Principial simplă, experiența a produs o revoluție științifică plină de consecințe. Remarcați că raportul dintre viteza orbitală a Pămîntului și viteza luminii este de cca 10^{-4}. În fragmentul reprodus am înlocuit V cu c și v cu V; remarcile suplimentare sînt puse între paranteze.

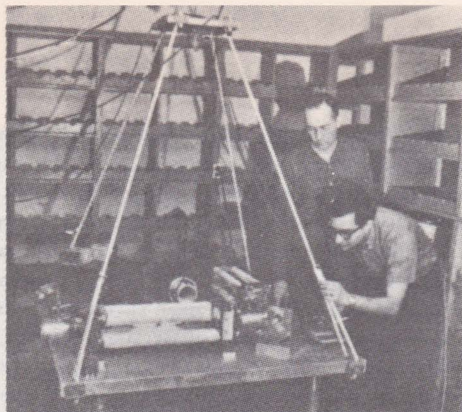


FIG. 10.13. Un aparat de precizie pentru experienţe optice relativiste, care foloseşte laseri cu gaz. Locul în care este amplasat aparatul este o veche pivniţă de vinuri în Round Hill, Mass. Experimentatorii sînt Charles H. Townes şi Ali Javan.

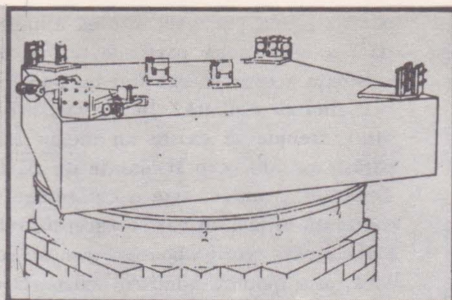


FIG. 10.14. Vedere în perspectivă a aparatului descris de către Michelson şi Morley în articolul lor din 1887.

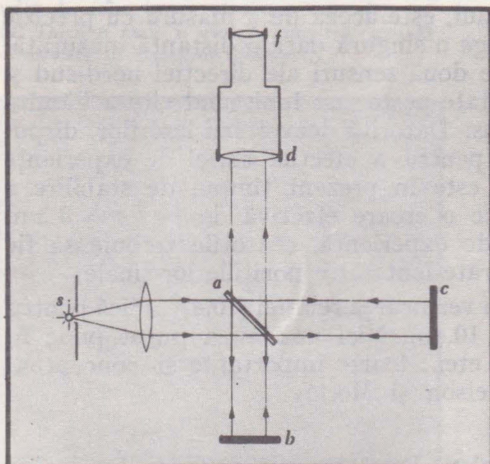


FIG. 10.15. (*a*). Interferometrul lui Michelson şi Morley constă din sursa de lumină *s*, oglinda semiargintată *a*, oglinzile *b* şi *c* şi telescopul detector *d*; focarul telescopului se află în *f*.

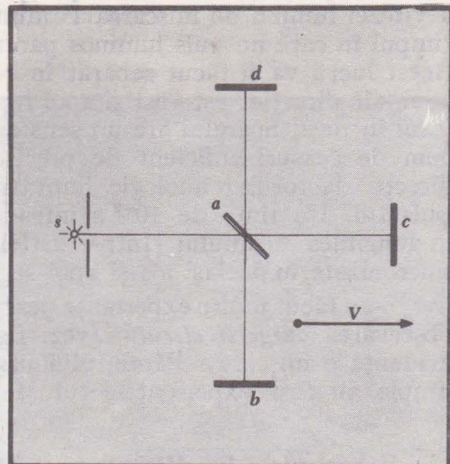


FIG. 10.15. (*b*) Dacă interferometrul nu se mişcă în raport cu eterul, în *d* va apărea o figură de interferenţă datorată diferenţei de drum dintre fasciculele *aba* şi *aca*. Dacă aparatul (şi Pămîntul) au viteza *V* în raport cu eterul ipotetic, ne aşteptăm ca figura de interferenţă din *d* să se schimbe, deoarece timpii necesari parcurgerii distanţelor *aba*, *aca*, s-au modificat cu cantităţi diferite.

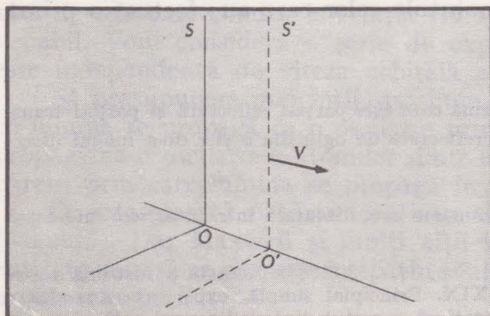


FIG. 10.15. (*c*) Pentru a vedea acest lucru, considerăm un sistem de referinţă galileian S' care se mişcă odată cu Pămîntul şi interferometrul. S este sistemul de referinţă galileian aflat în repaus faţă de eter.

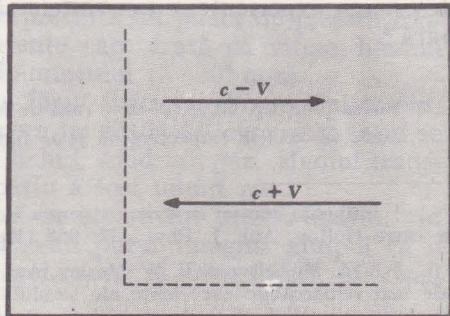


FIG. 10.15. (*d*) Conform transformării galileiene, lumina care se mişcă către dreapta are, în sistemul S', viteza $c - V$; lumina care se mişcă către stînga are, în sistemul S', viteza $c + V$.

ţiilor *ba* şi *ca*. Fasciculul *ba* este parţial transmis de-a lungul lui *ad*, iar *ca* este parţial reflectat în acelaşi sens. Dacă drumurile *ab* şi *ac* sînt egale, cele două raze interferă de-a lungul lui *ad*. Să presupunem acum, că eterul fiind în repaus, întregul aparat se mişcă în direcţia *sc* cu viteza orbitală a Pămîntului; direcţiile razelor şi distanţele parcurse de ele se vor modifica astfel: — raza *sa* va fi reflectată de-a lungul lui *ab'* [ca în fig. 10.15, *f*]; ea se va întoarce de-a lungul lui *b'a'*, (unghiul 2α fiind dublul unghiului de aberaţie), şi va intra în focarul telescopului a cărui direcţie este nemodificată. Raza transmisă are direcţia *ac'*, se întoarce în direcţia *c'a'* [ca în fig. 10.15, *e*] şi este reflectată în *a'* făcînd unghiul *c'a'd'* [neindicat în figură] egal cu $90° - \alpha$, şi coincizînd aşadar cu prima rază. Trebuie remarcat că razele *b'a'* şi *c'a'* nu se mai întîlnesc exact în acelaşi punct *a'*, deşi drumurile lor diferă abia în ordinul doi; acest fapt nu impietează asupra raţionamentului. Să calculăm acum diferenţa dintre drumurile *ab'a'* şi *ac'a'*.

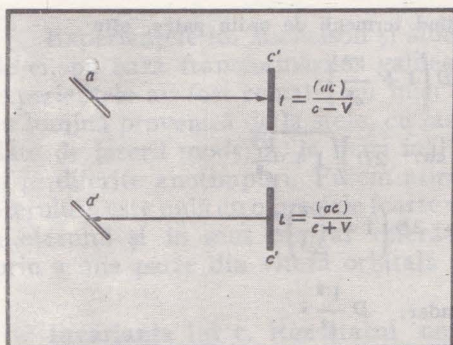


FIG. 10.15. (*e*). Aşadar timpul necesar parcurgerii distanţei de la *a* la *c'* şi înapoi la *a'* este:

$$\Delta t(ac'a') = \frac{(ac')}{c - V} + \frac{(ac')}{c + V}$$

unde (ac') este distanţa dintre *a* şi *c'*.

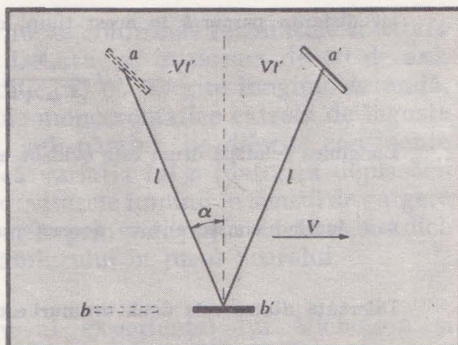


FIG. 10.15. (*f*). Care este timpul $\Delta t(ab'a') = 2t'$ necesar parcurgerii distanţei de la *a* la *b'* şi înapoi la *a'*? În sistemul de referinţă galileian *S* aflat în repaus în raport cu eterul, interferometrul are viteza *V* îndreptată spre dreapta; viteza luminii este *c*.

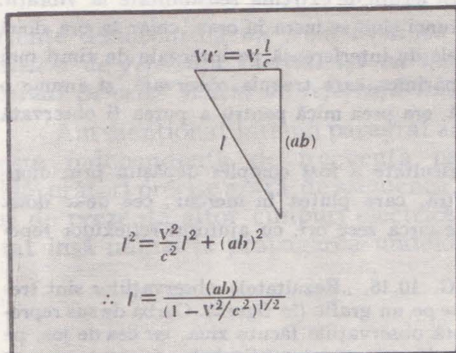


FIG. 10.15. (*g*) $\Delta t(ab'a') = 2t' = 2ab/\sqrt{c^2 - V^2}$ Pînă la termeni de ordinul V^2/c^2, acest timp este egal cu $\frac{2ab}{c}\sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2}}$.

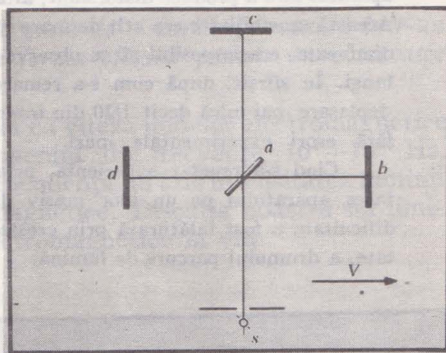


FIG. 10.15 (*h*). Astfel, chiar dacă $(ab) = (ac)$, transformarea galileiană prezice o deplasare a figurii de interferenţă, dacă interferometrul îşi schimbă viteza în raport cu eterul. Nu a fost observată însă nici o modificare. În figură, aparatul este rotit cu 90° în vederea repetării experienţei în cazul în care mişcarea Pămîntului este paralelă cu (*ab*), în loc de (*ac*).

Fie c = viteza luminii

V = viteza orbitală a Pămîntului

D = distanța ab sau ac

T = timpul în care lumina parcurge distanța ac'

T' = timpul în care lumina parcurge distanța $c'a'$.

Atunci:

$$T = \frac{D}{c - V}; \quad T' = \frac{D}{c + V}.$$

Timpul total este:

$$T + T' = 2D \frac{c}{c^2 - V^2},$$

iar distanța parcursă în acest timp, neglijînd termenii de ordin patru, este:

$$2D \frac{c^2}{c^2 - V^2} \approx 2D\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right).$$

Lungimea celuilalt drum este evident egală cu: $2D\sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2}}$

sau, lucrînd consecvent cu aceeași precizie: $2D\left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right)$.

Diferența dintre cele două drumuri este așadar: $D\frac{V^2}{c^2}$.

Dacă acum se rotește întregul aparat cu 90°, diferența va fi în sens opus, deci deplasarea franjelor va fi $2D\,(V^2/c^2)$. Ținînd seama numai de viteza orbitală a Pămîntului, această deplasare va fi egală cu $2D \cdot 10^{-8}$. Dacă $D = 2 \cdot 10^6$ lungimi de undă de lumină galbenă, așa cum s-a întîmplat în prima experiență, deplasarea eventuală ar trebui să fie egală cu 0,04 din interfranjă.

În primele experiențe, una dintre dificultățile principale a fost aceea de a roti aparatul fără a produce distorsiuni; alta, a fost legată de extrema sensibilitate la vibrații. Această sensibilitate era atît de mare încît atunci cînd se lucra în oraș, chiar la ora două dimineața, era imposibil să se observe franjele de interferență pe intervale de timp mai lungi. În sfîrșit, după cum s-a remarcat, mărimea care trebuia observată, și anume o deplasare mai mică decît 1/20 din interfranjă, era prea mică pentru a putea fi observată fără erori experimentale mari.

Cînd s-a repetat experiența, prima dificultate a fost complet depășită prin montarea aparatului pe un bloc masiv de piatră, care plutea în mercur; cea de-a doua dificultate a fost înlăturată prin creșterea de circa zece ori, cu ajutorul reflexiilor repetate, a drumului parcurs de lumină.

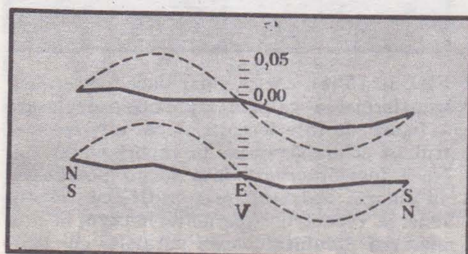


FIG. 10.16. „Rezultatele observațiilor sînt trecute pe un grafic (în figură). Curba de sus reprezintă observațiile făcute ziua, iar cea de jos, pe cele făcute noaptea. Curbele punctate reprezintă o optime din deplasările teoretice. Din figură rezultă în mod clar că, dacă există o deplasare datorată mișcării relative a Pămîntului față de eter, aceasta nu depășește 0,01 din interfranjă". [A. A. Michelson and E. W. Morley, Am. J. Sci., *34*: 333 (1887).] Pe ordonată s-a notat deplasarea franjelor; pe abscisă s-a trecut orientarea interferometrului în raport cu axa est-vest.

......Ținînd seama ca și mai sus numai de mișcarea orbitală a Pămîntului ar rezulta o deplasare egală cu:

$$2D \frac{V^2}{c^2} = 2D \cdot 10^{-8}.$$

Distanța D era de aproximativ 11 m, sau $2 \cdot 10^7$ lungimi de undă ale luminii galbene; deplasarea ar fi trebuit deci să fie cam 0,4 din interfranjă [dacă Pămîntul s-ar fi deplasat față de eter]. Deplasarea reală a fost in mod sigur de douăzeci de ori mai mică decît aceasta și probabil mai mică decît a patruzecea parte [vezi fig. 10.16]. Dar întrucît deplasarea este proporțională cu pătratul vitezei, viteza relativă a Pămîntului față de eter este probabil mai mică decît o șesime a vitezei orbitale și cu siguranță mai mică decît o pătrime.

Experiențele lui Michelson și Morley nu au confirmat rezultatele scontate de ei, pe baza transformărilor galileene. De atunci, în decurs de 80 de ani, experiențele au fost reluate (cu mici modificări) cu diferite lungimi de undă, cu lumină provenită de la stele, cu fascicule monocromatice extrem de înguste date de laserii moderni, la mari înălțimi, sub pămînt, pe diferite continente și în diferite anotimpuri. Putem afirma că variația lui c (datorită deplasării eterului), este nulă cu o precizie foarte mare: vitezele luminii în sensul de curgere a eterului și în sens contrar diferă între ele prin mai puțin de 10 m/s, adică prin a mia parte din viteza orbitală a Pămîntului în jurul Soarelui.

Invarianța lui c. Rezultatul negativ al experienței lui Michelson și Morley sugerează că efectele eterului nu pot fi puse în evidență. De asemenea, el sugerează că viteza luminii este independentă de mișcarea sursei și a observatorului. Dovada experimentală a ultimei afirmații este foarte bună, dar ea poate fi încă îmbunătățită. Cercetările lui Sadeh citate în capitolul 11 arată că viteza razelor γ este constantă cu o eroare de $\pm 10\%$, independent de viteza sursei, pentru viteze ale sursei de ordinul $\frac{1}{2} c$. Din toate aceste experiențe deducem că *un front luminos sferic emis de o sursă punctuală într-un sistem de referință inerțial își va menține forma sferică pentru un observator situat în orice sistem de referință inerțial.*

Am menționat într-un paragraf anterior că viteza undelor electromagnetice este independentă de frecvență pe domeniul de frecvențe 10^8—10^{22} Hz. Măsurători precise arată, de asemenea, independența lui c de intensitatea luminii și de prezența altor cîmpuri electrice și magnetice. Discuția noastră s-a limitat însă numai la propagarea undelor electromagnetice în vid.

EFECTUL DOPPLER

Efectul Doppler sau deplasarea Doppler, dă legătura dintre frecvența măsurată a undei și vitezele relative ale sursei, mediului și observatorului. În ceea ce privește sunetul, efectul este cunoscut oricărei persoane care a auzit un automobil apropiindu-se și apoi depărtîndu-se, sau acelor persoane „mai

în vîrstă" care stînd pe o platformă de cale ferată, au ascultat șuieratul unui tren care trecea prin față. Cînd sursa se apropie, numărul de unde emise într-o secundă va ajunge la observator în mai puțin de o secundă, deoarece atunci cînd este emisă ultima undă sursa se află mai aproape decît atunci cînd este emisă prima undă. Ca urmare, frecvența crește. Reciproc, atunci cînd sursa se îndepărtează, frecvența scade. Un argument similar se aplică și în cazul sursei fixe și observatorului mobil. Pentru sunet se obține relația:

$$\nu_o = \nu_s \frac{1 + v_o/V}{1 - v_s/V} \tag{10.6}$$

unde V este viteza sunetului în mediul respectiv, de exemplu, aer, aflat în repaus, v_s este viteza sursei, considerată pozitivă atunci cînd este îndreptată către observator, v_o este viteza observatorului, considerată pozitivă atunci cînd este îndreptată către sursă, ν_s este frecvența sursei măsurată de către un observator în repaus față de sursă, iar ν_o este frecvența măsurată de către observator.

Remarcați că dacă $v_s \ll V$ (luăm $v_o = 0$), atunci:

$$\nu_o = \nu_s\left(1 + \frac{v_s}{V}\right) \tag{10.7}$$

și

$$\frac{\nu_o - \nu_s}{\nu_s} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v_s}{V}. \tag{10.8}$$

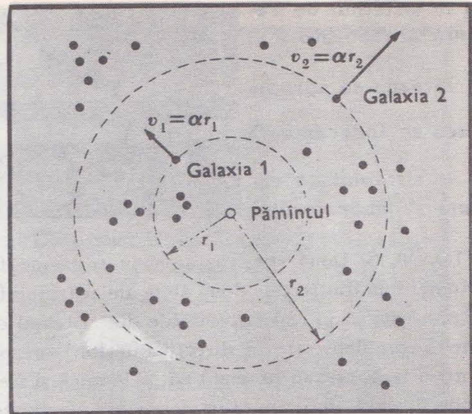
În cazul luminii, au loc efecte asemănătoare, deși apar și diferențe esențiale. În analiza și explicarea efectului Doppler pentru sunet, trebuie să luăm în considerare mediul în care se propagă undele sonore, precum și mișcarea sursei și observatorului în raport cu mediul. În cazul luminii, efectul Doppler nu trebuie înțeles în același fel, deoarece experiența lui Michelson și Morley interzice luarea în considerare a unui mediu (adică a eterului). Efectul Doppler furnizează cîteva verificări interesante ale teoriei restrînse a relativității și de asemenea cîteva rezultate importante pentru astronomie, în special. Vom trata în mod corect efectul Doppler pentru lumină în capitolul 11.

EXEMPLU

Deplasarea doppleriană spre roșu. Analiza spectrografică a luminii primite de la galaxiile îndepărtate indică deplasarea spre capătul roșu (de joasă frecvență) al spectrului, a anumitor linii spectrale importante, identificate în studiile de spectroscopie. Această deplasare poate fi interpretată ca o deplasare doppleriană cauzată de viteza de îndepărtare a sursei. Se mai știe că vitezele calculate din aceste deplasări Doppler sînt direct proporționale cu distanțele de la Pămînt la surse, determinate prin alte metode.

Acest fapt observat este ieșit din comun și foarte incitant. Cea mai simplă explicare nerelativistă a relației dintre distanță și viteză este cunoscută sub numele de teoria „big-bang", conform căreia Universul s-a format în urma unei explozii produse cu aproximativ 10^{10} ani în urmă. Regiunile cele mai îndepărtate ale Universului sînt umplute cu acele produse ale exploziei inițiale care au viteza cea mai mare. Deci cu cît este mai mare viteza radială a mate-

FIG. 10.17. Efectul Doppler, observat în lumina care vine de la stelele îndepărtate, arată că galaxiile se îndepărtează de noi cu o viteză proporțională cu distanța pînă la Pămînt. Galaxiile 1 și 2 aflate la distanțele r_1 și r_2 față de Pămînt (distanțe măsurate prin alte metode) au vitezele de îndepărtare v_1 și v_2 (măsurate cu ajutorul efectului Doppler).



riei (față de noi), cu atît ea este mai îndepărtată și cu atît mai mare este deplasarea spre roșu. Există și explicații mai sofisticate ale deplasării spre roșu. Nici una dintre ele nu este demonstrată (vezi fig. 10.17).

O pereche de linii de absorbție din spectrul potasiului care pot fi ușor recunoscute (liniile K și H) apar cu mare intensitate în spectrele multor stele. În laboratoarele de pe Pămînt aceste linii apar în jurul lungimii de undă de 3 950 Å [1]. Presupunem că un observator aflat în sistemul de referință al unei stele, ar măsura aceeași lungime de undă. În lumina care vine de la o nebuloasă din constelația Boötes, observăm aceste linii la o lungime de undă de 4 470 Å, adică ele sînt deplasate spre roșu cu 4 470 − 3 950 = 520 Å. Aceasta dă o deplasare relativă de:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{520}{3\,950} = 0,13.$$

Observăm că, folosind formula (10.8) cu V egal cu c (ceea ce va fi justificat în cap. 11), și diferențiind [2] $\nu = c/\lambda$ cu c constant, obținem:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \quad \text{sau} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v_s}{c}. \tag{10.9}$$

Deducem din relațiile (10.8) și (10.9) că nebuloasa se îndepărtează de noi cu o viteză relativă $|v| \approx 0,13c$, ceea ce reprezintă o viteză foarte mare. Pentru *viteze și mai mari* trebuie să folosim pentru deplasarea Doppler o relație sau alta, modificată corespunzător modelelor relativiste adoptate pentru Univers [3]. De asemenea, expresiile aproximative din relațiile (10.8) și (10.9) valabile pentru sunet sau pentru lumină la viteze de deplasare mici în comparație cu viteza sunetului sau a luminii, trebuie înlocuite cu expresiile corecte pentru lumină.

Observații asemănătoare asupra unui număr mare de galaxii, coroborate cu estimări independente ale distanțelor lor, duc la următorul rezultat uimitor: viteza relativă a unei galaxii aflate la distanța r de noi poate fi scrisă sub forma:

$$v = \alpha r \tag{10.10}$$

[1] 1 angstrom ≡ 10^{-10}m ≡ 1Å.

[2] Rețineți următorul artificiu de calcul. Presupunem că $y = Ax^n$ cu A, n constante și vrem să calculăm expresia dy/y în funcție de dx/x. Logaritmăm în ambii membri și obținem $\ln y = \ln A + n \ln x$. Diferențiind în ambii membri, rezultă $dy/y = n\, dx/x$. Am folosit aici relația $d \ln x/dx = 1/x$.

[3] Vezi G.C.McVitties, Physics Today, p. 70 (Iulie 1964).

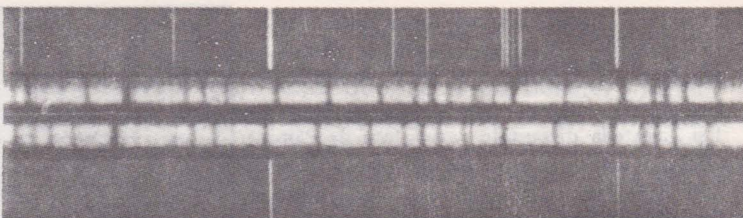


FIG. 10.18. Două spectrograme (luate la momente diferite) ale stelei duble α Geminorum. Numai una dintre cele două stele ale sistemului emite suficientă lumină pentru a fi observată. Remarcați că în raport cu liniile din sistemul de referință al laboratorului, liniile spectrale ale stelei sînt deplasate în direcții diferite, corespunzătoare celor două faze de mișcare a stelei. Într-o fază, steaua se mișcă către Pămînt și frecvența luminii crește, iar în cealaltă, steaua se îndepărtează de Pămînt și frecvența descrește. *(Fotografie efectuată la Observatorul Lick.)*

unde constanta α a fost determinată în mod empiric: $\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{s}^{-1}$. (Estimarea distanțelor galactice este un subiect complex pentru care trebuie consultat un manual de astronomie.) Inversul lui α are dimensiuni de timp:

$$\frac{1}{\alpha} \approx 6 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s} \approx 2 \cdot 10^{10}\ \text{ani}. \tag{10.11}$$

Acesta este intervalul de timp, scurs de la „big-bang"-ul originar, timp în care steaua a parcurs distanța la care ea se află în prezent. Înmulțind pe $1/\alpha$ cu c, obținem o lungime:

$$\frac{c}{\alpha} \approx (3 \cdot 10^{8})(6 \cdot 10^{17}) \approx 2 \cdot 10^{26}\ \mathrm{m}. \tag{10.12}$$

Timpul din expresia (10.11) desemnează aproximativ *vîrsta Universului*; lungimea din formula (10.12) desemnează *raza Universului*. Semnificația reală a acestor mărimi nu este încă cunoscută, deși s-au propus mai multe modele cosmologice pentru a explica aceste relații.

VITEZA LIMITĂ

Am văzut că undele electromagnetice se propagă în vid cu viteza c. Poate fi depășită viteza limită c?

Să considerăm mișcarea particulelor încărcate într-un accelerator. Pot fi accelerate particule la viteze mai mari decît c? N-am întîlnit pînă acum nicăieri un principiu care să interzică în mod explicit posibilitatea accelerării particulelor încărcate la viteze oricît de mari (vezi fig. 10.19).

Următoarea experiență [1] ilustrează afirmația că o particulă nu poate fi accelerată la viteze mai mari decît c. Pulsurile de electroni sînt accelerate într-un accelerator Van de Graaff de cîmpuri electrostatice din ce în ce mai mari, după care electronii se deplasează cu viteză constantă printr-o regiune fără cîmp. Timpul de zbor de-a lungul unei distanțe AB date este măsurat direct (și o dată cu el și viteza), iar energia cinetică (care se transformă în căldură

[1] Experiența a fost făcută de către W. Bertozzi în legătură cu filmul PSSC „Viteza limită" (The Ultimate Speed). Descrierea noastră provine direct din capitolul A-3 al Suplimentului de Teme Avansate PSSC. Vezi și Am. J. Phys. *32*: 551 (1964).

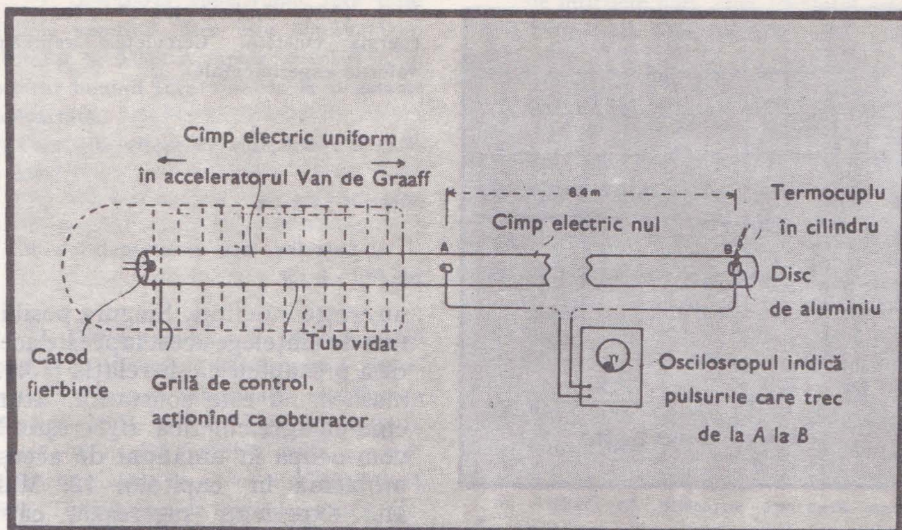


FIG. 10.19. Schema generală a experienței de determinare a vitezei limită. Electronii sînt accelerați în partea stîngă, într-un cîmp uniform, și, cu ajutorul unui osciloscop, li se măsoară timpul de zbor între A și B.

prin ciocnirea cu o țintă situată la extremitatea traiectoriei) se măsoară cu ajutorul unui termocuplu calibrat.

Potențialul de accelerare V este binecunoscut în această experiență. Energia cinetică a unui electron este:

$$E_c = eEL = eV$$

unde L este distanța pe care are loc accelerarea, iar $V = EL$ este diferența de potențial între capetele drumului de accelerare. Dacă $V = 10^6$ V, atunci, după accelerare, un electron va avea energia de $1 \cdot 10^6$ eV (1 MeV) sau de:

$$(1{,}6 \cdot 10^{-19})(10^6) = 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J}.$$

Dacă prin fascicul trec N electroni pe secundă, puterea cedată țintei de aluminiu va fi de $1{,}60 \cdot 10^{-13}\ N$ W. Aceasta concordă perfect cu determinările directe, date de termocuplu, ale puterii absorbite de țintă. Rezultatul confirmă faptul că electronii cedează sursei energia cinetică acumulată de ei în timpul accelerării. Pe baza mecanicii nerelativiste ne așteptăm ca:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2, \tag{10.13}$$

astfel încît graficul lui v^2 ca funcție de E_c să fie o linie dreaptă. Cu toate acestea, pentru energii mai mari ca 10^5 eV, relația liniară dintre v^2 și E_c nu mai este verificată experimental. La energii mari, viteza observată se apropie de valoarea limită $3 \cdot 10^8$ m/s. Așadar, atunci cînd se compară viteza măsurată cu viteza calculată din relația (10.13) se găsește o valoare mai mică decît cea prezisă teoretic. În adevăr, graficul lui v^2 ca funcție de E_c se curbează așa cum este ilustrat în figura 10.20, apropiindu-se asimptotic de valoarea $9 \cdot 10^{16}$ m²/s². Rezultatele experimentale pot fi rezumate astfel: deși electronii absorb energia respectivă din cîmpul de accelerare, viteza lor

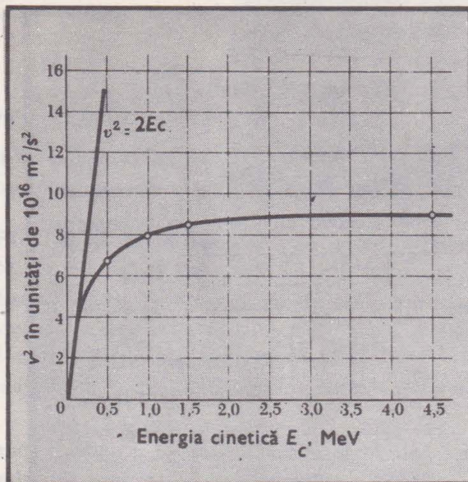


FIG. 10.20. Graficul lui v^2 în funcție de energia cinetică. Cerculețele reprezintă valorile experimentale.

nu crește indefinit. Singura posibilitate de a înțelege acest fapt este aceea de a presupune că, în relația (10.13), masa m nu este constantă, atunci cînd energia cinetică E_c crește. Ne vom ocupa în amănunt de această problemă în capitolul 12. Multe alte experiențe sugerează, ca și aceasta, că c este limita superioară a vitezelor particulelor. Astăzi credem cu tărie că c este viteza maximă atît a particulelor cît și a undelor electromagnetice: *c este viteza limită.*

Concluzii

Sîntem pregătiți acum să studiem în capitolul 11 relativitatea restrînsă cunoscînd din experiență că:

1. Viteza c este invariantă în raport cu sistemele de referință inerțiale, adică cu acele sisteme care se mișcă cu viteză constantă unele în raport cu altele.
2. c este viteza maximă cu care poate fi transmisă energia.
3. Viteza absolută a unui sistem de referință nu are sens. Numai vitezele relative pot fi determinate experimental.
4. Transformările galileene nu pot furniza explicații satisfăcătoare ale fenomenelor în care apar viteze foarte mari.
5. Formula newtoniană a energiei cinetice, $\frac{1}{2}mv^2$, nu mai este valabilă atunci cînd v tinde spre c.

Am trecut în revistă doar o mică parte a experiențelor care fundamentează teoria restrînsă a relativității, care astăzi este o teorie solid întemeiată. Fizicienii se bizuie pe această teorie la fel de mult ca pe orice altă parte a fizicii clasice. Ne vom strădui, în cele ce urmează, să o formulăm precis și să înțelegem cîteva dintre consecințele ei importante.

PROBLEME

1. *Deplasarea Doppler.* Un cosmonaut vrea să măsoare viteza cu care se apropie de Lună. Pentru aceasta, el trimite un semnal radio cu frecvența de $\nu = 5\,000$ MHz și îi compară frecvența cu aceea a ecoului său, observînd o diferență de 86 kHz. Calculați viteza rachetei în raport cu Luna (Expresia nerelativistă pentru deplasarea Doppler este în multe cazuri suficient de precisă.)

R: $2{,}6 \cdot 10^3$ m/s.

2. *Deplasarea doppleriană spre roșu.* O linie spectrală care este observată în laborator la 5 000 Å, apare la 5 200 Å în spectrul luminii care vine de la o galaxie îndepărtată.

(*a*) Care este viteza de îndepărtare a galaxiei?

R: $1,2 \cdot 10^7$ m/s.

b) Cît de departe se află galaxia?

R: $8 \cdot 10^{24}$ m.

3. *Viteza luminii.* În celebra experiență a lui Michelson de măsurare a vitezei luminii, o prismă octogonală reflectătoare aflată în rotație în jurul axei sale, reflectă o rază de lumină primită de la o sursă îndepărtată către un observator aflat lîngă sursă. Timpul necesar luminii pentru a parcurge acest drum era o optime din perioada de rotație a prismei. Distanța dintre sursă și oglindă era $L = (35,410 \pm 0,003)$ km, iar frecvența de rotație a prismei $\nu = 529$ Hz, cu o precizie de $3 \cdot 10^{-5}$ Hz.

(*a*) Calculați viteza luminii din aceste date. (Trebuie făcută și o corecție de ordinul a 10^{-5} din cauza efectelor atmosferice.)

(*b*) Unghiul dintre două fețe adiacente ale prismei octogonale era $135° \pm 0,1''$. Estimați precizia globală a rezultatului măsurării lui *c*.

4. *Eclipsele lui Io.* Satelitul lui Jupiter, Io, se mișcă pe o orbită de rază $4,21 \cdot 10^8$ m, avînd o perioadă medie de 42,5 h. Roemer a observat că perioada varia, în mod regulat în decursul unui an, cu o perioadă de variație de aproximativ un an. Deviația maximă a perioadei de la valoarea medie era de 15 s și apărea la intervale de timp ce se succedau la aproximativ șase luni. Neglijați mișcarea orbitală a lui Jupiter.

(*a*) Estimați distanța pe care Pămîntul o parcurge în timpul unei rotații complete a lui Io în jurul lui Jupiter.

R: $4,5 \cdot 10^9$ m.

(*b*) Cînd apare perioada lui Io ca fiind maximă?

(*c*) Folosiți rezultatele de mai sus și datele furnizate pentru determinarea vitezei luminii.

(*d*) Estimați întîrzierea acumulată în cursul celor șase luni ce urmează momentului de întîrziere nulă, cînd Pămîntul este în poziția cea mai apropiată de Jupiter.

5. *Paralaxa stelelor și aberația.* Paralaxa stelelor a fost prevăzută de Aristarh din Samos (aprox. 200 î.e.n.) și a fost observată de Bessel abia în 1838. O încercare lipsită de succes a fost făcută de Bradley, care a descoperit, în schimb, aberația stelelor. În decursul unui an, poziția aparentă a stelei se deplasează, datorită aberației, între două poziții extreme situate la circa 40″ de arc.

a) Care ar fi, în parseci, distanța pînă la o stea cu paralaxa de 20″? Cea mai apropiată stea cunoscută este α Centauri aflată la distanță de 1,3 parseci.

R: 0,05 parseci.

(*b*) Arătați că mișcarea aparentă anuală datorată aberației a unei stele situate lîngă ecliptică are loc pe coarda unui arc de 40″. Ecliptica este planul orbitei terestre.

6. *Rotația galaxiilor.* În 1916, înainte de a fi fost cunoscute marile distanțe la care se află nebuloasele (galaxiile), s-a descoperit că spirala M 101 se rotește ca un corp rigid cu o perioadă de 85 000 ani. Diametrul unghiular observat este de 22′. Calculați distanța maximă la care se poate afla nebuloasa dacă perioada dată mai sus este exactă și presupunînd că extremitățile nebuloasei nu se pot mișca cu viteze mai mari decît *c*. (Măsurători recente efectuate asupra stelelor din M 101 o situează la o distanță de $8,5 \cdot 10^{22}$ m. Este clar că perioada de rotație găsită în 1916 a fost subestimată.)

7. *Stele variabile.* Telescopul de 5 m diametru de la Mount Palomar poate distinge stele individuale din galaxii aflate la distanțe pînă la $3 \cdot 10^{23}$ m. O metodă de măsurare a distanțelor de acest ordin de mărime implică observarea perioadelor de luminozitate ale unor stele variabile de tipul Cefeidelor. O stea de tipul Cefeidelor este o stea instabilă din punct de vedere gravitațional, în care au loc pulsații periodice în decursul cărora raza stelei poate varia cu 5—10%. Perioada unei Cefeide este legată de luminozitatea sa medie. Temperatura unei stele variază

cu aceeaşi perioadă ca şi raza, astfel încît se observă variaţii periodice ale strălucirii. S-au găsit şi perioade de cîteva ore. În galaxia noastră o Cefeidă de $2 \cdot 10^4$ ori mai luminoasă decît Soarele, are o perioadă de 50 zile.

(*a*) Estimaţi din relaţia distanţă—viteză [ecuaţia (10.10)], viteza radială a unei galaxii aflate la distanţa de $3 \cdot 10^{23}$ m.

b) Care ne aşteptăm să fie perioada acestei Cefeide într-o galaxie aflată la distanţa de mai sus?

R: 50,08 zile.

8. *Nove.* Se vede uneori explozia unei stele, însoţită de aruncarea cu mare viteză a straturilor sale exterioare. O astfel de stea se numeşte *novă*. S-a observat cu ochiul liber că după explozie o novă recentă este înconjurată de un înveliş. Diametrul unghiular al învelişului creşte cu 0,3″/an. Spectrul novei este un spectru stelar normal peste care se suprapun linii de emisie lărgite, ale căror semilărgimi (măsurate în lungimi de undă) rămîn mereu egale cu 10 Å (în jurul lungimii de undă de 5 000 Å), deşi intensitatea liniilor scade. Lărgimea este interpretată ca o măsură a deplasării Doppler între părţile învelişului care se apropie de noi şi cele care se îndepărtează de noi. Estimaţi distanţa pînă la novă dacă învelişul este optic transparent (astfel încît primim tot atîta lumină de la emisfera îndepărtată cît şi de la cea apropiată).

R: $1,3 \cdot 10^{19}$ m.

9. *Viteza galaxiilor.* Vitezele radiale măsurate ale galaxiilor în raport cu Pămîntul nu sînt izotrop distribuite pe sfera cerească. Anizotropia rezultă din mişcarea orbitală a Soarelui în jurul centrului galaxiei noastre şi din mişcarea galaxiei noastre în raport cu un reper extragalactic considerat în repaus. Să examinăm toate galaxiile aflate la o anumită distanţă, să spunem $3,26 \cdot 10^7$ ani lumină.

(*a*) Care este viteza radială medie a acestor galaxii?

R: viteza medie a galaxiilor calculată din relaţia viteză-distanţă este de 494 km/s.

(*b*) Unde va fi localizată în medie, în spectrele acestor galaxii, linia H_α a hidrogenului? (În laborator, $\lambda_{H\alpha} = 6,563 \cdot 10^{-7}$ m)

R: linia H_α se va afla în medie la $6,574 \cdot 10^{-7}$ m.

Pentru mulţimea galaxiilor considerate, găsim că într-un anumit sens vitezele sînt cu 300 km/s mai mari decît media, iar în sens opus ele sînt mult mai mici.

(c) Care este viteza Soarelui în acest sistem de referinţă?

R: 300 km/s.

(*d*) Este aceasta viteza orbitală a Soarelui în jurul centrului galaxiei noastre?

R: nu, pentru că ea include orice mişcare a galaxiei noastre, ca întreg, în acest sistem de referinţă.

(e) Presupunînd că aceasta este viteza orbitală, estimaţi masa galaxiei noastre, considerînd că toată masa se află în centru şi că orbita Soarelui este un cerc cu raza de 3 500 ani lumină. Comparaţi cu masa de $8 \cdot 10^{41}$ kg a galaxiei, dată mai sus, şi explicaţi diferenţa.

R: $4,5 \cdot 10^{40}$ kg. Reprezintă mai puţin decît rezultatul citat în mod uzual, deoarece cea mai mare parte a masei galaxiei nu se află în centru — de fapt, o mare parte din masă se află în afara orbitei Soarelui şi nu influenţează mişcarea acestuia, neputînd fi detectată în acest mod.

10. *Rotaţia stelelor.* Observarea detaliilor suprafeţei solare a condus la concluzia că Soarele se roteşte încet în jurul axei sale, cu o perioadă de 25 de zile. Unele stele se pot roti totuşi mult mai repede. Cum poate fi determinat acest lucru ţinînd seama că stelele sînt prea îndepărtate pentru a fi observate, altfel decît ca simple puncte luminoase?

LECTURI SUPLIMENTARE

Curs de Fizică HPP (HPP „Project Physics Course"), capitolele 16 (§ 6), şi 20 (§ 1). Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.

A. A. Michelson, *Studii de Optică* („Studies in Optics"), The University of Chicago Press, Chicago, 1927; retipărire în ediţie broşată, 1962.

11

Relativitatea restrînsă: trasnformarea Lorentz

Cuprins

IPOTEZE FUNDAMENTALE

Rezultatul negativ al încercării lui Michelson și Morley de a pune în evidență deplasarea Pămîntului prin eter, precum și celelalte rezultate discutate în capitolul 10 pot fi înțelese numai printr-o schimbare radicală a modului nostru de gîndire; noul principiu necesar este simplu și clar:

Viteza luminii este independentă de mișcarea sursei luminoase sau a observatorului.

Așadar, viteza luminii este aceeași în toate sistemele de referință aflate în mișcare uniformă în raport cu sursa. Acestui nou principiu trebuie să-i adăugăm ipoteza noastră mai veche:

Spațiul este izotrop și omogen. Legile fundamentale ale fizicii au aceeași formă pentru doi observatori aflați în mișcare rectilinie uniformă unul față de celălalt.

Toate marile consecințe ale teoriei restrînse a relativității decurg din aceste ipoteze.

Nu numai undele electromagnetice, sau fotonii, au viteza independentă de mișcarea sursei. Fizicienii cred, pe baza unor observații experimentale lipsite de dubiu, că există și alte particule, în particular neutrinii și antineutrinii, care au viteza egală cu c. Vom discuta, totuși, fotonii, deoarece este mai ușor să se facă experiențe cu ei.

Să considerăm pentru început o undă luminoasă emisă de o sursă punctuală. Frontul de undă (suprafața de fază constantă) va fi o sferă dacă este privit dintr-un sistem de referință aflat în repaus. Dar, în conformitate cu noul nostru principiu, frontul de undă trebuie să fie sferic și cînd este privit dintr-un sistem de referință care se mișcă uniform față de sursă; altfel, am putea spune din forma frontului de undă că sursa se află în mișcare. Presupunerea fundamentală că viteza luminii este independentă de mișcarea sursei ne răpește posibilitatea de a deduce, din forma frontului de undă, dacă sursa se află sau nu în mișcare uniformă.

TRANSFORMAREA LORENTZ

În capitolul 4 am introdus transformarea galileiană pentru a vedea cum apar fenomenele în două sisteme de referință diferite. Vom folosi în continuare aceleași idei, în legătură cu două sisteme de referință S și S', care se mișcă unul față de altul cu viteza V. Vrem să găsim o transformare a coordonatelor și eventual a timpului, similară transformărilor galileiene (4.14), care leagă coordonatele și timpul într-un sistem de referință cu coordonatele și timpul

din alt sistem, astfel încît să fie compatibilă cu ipotezele teoriei relativității. Presupunînd că în originea sistemului S se află o sursă de lumină, ecuația frontului de undă sferic, emis la momentul $t = 0$, este:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2. \tag{11.1}$$

În sistemul de referință S', în care coordonatele sînt x', y', z' și t', ecuația frontului de undă sferic trebuie să fie:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2. \tag{11.2}$$

Viteza luminii, c, este aceeași în ambele ecuații (11.1) și (11.2).

Putem încerca să vedem dacă transformarea galileiană conduce la rezultate care să fie în acord cu relațiile (11.1) și (11.2).

$$x' = x - Vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t. \tag{11.3}$$

Înlocuind transformarea (11.3) în formula (11.2) obținem imediat rezultatul:

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

care nu coincide cu relația (11.1). Așadar, transformarea galileiană nu mai este valabilă și trebuie să găsim o altă transformare. Ea s-ar putea reduce la transformarea galileiană atunci cînd viteza V devine foarte mică în raport cu viteza luminii.

Vom încerca transformarea:

$$x' = \alpha x + \varepsilon t; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \delta x + \eta t.$$

Știm că pentru $x' = 0$, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = V$; iar pentru $x = 0$, $\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = -V$, ceea ce conduce la relațiile:

$$V = -\frac{\varepsilon}{\alpha}; \quad -V = \frac{\varepsilon}{\eta}$$

sau

$$\alpha = \eta.$$

Înlocuind în formula (11.2), obținem:

$$\alpha^2x^2 + 2\alpha\varepsilon xt + \varepsilon^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2(\delta^2x^2 + 2\delta\alpha xt + \alpha^2t^2).$$

Această egalitate trebuie comparată cu egalitatea (11.1); observăm că se obține compatibilitate numai dacă;

$$2\alpha\varepsilon = 2c^2\delta\alpha$$

$$\alpha^2 - c^2\delta^2 = 1$$

și

$$c^2\alpha^2 - \varepsilon^2 = c^2.$$

Eliminînd pe ε și folosind relația $\varepsilon = -V\alpha$, rezultă în definitiv:

$$\alpha = \frac{1}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad \varepsilon = -\frac{V}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\delta = \frac{-V/c^2}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad \eta = \frac{1}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

din alt sistem, astfel încît să fie compatibilă cu ipotezele teoriei relativității. Presupunînd că în originea sistemului S se află o sursă de lumină, ecuația frontului de undă sferic, emis la momentul $t = 0$, este:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2. \quad (11.1)$$

În sistemul de referință S', în care coordonatele sînt x', y', z' și t', ecuația frontului de undă sferic trebuie să fie:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2. \quad (11.2)$$

Viteza luminii, c, este aceeași în ambele ecuații (11.1) și (11.2).

Putem încerca să vedem dacă transformarea galileiană conduce la rezultate care să fie în acord cu relațiile (11.1) și (11.2).

$$x' = x - Vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t. \quad (11.3)$$

Înlocuind transformarea (11.3) în formula (11.2) obținem imediat rezultatul:

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

care nu coincide cu relația (11.1). Așadar, transformarea galileiană nu mai este valabilă și trebuie să găsim o altă transformare. Ea s-ar putea reduce la transformarea galileiană atunci cînd viteza V devine foarte mică în raport cu viteza luminii.

Vom încerca transformarea:

$$x' = \alpha x + \varepsilon t; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \delta x + \eta t.$$

Știm că pentru $x' = 0$, $dx/dt = V$; iar pentru $x = 0$, $\frac{dx'}{dt'} = -V$, ceea ce conduce la relațiile:

$$V = -\frac{\varepsilon}{\alpha}; \quad -V = \frac{\varepsilon}{\eta}$$

sau

$$\alpha = \eta.$$

Înlocuind în formula (11.2), obținem:

$$\alpha^2x^2 + 2\alpha\varepsilon xt + \varepsilon^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2(\delta^2x^2 + 2\delta\alpha xt + \alpha^2t^2).$$

Această egalitate trebuie comparată cu egalitatea (11.1); observăm că se obține compatibilitate numai dacă;

$$2\alpha\varepsilon = 2c^2\delta\alpha$$

$$\alpha^2 - c^2\delta^2 = 1$$

și

$$c^2\alpha^2 - \varepsilon^2 = c^2.$$

Eliminînd pe ε și folosind relația $\varepsilon = -V\alpha$, rezultă în definitiv:

$$\alpha = \frac{1}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad \varepsilon = -\frac{V}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\delta = \frac{-V/c^2}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad \eta = \frac{1}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Transformarea căutată este așadar:

$$x' = \frac{x - Vt}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z$$
$$t' = \frac{t - (V/c^2)\,x}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{11.4}$$

Aceasta este *transformarea Lorentz* [1]. Ea este liniară în x și t; se reduce la transformarea galileiană pentru $V/c \to 0$; aplicată în formula (11.2), ea duce la:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2,$$

așa cum cere teoria. Adică, expresia:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

este *invariantă* la o transformare Lorentz. Forma ecuației care descrie frontul de undă este aceeași în toate sistemele de referință care se mișcă uniform unele în raport cu altele. Ecuațiile (11.4) reprezintă soluția unică a tuturor cerințelor noastre. Ele sînt o bună metodă rapidă de rememorare a multor rezultate importante din relativitate. Vom discuta, în cele ce urmează, cîteva dintre aceste rezultate, cu ajutorul transformării Lorentz.

Este deseori convenabil să se folosească în relativitate notația clasică:

$$\beta \equiv \frac{V}{c} \tag{11.5}$$

Adică, β este viteza măsurată în sistemul natural de unități, în care $c = 1$. Este, de asemenea, comod să se introducă mărimea γ

$$\gamma \equiv \frac{1}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \equiv \frac{1}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{11.6}$$

Remarcați că $\gamma \geqslant 1$. Cu aceste notații, transformarea Lorentz (11.4) devine:

$$x' = \gamma(x - \beta ct); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) \tag{11.7}$$

iar cititorul poate demonstra (probl. 2) că transformarea inversă este:

$$x = \gamma(x' + \beta ct'); \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right) \tag{11.8}$$

---

[1] Această transformare are o istorie lungă. Ea a fost folosită inițial de către J. Larmor, pentru a explica rezultatul negativ al experienței lui Michelson și Morley în cartea sa „Eter și Materie" (Aether and Matter) pag. 174–176, Cambridge University Press, New York, 1900. Larmor pretindea doar o precizie de ordinul V^2/c^2; de fapt rezultatele sale sînt exacte.

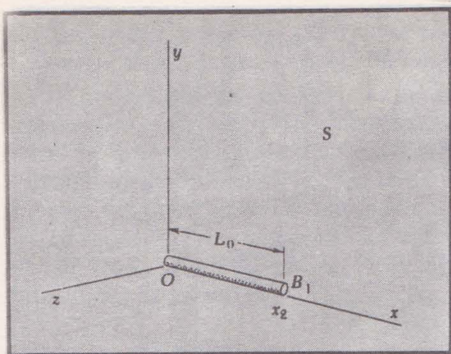


FIG. 11.1. (a). Considerăm o bară rigidă B_1, care are lungimea L_0 în sistemul propriu S.

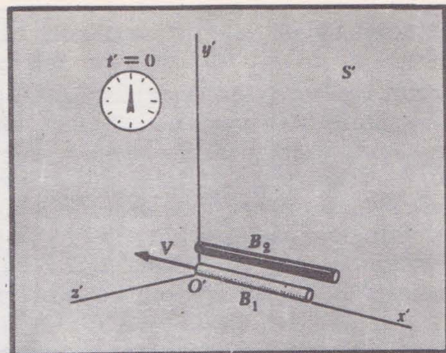


FIG. 11.1. (b) Transformarea Lorentz ne spune că B_1, care are viteza V în S', va avea lungimea măsurată $L' = L_0\sqrt{1-V^2/c^2}$ în S'. Remarcați în figură că $x_1 = x_1' = 0$.

Contracția lungimii. Să considerăm o bară (vezi fig. 11.1, *a*) aflată în repaus de-a lungul axei x din sistemul de referință S. Întrucît bara este în repaus față de sistemul S, coordonatele extremităților sale x_1 și x_2 sînt independente de timp. Lungimea

$$L_0 = x_2 - x_1$$

se numește *lungimea de repaus* sau *lungimea proprie* a barei. Considerăm, de asemenea, o bară (vezi fig. 11.2, *a*) aflată în repaus de-a lungul axei x' din sistemul S'. Din aceleași motive,

$$L_0 = x_2' - x_1'$$

reprezintă *lungimea de repaus* sau *lungimea proprie* a barei în sistemul S'.

Vrem să determinăm acum lungimile barelor observate dintr-un sistem de referință în mișcare. Să privim mai întîi prima bară din sistemul S' care se mișcă cu viteza $V\hat{\mathbf{x}}$ față de bara aflată în repaus în sistemul S (priviți fig. 11.1, *b* și remarcați că bara B_2 din fig. 11.2, *a* se află în repaus față de S'). Vom determina lungimea barei văzute din S', determinînd la un moment dat t', pozițiile x_1' și x_2' ale extremităților barei. Punctul important este acela că t' este același pentru x_1' și x_2'. Altfel spus, distanța dintre abscisele x_1' și x_2' din S', care coincid *simultan* (în S') cu extremitățile barei, reprezintă o definiție naturală a lungimii L în sistemul în mișcare S'.

Din transformarea Lorentz (11.8) rezultă:

$$x_1 = \gamma\,(x_1' + Vt_1')$$

$$x_2 = \gamma(x_2' + Vt_2')$$

$$x_2 - x_1 = L_0 = \gamma(x_2' - x_1') + \gamma V(t_2' - t_1').$$

Punînd acum $t_2' = t_1'$, după cum am văzut că este necesar pentru a efectua măsurătoarea în S', obținem:

$$L_0 = \gamma(x_2' - x_1') = \gamma L$$

sau, folosind definiția lui $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$,

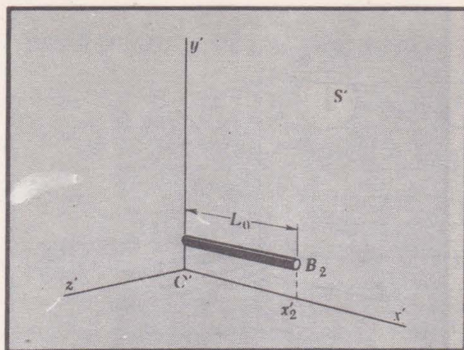


FIG. 11.2. (*a*). Considerăm o bară rigidă asemănătoare B_2, care are lungime L_0 în sistemul propriu S'.

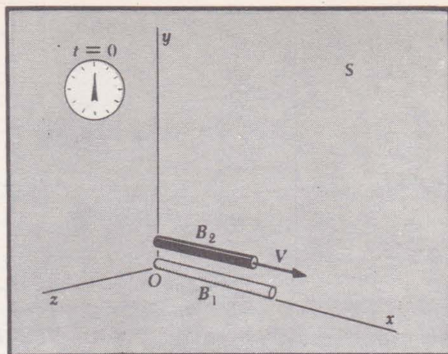


FIG. 11.2 (*b*). Transformarea Lorentz ne spune, de asemenea, că B_2, care are viteza V în S, va avea lungimea măsurată $L = L_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$ în S. Remarcați în figură că $x_1' = x_1 = 0$.

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (11.9)$$

Cu alte cuvinte, măsurătoarea efectuată în sistemul în mișcare, dă o lungime mai scurtă decît măsurătoarea efectuată în sistemul în repaus.

Privim acum bara din figura 11.2, *a* (aflată în repaus în sistemul S') din sistemul de referință S care se mișcă cu viteza $-V\hat{x}'$ în raport cu bara aflată în repaus în sistemul S'. (Priviți fig. 11.2, *b* și remarcați că bara B_1 din fig. 11.1, *a* este în repaus în sistemul S). Procedeul este același, numai că acum timpul t este același la determinarea extremităților x_1 și x_2. Din transformarea Lorentz (11.7) rezultă:

$$x_1' = \gamma(x_1 - Vt_1)$$

$$x_2' = \gamma(x_2 - Vt_2)$$

$$x_2' - x_1' = L_0 = \gamma(x_2 - x_1) - \gamma V(t_2 - t_1)$$

și punînd $t_2 = t_1$, obținem:

$$L_0 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$$

$$L = L_0(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Măsurarea barei în mișcare dă din nou o lungime mai mică decît măsurarea barei în repaus.

Aceasta este celebra contracție Lorentz-Fitzgerald a barei care se mișcă paralel cu lungimea ei, în raport cu observatorul. Ne-am putea întreba îngrijorați dacă lungimea nu „s-a contractat într-adevăr". Desigur, bara nu s-a modificat din punct de vedere fizic, dar măsurarea într-un sistem aflat în mișcare a condus la un rezultat diferit. Pentru o discuție a aspectului fotografiilor unor obiecte aflate în mișcare foarte rapidă, vezi excelentul articol al

lui Weisskopf [1]. Se arată, de exemplu, prin calcularea traiectoriei, că fotografia unei sfere în mișcare va fi o sferă și nu un elipsoid.

În discuția de mai sus, am accentuat asupra faptului că observatorul măsoară lungimea prin înregistrarea *simultană* a pozițiilor extremităților barei în propriul său sistem de referință. Este ceea ce s-a cerut observatorului din sistemul S' atunci cînd a găsit că lungimea barei, aflate în repaus în sistemul S, este egală cu L_0/γ [Ecuația (11.9)]. Este esențial să ne dăm seama de faptul că înregistrarea simultană, la momentul t', a extremităților în sistemul S' *nu* se transformă în evenimente simultane la extremitățile x_1 și x_2 din sistemul S; dimpotrivă, transformările Lorentz prezic un decalaj de timp:

$$t_2 - t_1 = \frac{\beta(x_2 - x_1)}{c}$$

în sistemul S, pentru ca înregistrările celor două extremități să fie simultane în sistemul S'. Vedem acum că pentru o bară aflată pe axa y nu se pune problema simultaneității, dar pentru o bară aflată pe axa x, chestiunea simultaneității este foarte importantă [2].

Acest fapt este ilustrat și de alt exemplu. Putem sincroniza cu ușurință o serie de ceasuri în sistemul S, în care bara se află în repaus. Presupunem că, la $t = 0$, ceasurile emit din cele două extremități $x_1 = 0$ și $x_2 = L_0$ cîte un puls luminos în direcția y. Aceste pulsuri sînt recepționate în sistemul S' de două contoare așezate pe axa x'. Care este distanța dintre cele două contoare? Din ecuația (11.7) rezultă pentru pozițiile celor două contoare:

$$x_1' = 0 \cdot \gamma - c \cdot 0 \cdot \beta\gamma = 0$$

$$x_2' = L_0\gamma - c \cdot 0 \cdot \beta\gamma = L_0\gamma$$

astfel că distanța dintre ele este:

$$x_2' - x_1' = L_0\gamma = \frac{L_0}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (11.10)$$

Acest rezultat nu coincide cu expresia (11.9). Aici am făcut însă o *altă experiență* și de aceea am obținut un alt rezultat. Prima noastră experiență era bazată pe definiția naturală a lungimii în sistemul S' și folosea cerința de simultaneitate în acest sistem. În acea experiență se comparau $\Delta x'$ cu Δx pentru $\Delta t' = 0$, în timp ce în a doua experiență se compară $\Delta x'$ cu Δx pentru $\Delta t = 0$.

Aflăm așadar indirect din rezultatul (11.10) al experienței a doua, că două evenimente simultane în sistemul S nu sînt, în general, simultane și în sistemul S'. Din relațiile (11.7) se vede că două evenimente *simultane* ($\Delta t = 0$)

[1] V. F. Weisskopf, Physics Today, *13*:24–27 (Sept. 1960).

[2] Cititorul este trimis la cartea lui Taylor și Wheeler, Introducere în fizica spațiului și timpului, (Space-Time Physics – An Introduction), pag. 64–66, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1965.

în sistemul S, și distanțate cu Δx, vor fi separate în sistemul S', atît în timp, cît și în spațiu:

$$\Delta x' = \gamma \Delta x; \quad c\Delta t' = -\beta\gamma\Delta x.$$

Măsurarea unei lungimi perpendiculare pe viteza relativă. Spre deosebire de măsurarea distanței pe direcția vitezei relative, vedem din transformarea Lorentz (11.7) că:

$$y' = y \quad \text{și} \quad z' = z.$$

Aceste relații sînt echivalente cu afirmația că rezultatul măsurării, de exemplu, a lungimii metrului etalon este independent de viteză *dacă* metrul etalon se mișcă perpendicular pe lungimea sa.

Cum putem verifica experimental această afirmație? Luăm un metru etalon și îl deplasăm cu viteză uniformă pe lîngă un alt metru etalon aflat în repaus. Nu e greu de observat coincidența originilor celor două etaloane. Atunci, sau reperele „1 m" ale fiecărui etalon vor coincide sau, dacă mișcarea modifică lungimea, putem face astfel încît reperul „1 m" al etalonului mai scurt să lase o urmă pe etalonul mai lung (vezi fig. 11.3, *a-c*). Aceasta pune la dispoziție un mod fizic bine definit de înregistrare a lungimii.

Fie S sistemul de referință propriu al unui metru etalon și S' sistemul de referință propriu al celuilalt. Presupunem că mișcarea modifică lungimea aparentă. Atunci, pentru ca legile fizicii să rămînă nemodificate pentru un observator din sistemul S și pentru un observator din sistemul S', este necesar ca etalonul care pare mai scurt observatorului din S să pară mai lung pentru observatorul din S'. Dar această inversare a rolurilor este incompatibilă cu modul nostru fizic de înregistrare a faptului că un etalon este mai scurt decît celălalt. Așadar, lungimile trebuie să apară egale atunci cînd sînt observate din sistemele S și S' (vezi fig. 11.3, *d* și *e*), ceea ce confirmă faptul că $y = y'$ și $z = z'$.

Rezultatele legate de măsurarea lungimilor paralele cu, și perpendiculare pe viteza relativă, implică faptul că măsurările unghiurilor în care intervine coordonata x, vor conduce la rezultate diferite în cele două sisteme. În adevăr, cititorul poate deduce relațiile între funcțiile trigonometrice ale unghiurilor în cele două sisteme. (Vezi probl. 5 de la sfîrșitul capitolului.) Reamintim că punctul important este determinarea sistemului în care măsurările extremităților lungimilor sînt simultane.

Dilatarea timpului pentru ceasurile în mișcare. În sensul obișnuit, *dilatare* înseamnă *mărire peste dimensiunea normală;* în legătură cu ceasurile, cuvîntul semnifică lungirea unui interval de timp. Considerăm acum un ceas aflat în repaus în sistemul de referință S.

Rezultatul măsurării unui interval de timp în sistemul în care ceasul se află *în repaus* se notează cu:

$$\tau = t_2 - t_1$$

și se numește *timp propriu.* Folosind transformarea Lorentz (11.7) rezultă

$$t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{\beta x_2}{c}\right); \quad t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{\beta x_1}{c}\right)$$

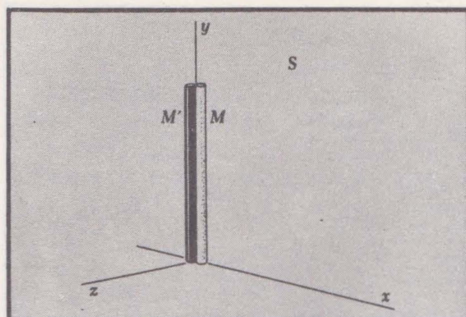


FIG. 11.3. (*a*). Presupunem că avem două bare identice M și M', în repaus în sistemul S.

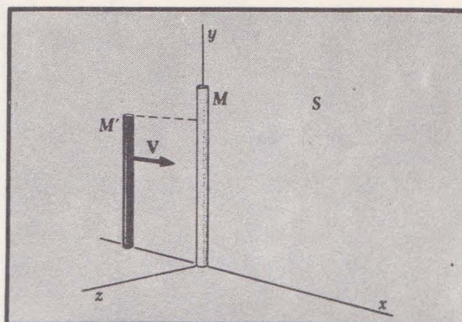


FIG. 11.3. (*b*). Presupunem că bara M' pare mai scurtă unui observator din S, atunci cînd ea se mișcă în raport cu S.

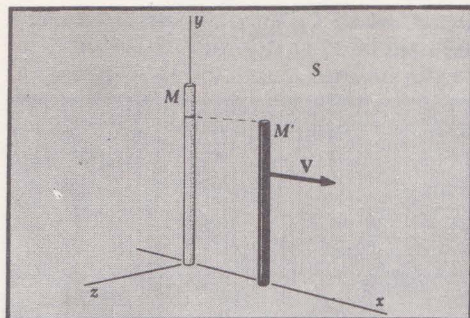


FIG. 11.3. (*c*). Ne putem aranja atunci ca extremitatea lui M' să lase o urmă (zgîrietură) pe bara M atunci cînd trece pe lîngă ea.

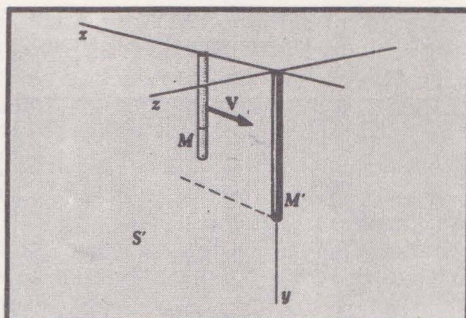
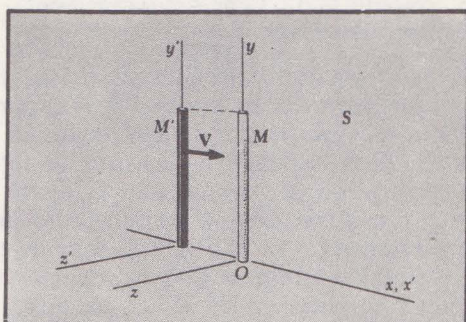


FIG. 11.3. (*d*). Zgîrietura este rezultatul fizic al unei experiențe și ea trebuie să fie observată și în alt sistem de referință; de exemplu în sistemul propriu al barei M', ea va fi răsturnată. Dar acum M trebuie să pară *mai scurtă* decît M' deoarece M se mișcă, iar M' este în repaus.

FIG. 11.3. (*e*). Apare așadar o contradicție, care se rezolvă doar dacă M și M' au aceeași lungime, chiar dacă una dintre ele este în mișcare. În concluzie, $y' = y$. Printr-un argument asemănător, rezultă $z' = z$.



sau

$$\boxed{t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma\tau = \frac{\tau}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}}, \qquad (11.11)$$

unde am luat $x_2 - x_1 = 0$, întrucît ceasul stă în același punct din sistemul S.

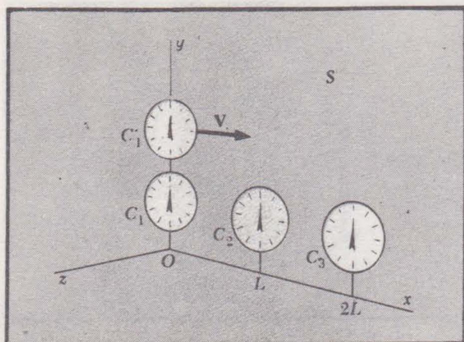


FIG. 11.4. (*a*). Ceasurile C_1, C_2, C_3, aflate în repaus în sistemul *S*, sînt distanțate la intervale egale *L* de-a lungul axei *x* și sînt sincronizate. Ceasul C_1' are viteza *V* în raport cu *S*. Presupunem $t' = 0$ atunci cînd $t = 0$, ca în figură.

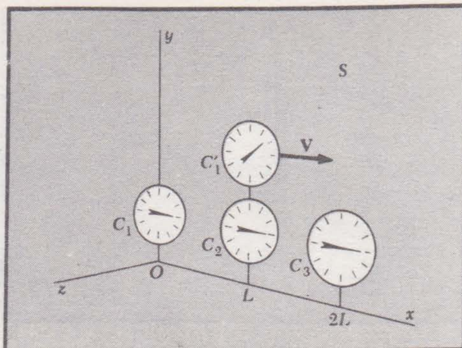


FIG. 11.4. (*b*). Transformarea Lorentz conduce la $t' = (t - xV/c^2)\gamma = t\sqrt{1 - V^2/c^2}$, întrucît $x = L = Vt$. Pentru observatorul din *S*, ceasul C_1', aflat în mișcare, rămîne în urmă.

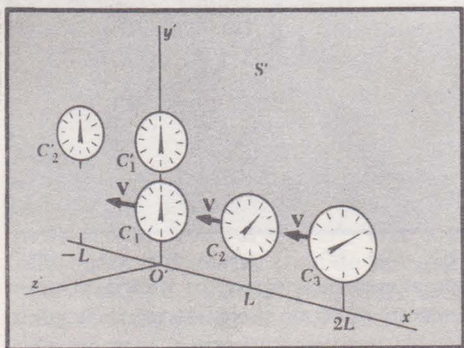


FIG. 11.5. (*a*). În *S'*, ceasurile C_1', C_2' etc. sînt în repaus, distanțate la intervale egale *L* și sincronizate. Pentru observatorul din *S'*, ceasurile C_1, C_2, C_3 nu sînt sincronizate! Ce vor arăta ele?

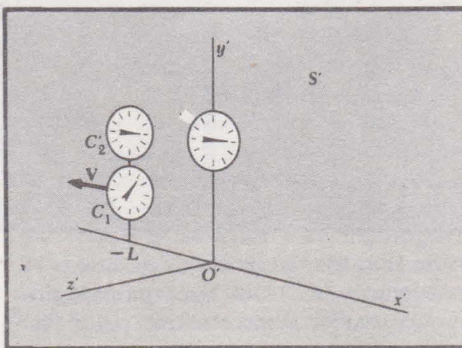


FIG. 11.5. (*b*). Pentru observatorul din *S'* ceasul C_1, aflat în mișcare, rămîne în urmă! Unde sînt ceasurile C_2, C_3, și ce indică ele în acest moment?

Acesta este intervalul de timp măsurat de un ceas aflat în repaus în sistemul *S'* și care se mișcă cu viteza $V\hat{\mathbf{x}}$ în raport cu sistemul *S* al primului ceas. Intervalul de timp măsurat în *S'* este mai lung decît cel măsurat în *S*. Dacă efectuăm însă experiența ilustrată în figurile 11.4, *a* și *b*, găsim că intervalul de timp din *S'*, măsurat în *S*, apare mai lung decît ar indica ceasul din *S'*.

Concluzia care se impune este următoarea: să considerăm două sisteme de referință *S* și *S'* aflate în mișcare rectilinie uniformă unul față de celălalt. În fiecare sistem se află în repaus cîte un observator împreună cu ceasurile sale sincronizate. Dacă într-un anumit punct din *S* au loc două evenimente separate de intervalul de timp Δt, măsurat de observatorul din *S*, atunci intervalul de timp măsurat de observatorul din *S'* va fi mai lung: $\Delta t' = \gamma\Delta t$. Dimpotrivă, pentru două evenimente care au loc în același punct din *S'* și sînt separate de intervalul $\Delta t'$, observatorul din *S* va măsura un interval de timp mai lung: $\Delta t = \gamma\Delta t'$ (vezi fig. 11.5, *a* și *b*).

Acest efect se numește *dilatarea timpului*. Ceasurile în mișcare par a rămîne în urma celor aflate în repaus. Faptul nu este ușor de înțeles în mod

intuitiv și poate trece un timp destul de lung pînă cînd dilatarea timpului vă va apărea într-o lumină satisfăcătoare. La baza paradoxului aparent stă invarianța lui c și o problemă simplă ne arată cum ne este impusă dilatarea timpului de această constanță a vitezei luminii. Să construim un ceas standard în sistemul de referință S (vezi fig. 11.6). Ceasul poate fi folosit la măsurarea timpului τ, necesar unui puls de lumină să parcurgă distanța $2L$ de la o sursă în repaus la o oglindă în repaus și înapoi. Drumul razei de lumină se află de-a lungul axei y. Atunci:

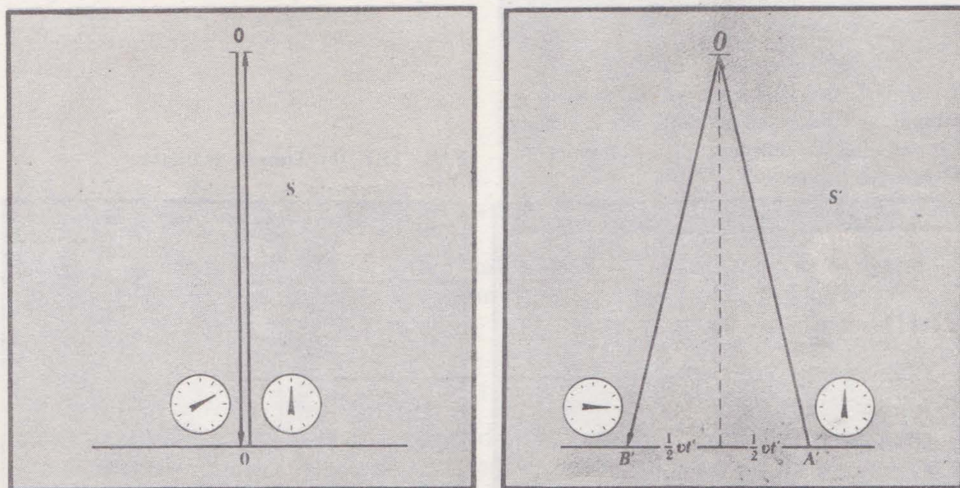
$$\tau = \frac{2L}{c}. \qquad (11.12)$$

Acest timp poate fi citit pe un cadran sau poate fi imprimat pe o bucată de hîrtie. Observatorii din orice sistem pot privi rezultatul tipărit care dă timpul de zbor al pulsului și ei vor fi cu toții de acord că un ceas aflat în repaus în sistemul S, a înregistrat timpul τ. Ce vor înregistra propriile lor ceasuri (care nu se află în S)?

Un observator aflat în sistemul S' (care se mișcă uniform în raport cu sistemul S, în direcția x) (vezi fig. 11.6) poate înregistra și el timpul cît durează experiența de reflexie a luminii efectuată în S. Observatorul din S' va măsura acest timp cu ajutorul unui set de ceasuri sincronizate aflate în repaus față de S'. Pornim două ceasuri aflate în repaus față de S', în același moment, (sincronizate) cu ajutorul unor pulsuri date de o sursă situată la jumătatea distanței dintre ele; fiecare ceas pleacă de la zero în momentul în care pulsul îl atinge. Procedeul poate fi extins la alte ceasuri. Putem, de asemenea, sincroniza oricîte ceasuri dintr-un sistem, sincronizîndu-le atunci cînd sînt apropiate și apoi separîndu-le încet pînă cînd ele ajung în pozițiile dorite.

Citind indicația dată de un ceas din S', putem fi siguri că toate celelalte ceasuri vor da aceeași indicație. În particular, putem citi indicația acelui ceas din S', care este cel mai apropiat spațial de unicul ceas din S, folosit în experiența de reflexie. Unul dintre ceasurile din S' va fi cel mai apropiat și va furniza ora, atunci cînd pulsurile pleacă în S; un alt ceas din S' va fi cel mai apropiat și va furniza ora, atunci cînd pulsurile se vor întoarce și vor fi înregistrate de ceasul din S.

FIG. 11.6. Traiectoria luminii în sistemele S și S'. Punctul A' coincide cu O în momentul emisiei. În S' lumina se deplasează de la A' la oglinda O și apoi la B'.



Drumul parcurs de lumină în S este $2L$. Dar drumul văzut din S' este mai lung deoarece aparatul din S s-a mişcat faţă de S' cu $V \cdot \frac{1}{2} t'$ în direcţia x, în timpul propagării luminii de la sursă înspre oglindă, şi cu $V \cdot \frac{1}{2} t'$, în timpul propagării luminii de la oglindă către sursă (vezi fig. 11.6). Aici t' este timpul observat în S'. Distanţa parcursă de puls în S' este:

$$2\left[L^2 + \left(\frac{1}{2} Vt'\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

şi întrucît lumina are totdeauna viteza c, această distanţă trebuie să fie egală cu ct'. Atunci:

$$(ct')^2 = 4L^2 + (Vt')^2$$

sau

$$t' = \frac{2L}{(c^2 - V^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}},$$

sau încă, referindu-ne la formula (11.12),

$$t' = \frac{\tau}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{11.13}$$

adică, reobţinem dependenţa din relaţia (11.11). Aşadar, ceasul din S va apărea observatorilor din S' ca rămînînd în urmă, deoarece ceasul din S a înregistrat un interval de timp τ, mai mic decît t'.

Vedem deci că dilatarea timpului nu implică nici un proces din interiorul atomului; efectul apare ca urmare a procesului de măsurare. Ceasul aflat în repaus în sistemul S furnizează timpul propriu atunci cînd este citit de un observator aflat în repaus în sistemul S. Dar, atunci cînd din S' măsurăm un interval de timp egal cu τ în S, observăm un interval de timp t' mai mare din cauza drumului mai lung parcurs de lumină. Orice ceas se va comporta în acelaşi fel. În particular, dacă τ este timpul de viaţă al mezonilor sau peri-

FIG. 11.7. (*a*). Alt exemplu de dilatare a timpului. O particulă instabilă este în repaus în sistemul S. Începem să o observăm la momentul $t = 0$.

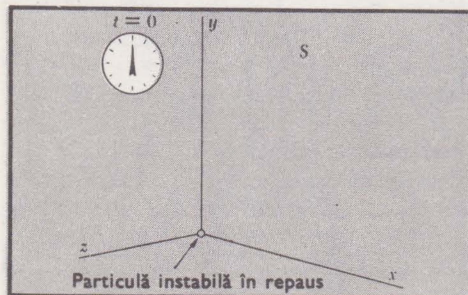
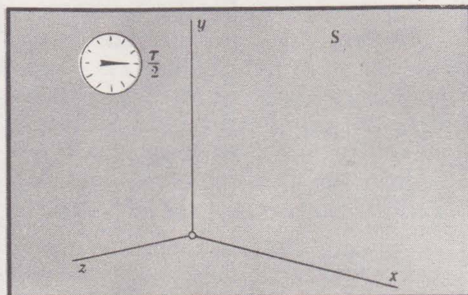


FIG. 11.7. (*b*). Timpul se dilată.



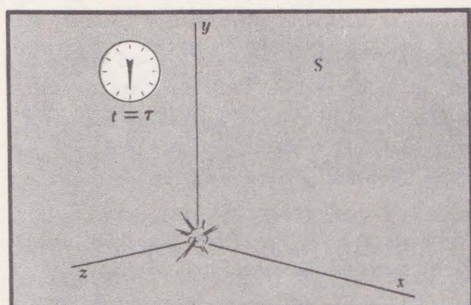


FIG. 11.7. (*c*). Particula se dezintegrează după timpul $t = \tau$.

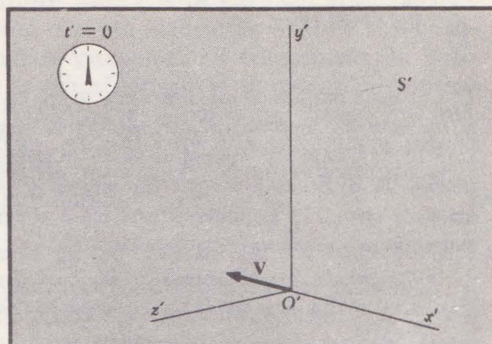


FIG. 11.7. (*d*). Același fenomen observat din S'. Acum particula are viteza V. Începem să o observăm la momentul $t' = 0 = t$.

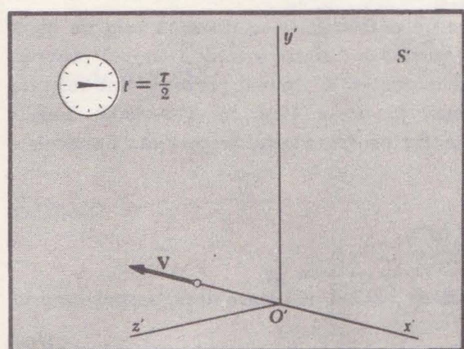


FIG. 11.7. (*e*). Timpul se dilată.

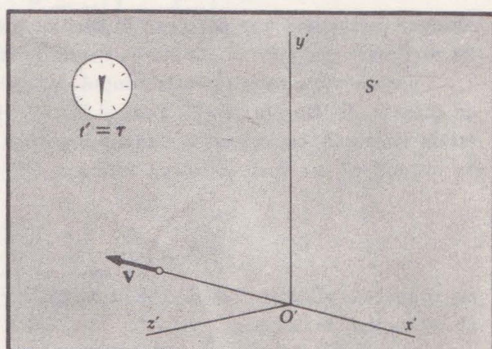


FIG. 11.7. (*f*). Dar la $t' = \tau$ particula nu s-a dezintegrat încă!

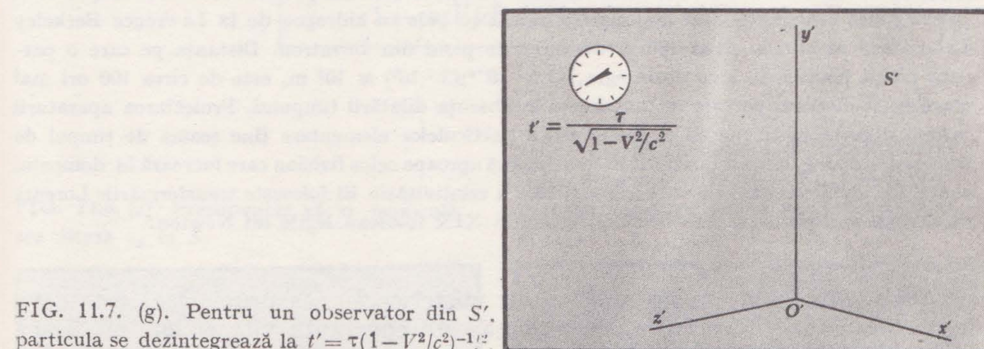


FIG. 11.7. (g). Pentru un observator din S', particula se dezintegrează la $t' = \tau(1 - V^2/c^2)^{-1/2}$.

oada de înjumătățire a unui material radioactiv, măsurate în sistemul S, în care particulele sînt în repaus, atunci:

$$t' = \frac{\tau}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{11.14}$$

este timpul de viață (respectiv perioada de înjumătățire) observat în sistemul S', în care particulele se mișcă cu viteza β. Acest fapt este ilustrat în figurile 11.7, *a-g* legate de următorul exemplu.

EXEMPLU

Timpul de viață al mezonilor π^+. Se știe că un mezon π^+ se dezintegrează într-un mezon μ^+ și un neutrin. Mezonul π^+, considerat în sistemul propriu, are un timp de viață de circa $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ s[1]. Care este timpul de viață, în sistemul laboratorului, al unui fascicul de mezoni π^+ produși la o viteză $\beta \approx 0{,}9$? Un mezon π^+ este o particulă instabilă, pozitiv încărcată, cu masa de circa 273 m, unde m este masa electronului. Mezonul μ^+ are masa de circa 207 m; neutrinul are masă de repaus nulă.

Timpul de viață propriu al mezonului π^+ este de $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ s. Dacă $\beta \approx 0{,}90$, atunci $\beta^2 \approx 0{,}81$ și din ecuația (11.14), timpul de viață în sistemul laboratorului va fi:

$$t' = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-8}}{(1 - 0{,}81)^{\frac{1}{2}}} \approx 5{,}7 \cdot 10^{-8} \text{ s.}$$

Așadar, particulele vor parcurge în medie, înainte de dezintegrare, o distanță cam de două ori mai mare decît ar da estimarea nerelativistă a produsului dintre viteză și timpul propriu.

Experiențele referitoare la timpul de viață al mezonilor π^+ (pionii pozitivi) sînt relatate de către R. P. Durbin, H. H. Loar și W. W. Havens, Jr., Phys. Rev., *88*: 179 (1952). Rezultatele concordă cu dilatarea timpului prezisă teoretic pentru viteza respectivă. Fasciculele de mezoni π^+ au fost emise cu viteza:

$$\beta = 1 - (5 \cdot 10^{-5}),$$

iar timpul de viață în fascicul este $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ s, adică de 100 ori mai mare decît timpul propriu al mezonilor în repaus.

Considerăm un fascicul de mezoni π^+ care se deplasează cu o viteză apropiată de c. Dacă efectul relativist al dilatării timpului n-ar exista, ei ar parcurge înainte de dezintegrare o distanță medie de circa $(2{,}5 \cdot 10^{-8}$ s$)$ $(3 \cdot 10^8$ m/s$) \approx 7$ m. Din cauza dilatării timpului, ei parcurg însă o distanță mult mai mare. Camera cu bule cu hidrogen de la Lawrence Berkeley Laboratory se află la circa 100 m de sursa de pioni din Bevatron. Distanța pe care o parcurg pionii înainte de a se dezintegra, $(2{,}5 \cdot 10^{-6})(3 \cdot 10^8) \approx 10^3$ m, este de circa 100 ori mai mare decît distanța pe care ar parcurge-o în absența dilatării timpului. Proiectarea aparaturii pentru experiențe la energii înalte în fizica particulelor elementare ține seama de timpul de dezintegrare lung datorat relativității. S-a spus că aproape orice fizician care lucrează în domeniul energiilor înalte verifică zilnic teoria restrînsă a relativității. El folosește transformările Lorentz cu aceeași încredere cu care fizicienii secolului XIX foloseau legile lui Newton.

Repetăm că nu se întîmplă nimic misterios cu ceasurile. Dacă este ceva misterios în teoria relativității, aceasta este constanța vitezei luminii. Dacă se admite acest fapt, tot restul decurge direct și destul de simplu. Totuși, fiecare situație nouă trebuie analizată cu atenție. Domeniul este plin de aparente paradoxuri. Poate cel mai vestit dintre ele este paradoxul gemenilor [2].

Cele două efecte, contracția lungimii și dilatarea timpului, sînt cele mai cunoscute efecte prezise de teoria restrînsă a relativității și verificate de expe-

---

[1] N_0 fiind numărul de particule radioactive la momentul $t = 0$, numărul de particule după timpul t va fi $N_0e^{-\lambda t}$. Timpul mediu de viață este $1/\lambda$; λ este constanta de dezintegrare.

[2] Recent, s-a ridicat din nou această problemă. Vezi M. Sachs, Physics Today, *24*: 23 septembrie 1971) și un grup de scrisori în Physics Today, *25*:9 (ianuarie 1972).

rientă. Cu toate acestea, mai există multe alte efecte care au fost perfect verificate experimental și dintre care vom discuta cîteva, în cele ce urmează. În primul rînd, vom discuta transformarea vitezelor. În transformarea galileiană am văzut că vitezele în direcția x se adună simplu și am putea presupune că ele se compun la fel și atunci cînd vitezele se apropie de viteza luminii. Am văzut însă în capitolul 10, că viteza luminii este cea mai mare viteză posibilă, prin urmare va trebui să ne modificăm concepția asupra compunerii vitezelor moștenită din transformarea galileiană.

Transformarea vitezelor. Presupunem că S' este un sistem de referință care se mișcă cu viteza uniformă $V\hat{\mathbf{x}}$ în raport cu sistemul de referință S. O particulă se mișcă în sistemul S cu viteza $\mathbf{v}$ de componente v_x, v_y, v_z. Care sînt componentele v'_x, v'_y, v'_z ale vitezei particulei în sistemul S' (vezi fig. 11.8, *a* și *b*)?

Din ecuația (11.7) avem:

$$x' = \gamma(x - \beta ct)\,; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)$$

de unde rezultă:

$$dx' = \gamma\, dx - \gamma\beta c\, dt; \quad dt' = \gamma\, dt - \frac{\gamma\beta dx}{c}.$$

Atunci:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\, dx - \gamma\beta c\, dt}{\gamma\, dt - \gamma\beta\, dx/c} = \frac{v_x - \beta c}{1 - v_x\beta/c}$$

sau:

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} = \frac{v_x - V}{1 - \beta v_x/c}} \qquad (11.15)$$

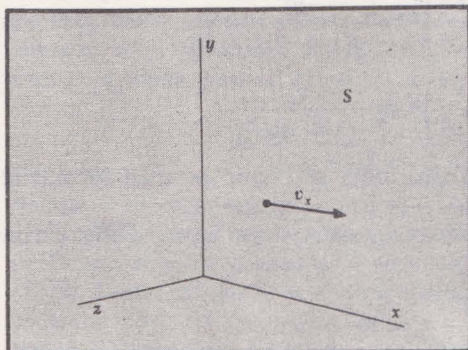


FIG. 11.8. (*a*). Presupunem că o particulă are viteza v_x în S.

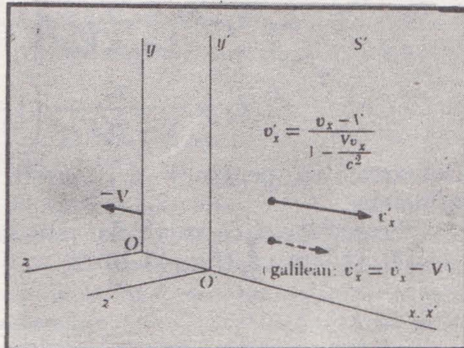


FIG. 11.8. (*b*). Atunci în S' transformarea Lorentz prezice $v'_x = (v_x - V)/(1 - v_xV/c^2)$. Transformarea galileiană ar prezice $v'_x = v_x - V$.

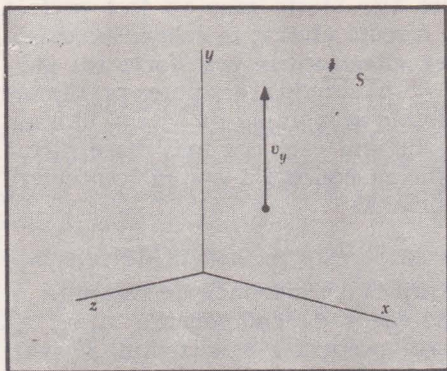


FIG. 11.9. (a). O particulă are viteza v_y în direcția y din sistemul S.

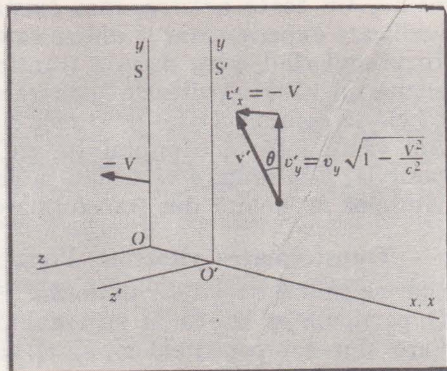


FIG. 11.9. (b). Atunci, conform transformării Lorentz, ea va avea în S' componentele desenate în figură și $|\,\mathrm{tg}\,\theta\,| = \dfrac{V}{v_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}$.

Acest rezultat poate fi comparat cu rezultatul transformării galileiene, $v'_x = v_x - V$, din capitolul 4. În mod similar, întrucît $y = y'$ și $z = z'$ (vezi fig. 11.9, *a* și *b*).

$$v'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\gamma\,\mathrm{d}t - \gamma\beta\,\mathrm{d}x/c} = \frac{v_y}{1 - v_xV/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \beta v_x/c)} \qquad (11.16)$$

și

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - v_xV/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_z}{\gamma(1 - \beta v_x/c)} \qquad (11.17)$$

Transformările inverse rezultă din ecuația (11.8) sau din rezolvarea ecuațiilor (11.15) — (11.17) în raport cu componentele v_x, v_y, v_z.

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_xV/c^2} = \frac{v'_x + V}{1 + \beta v'_x/c},$$

$$v_y = \frac{v'_y}{1 + v'_xV/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v'_y}{\gamma(1 + \beta v'_x/c)}, \qquad (11.18)$$

$$v_z = \frac{v'_z}{1 + v'_xV/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v'_z}{\gamma(1 + \beta v'_x/c)}.$$

Remarcați că, pentru $V \ll c$, aceste transformări se reduc la transformările galileiene.

Presupunem că particula este un foton și că $v_x = c$ în S. Din relația (11.15) vedem că (fig. 11.10):

$$v'_x = \frac{c - V}{1 - cV/c^2} = c.$$

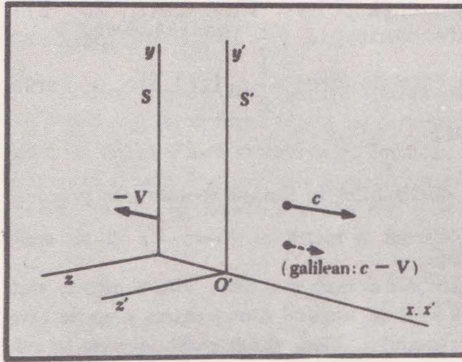


FIG. 11.10. După cum știm, dacă $v_x = c$. atunci, conform transformării Lorentz, și $v'_x = c$. Aceasta a fost de fapt una dintre ipotezele fundamentale ale teoriei.

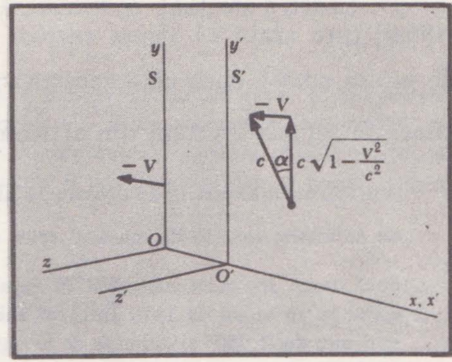


FIG. 11.11. În particular, dacă $v_y = c$, rezultanta are mărimea c în S'. Astfel:

$$|\operatorname{tg}\alpha| = \frac{V}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Aceasta este teoria relativistă a aberației.

Viteza fotonului în sistemul S' este tot c. Transformarea Lorentz a fost construită astfel încît să conducă la acest rezultat, iar faptul că obținem valoarea c în ambele sisteme, reprezintă o verificare convingătoare.

Dacă $v_y = c$ și $v_x = 0$, atunci (vezi fig. 11.11):

$$v'_x = -V \text{ și } v'_y = c\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

astfel încît:

$$\frac{v'_x}{v'_y} = -\frac{V}{c(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

și

$$\sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = c.$$

EXEMPLU

Compunerea vitezelor. Presupunem că în sistemul S' două particule se deplasează în sensuri opuse cu vitezele $v'_x = \pm\, 0{,}9\, c$. Care este viteza unei particule în raport cu cealaltă? Pentru a rezolva această problemă, fie S sistemul propriu al particulei cu viteza $-\,0{,}9\, c$. Atunci, viteza lui S' în raport cu S este $V = 0{,}9\, c$, iar particula care în S' are viteza $v'_x = 0{,}9\, c$, va avea în S viteza [vezi ec. (11.18)]:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2} \approx \frac{1{,}8c}{1 + (0{,}9)^2} = \frac{1{,}80}{1{,}81}\, c = 0{,}994\, c.$$

Remarcați că viteza relativă a celor două particule este mai mică decît c.

Dacă un foton se deplasează în S' cu viteza c, iar S' se deplasează cu viteza c față de S, fotonul se va deplasa în S cu viteza c și nu $2c$. Rezultatul este conținut în relațiile (11.18). Faptul că c apare ca o viteză limită este o consecință a structurii ecuațiilor de compunere a vitezei pe care le-am dedus din transformarea Lorentz. Menționăm că nu există *nici un* sistem de referință în care fotonul (cuanta de lumină) să fie în repaus.

D. Sadeh a efectuat o frumoasă experiență [Phys. Rev. Lett., *10*: 271 (1963)] care arată că viteza razelor γ este constantă ($\pm$ 10%) independent de viteza sursei, chiar cînd această viteză este de circa $\frac{1}{2}c$ față de o sursă aflată în repaus [1]. Cităm din articolul său:

Am folosit în experiențele noastre anihilarea pozitronilor în timpul zborului. În procesul de anihilare, centrul de masă al celor doi pozitroni se mișcă cu viteza $\frac{1}{2}c$ și se emit două raze. În cazul anihilării în repaus, cele două raze γ a căror viteză este c, sînt emise la un unghi de 180°. În cazul anihilării în zbor, unghiul dintre razele γ emise este mai mic decît 180° și depinde de energia pozitronului. Dacă viteza radiației γ se adună clasic cu viteza centrului de masă, fără a se ține seama de transformările Lorentz, atunci radiația γ care se deplasează avînd o componentă a mișcării în sensul mișcării pozitronului, va avea viteza mai mare decît c, iar cea care are o componentă în sens opus, va avea viteza mai mică decît c. Se observă că pentru distanțe egale între contoare și punctele de anihilare, cele două radiații γ ating contoarele în același timp ceea ce dovedește că, chiar pentru o sursă în mișcare, cele două radiații γ se deplasează cu aceeași viteză.

EXEMPLU

Aberația luminii. Am văzut, în relația (10.1), că pentru o stea aflată la zenit (cînd viteza Pămîntului este perpendiculară pe direcția de observație) unghiul de înclinare al telescopului, sau aberația, este dat de:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_p}{c}. \tag{11.19}$$

Acest rezultat a fost dedus folosind un argument nerelativist. Să considerăm acum problema din punct de vedere relativist, ca pe un exercițiu de aplicare a transformărilor Lorentz.

Presupunem că în sistemul de referință S, ilustrat în figura 11.11, o stea aflată în repaus în punctul O este observată cu ajutorul luminii emise de ea de-a lungul axei y. Care va fi traiectoria în sistemul S' a acestor raze care în sistemul S se mișcă de-a lungul axei y? În S, componentele vitezei sînt $v_x = 0$, $v_y = c$, $v_z = 0$. Componentele vitezei în S' se obțin prin aplicarea transformărilor (11.15) – (11.17). Astfel:

$$v'_x = -V;\ v'_y = \frac{c}{\gamma};\ v'_z = 0.$$

Așadar, direcția acestor raze în S' este dată de unghiul:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-v'_x}{v'_y} = \frac{\gamma V}{c} = \beta\gamma = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

sau (11.20)

$$\sin\alpha = \frac{V}{c} = \beta.$$

Acesta este rezultatul corect; el coincide în limita erorilor experimentale cu rezultatul nerelativist (11.19), deoarece, pentru mișcarea Pămîntului, raportul V/c este mic, fiind de aproximativ 10^{-4}.

[1] Pentru o prezentare mai detaliată, vezi J. G. Fox, J. Opt. Soc. Am., *57*: 967 (1967).

EXEMPLU

Efectul Doppler longitudinal. Considerăm două pulsuri de lumină emise la momentele $t = 0$ și $t = \tau$ de o sursă aflată în repaus în punctul $x = 0$ din sistemul S. Sistemul S' se mișcă cu viteza $V\hat{x}$ în raport cu S. Primul puls este recepționat în punctul $x' = 0$ din S', la momentul $t' = 0$. Punctul din S' care coincide cu $x = 0$ la $t = \tau$ este dat de transformarea Lorentz (11.7), în care luăm $x = 0$:

$$x' = \frac{x - Vt}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-V\tau}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Timpul corespunzător în S' este:

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\tau}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Timpul necesar celui de-al doilea puls să parcurgă, în S', distanța de la $-V\tau/(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$ pînă la origine, este:

$$\Delta t' = \frac{\tau V/c}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

astfel încît, în S', intervalul total de timp dintre recepționarea în $x' = 0$ a celor două pulsuri este:

$$t' + \Delta t' = \tau \frac{1 + V/c}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \tau \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Timpul scurs între cele două semnale poate fi interpretat la fel de bine și ca timpul scurs între două noduri succesive ale undei luminoase. Frecvența fiind inversa perioadei undei, rezultă:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \qquad (11.21)$$

Aici ν' este frecvența observată în S', iar ν este frecvența de emisie în S. Dacă observatorul se îndepărtează de sursă, atunci $\beta = V/c$ este pozitiv, iar ν' este mai mic decît ν. Dacă observatorul se apropie de sursă, vom lua β negativ și ν' va rezulta mai mare decît ν. În funcție de lungimile de undă și ținînd seama că $\lambda = c/\nu$ și $\lambda' = c/\nu'$, rezultă:

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \qquad (11.22)$$

Relația (11.21) descrie efectul Doppler longitudinal relativist pentru undele luminoase în vid. Deplasarea frecvenței coincide, pînă în ordinul β, cu rezultatul nerelativist (10.7) dedus în capitolul 10 [1]. Termenii de ordinul β^2 din dezvoltarea în serie a expresiei (11.21) au fost confirmați experimental de către Ives și Stilwell.

H. E. Ives și G. R. Stilwell [J. Opt. Soc. Am., *28*: 215 (1938); *31*: 369 (1941)] au efectuat experiențe spectroscopice cu fascicule de hidrogen atomic aflat în stări excitate. Atomii erau accelerați, ca ioni de hidrogen H_2^+ și H_3^+, intr-un cîmp electric intens. Hidrogenul atomic era format ca un produs de rupere a ionilor.

---

[1] Cititorul va arăta că pentru $\beta \ll 1$, $\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = 1 + \beta$.

Viteza β a atomilor era de circa 0,005. Ives și Stilwell căutau o deplasare a lungimii de undă *medii* a unei anumite linii spectrale, emise de către atomii de hidrogen. Lungimea de undă medie este media aritmetică a lungimilor de undă „înainte" și „înapoi" pe direcția de zbor a atomilor. Folosind $\beta_{inainte} = -\beta_{inapoi}$ în formula (11.22), se obține pentru lungimea de undă medie:

$$\frac{1}{2}(\lambda_{inainte} + \lambda_{inapoi}) = \frac{1}{2}\lambda_0\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right) = \frac{\lambda_0}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (11.23)$$

Aceasta reprezintă o deplasare de ordinul β^2 a poziției medii a liniilor spectrale în raport cu lungimea λ_0, emisă de atomul în repaus. În articolul lor din 1941, Ives și Stilwell au anunțat observarea unei deplasări de 0,074 Å a lungimii de undă medii, față de valoarea 0,072 Å, calculată din ecuația (11.23) pentru o valoare β dedusă din potențialul de accelerare aplicat ionilor inițiali. Aceasta este o confirmare strălucită a teoriei efectului Doppler relativist.

Efectul Doppler transversal este pus în evidență în observații efectuate la un unghi drept față de direcția de deplasare a sursei de lumină, care în mod obișnuit este un atom. În aproximația nerelativistă nu există efect Doppler transversal. Efectul Doppler transversal pentru undele luminoase este prezis numai în cadrul teoriei relativității; frecvențele fiind legate de inversele intervalelor de timp din ecuația (11.11), rezultă:

$$\nu' = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\nu,$$

unde ν este frecvența în sistemul propriu al atomului, iar ν' este frecvența observată într-un sistem care se mișcă cu viteza $V(=\beta c)$ în raport cu atomul.

Ceasuri accelerate. Teoria restrînsă a relativității descrie și corelează măsurători independente de detaliile de structură ale corpurilor reale. Ea nu prevede efectele dinamice ale accelerării, ca de exemplu tensiunile induse de accelerări. Dacă aceste tensiuni lipsesc sau pot fi neglijate, atunci teoria ne furnizează o descriere neambiguă a efectelor accelerării asupra mersului ceasurilor. Rezultatul este același ca și în cazul în care ceasul accelerat ar avea în fiecare moment o altă viteză, iar timpul indicat de el s-ar calcula folosind în ecuația (11.11) viteza instantanee.

Dacă această previziune este corectă, apar două consecințe:

1. Dacă viteza este constantă în modul, dar direcția ei variază, atunci formula (11.11) este valabilă fără nici o modificare. Sistemul propriu al ceasului este neinerțial.

2. Dacă viteza este constantă, cu excepția unor scurte intervale de accelerare sau decelerare (intervale neglijabile în raport cu timpul total), atunci formula (11.11) va da cu precizie legătura dintre timpul propriu și timpul în sistemul laboratorului.

O particulă încărcată care se mișcă cu viteză mare într-un cîmp magnetic suferă o accelerație perpendiculară pe direcția mișcării sale, dar modulul vitezei ei nu variază. Dacă particula este instabilă, timpul de viață observat va fi exact același ca și în cazul în care ea s-ar mișca cu aceeași viteză pe o

traiectorie rectilinie, în absența cîmpului magnetic. Această previziune a fost confirmată de experiențele cu mezoni μ^-, care se dezintegrează cu un timp de viață de $2,2 \cdot 10^{-6}$ s, într-un electron și doi neutrini. Timpul de viață propriu observat a fost același, atît pentru mezonii μ^- aflați în repaus, cît și pentru cei care se mișcau liber sau pe o traiectorie în formă de spirală într-un cîmp magnetic. Se crede că teoria restrînsă a relativității dă o bună descriere a mișcării circulare (accelerate) a particulelor în cîmp magnetic.

PROBLEME

1. *Invarianța Lorentz.* Verificați cu ajutorul relației (11.7) că:

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2.$$

Remarcați că, dacă notăm $x_1 \equiv x$; $x_4 \equiv ict$, atunci $x^2 - c^2t^2 \equiv x_1^2 + x_4^2$. Aici $i = \sqrt{-1}$.

2. *Transformarea Lorentz.* Pornind de la relația (11.7), demonstrați formulele de transformare (11.8).

3. *Schimbarea volumului.* Arătați că dacă volumul unui cub în repaus este L_0^3, atunci volumul său într-un sistem care se mișcă cu viteza uniformă β într-o direcție paralelă cu una dintre muchiile cubului, este:

$$L_0^3(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

4. *Simultaneitatea.* Pornind de la transformarea Lorentz, arătați că două evenimente simultane ($t_1 = t_2$) aflate în puncte diferite ($x_1 \neq x_2$) în sistemul S, nu sînt, în general, simultane în sistemul S'.

5. *Schimbarea unghiului.* Calculați, în S', lungimea și unghiul făcut cu axa x', pentru o bară care în sistemul S are lungimea L_0 și face unghiul θ cu axa x. Sistemul S' se mișcă cu viteza $V\hat{\mathbf{x}}$ în raport cu sistemul S.

6. *Compunerea vitezelor.* Arătați că, dacă în sistemul S' au loc relațiile $v'_y = c \sin \theta$ și $v'_x = c \cos \theta$, atunci în sistemul S are loc egalitatea:

$$v_x^2 + v_y^2 = c^2.$$

Sistemul S' se mișcă cu viteza $V\hat{\mathbf{x}}$ în raport cu sistemul S.

7. *Mezonii* π^+

(*a*) Care este timpul de viață al unui puls de mezoni π^+ care se deplasează cu viteza $\beta = 0,73$? (Timpul de viață în sistemul propriu, τ, este $2,5 \cdot 10^{-8}$ s.)

R: $3,6 \cdot 10^{-8}$ s.

(*b*) Ce distanță se parcurge cu viteza $\beta = 0,73$ în timpul de viață?

R: 8 m.

(*c*) Ce distanță s-ar parcurge în absența efectelor relativiste?

R: 5,5 m.

(*d*) Răspundeți la întrebările (*a*) – (*c*) pentru $\beta = 0,99$.

8. *Mezonii* μ. Timpul de viață la mezonilor μ este de circa $2 \cdot 10^{-6}$ s. Să

presupunem că o jerbă mare de mezoni μ produsă în atmosferă la o anumită înălțime se deplasează în jos cu viteza $v = 0,99\ c$. Numărul de ciocniri în atmosferă este mic.

(*a*) Dacă doar 1% din mezonii aflați în jerba inițială ating suprafața Pămîntului, estimați înălțimea la care se produce jerba. [În sistemul propriu al mezonilor μ, numărul de particule care nu s-au dezintegrat pînă la momentul t este dat de $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$.]

R: $2 \cdot 10^4$ m.

(*b*) Calculați această distanță așa cum apare ea în sistemul propriu al mezonilor.

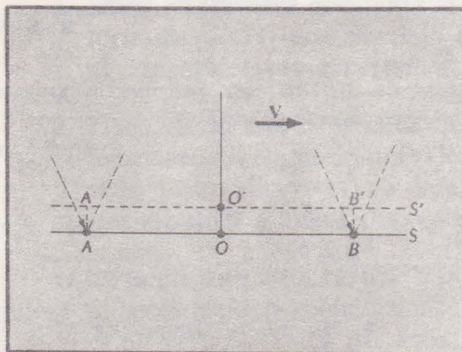
9. *Două evenimente*. Să considerăm sistemele de referință inerțiale S și $S' \cdot S'$ se mișcă cu viteza $V\hat{x}$ în raport cu S. În punctul x'_1 are loc un eveniment la momentul t'_1. În x'_2 are loc un alt eveniment la momentul t'_2. Originile celor două sisteme coincid la $t = t' = 0$. Găsiți timpii și distanțele corespunzătoare în S.

10. *Mezonii* π^+. Un puls de 10^4 mezoni π^+ se deplasează pe o traiectorie circulară cu raza de 20 m, cu o viteză de $0,99\ c$. Timpul de viață propriu al mezonilor π^+ este de $2,5 \cdot 10^{-8}$ s.

(*a*) Cîți mezoni se vor reîntoarce în punctul de plecare?

(*b*) Cîți mezoni ar fi rămas nedezintegrați, dacă ei ar fi stat în repaus același interval de timp?

FIG. 11.12.



11. *Viteza de îndepărtare a galaxiei*. Am arătat în capitolul 10 că datele referitoare la deplasarea spre roșu a luminii provenite de la galaxiile îndepărtate, dau, pentru domeniul nerelativist, o viteză de îndepărtare proporțională cu distanța:

$$V = \alpha r, \quad \alpha \approx 1,6 \cdot 10^{-18}\ \text{s}^{-1}.$$

Calculați viteza de îndepărtare a unei galaxii aflate la distanța de $3 \cdot 10^9$ ani-lumină. Este această viteză relativistă?

R: $4,5 \cdot 10^7$ m/s.

12. *Viteze galactice*. Observăm o galaxie care se îndepărtează într-o anumită direcție cu viteza $V = 0,3\ c$ și o alta, care se îndepărtează în sens opus, cu aceeași viteză. Cu ce viteză s-ar observa dintr-o galaxie îndepărtarea celeilalte?

13. *Simultaneitate*. Considerăm două surse aflate în repaus în punctele A și B, egal distanțate de observatorul O din sistemul S. Presupunem că în momentul (determinat de observator în S) în care cele două surse emit cîte un puls luminos, un alt observator O', împreună cu sistemul său S', aflat în mișcare cu viteza $V\hat{x}$ în raport cu S, coincid respectiv cu O și cu sistemul S (vezi fig. 11.12).

(*a*) Presupunem $V/c = \dfrac{1}{3}$. Desenați poziția celor două sisteme și a punctelor A, A', B, B' cînd semnalul din B ajunge la observatorul O'. A ajuns acest semnal și la observatorul O? De ce?

(*b*) Desenați pozițiile lui S și S' în momentul în care ambele semnale ajung în O.

(*c*) Desenați pozițiile lui S și S' în momentul în care semnalul din A ajunge în O'.

(*d*) Presupunem că cele două evenimente sînt înregistrate în punctele A', B', printr-un procedeu fizic, de exemplu pe plăci fotografice. Arătați că, în condițiile acestei probleme, distanțele $A'O'$ și $B'O'$ sînt egale.

(*e*) Arătați că cele două evenimente nu apar simultane atunci cînd sînt observate din O'. Constanța vitezei luminii în toate situațiile este admisă implicit în

definirea simultaneității. Pentru a face clară această dependență, să considerăm următoarele. Presupunem că cele două evenimente din A și B sînt emisiile de pulsuri sonore, simultan observate de un observator O, aflat în repaus față de mediul în care se propagă sunetul. Presupunem că O' este un observator care se mișcă cu o viteză V egală cu o treime din viteza sunetului.

(*f*) Folosiți transformarea galileiană pentru a arăta că viteza pulsurilor sonore emise din A și B către O' *nu* este egală cu cea observată de O'.

(*g*) Arătați că, chiar dacă cele două semnale ajung în O' la momente diferite, faptul că pulsurile s-au deplasat cu viteze diferite, compensează aceasta și că cele două evenimente sînt considerate a fi simultane, chiar și pentru observatorul O'.

14. *Efectul Doppler relativist.* Se accelerează protoni la o diferență de potențial de 20 kV, după care sînt lăsați să se deplaseze cu viteză constantă printr-o regiune în care are loc neutralizarea lor în atomi de hidrogen, însoțită de o emisie de lumină corespunzătoare. Emisia H_β (λ = 4 861,33 Å pentru un atom în repaus) se observă cu un spectrometru. Axa optică a spectrometrului este paralelă cu direcția de mișcare a ionilor. Spectrul este deplasat ca urmare a efectului Doppler, din cauza mișcării ionilor pe direcția emisiei. Aparatul mai conține o oglindă așezată astfel încît să permită suprapunerea în același loc a spectrului luminii emise în sens opus.

Reamintim că 1 Å $= 10^{-10}$ m.

(*a*) Care este viteza protonilor după accelerare?

R: $2 \cdot 10^6$ m/s.

(*b*) Calculați deplasările Doppler în primul ordin al raportului v/c, corespunzătoare sensurilor înainte și înapoi și indicați apariția părții relevante a spectrului pe un grafic.

(*c*) Considerați acum efectul Doppler în ordinul al doilea al raportului v/c, care apare în urma unor considerații relativiste. Arătați că deplasarea în ordinul al doilea este $\frac{1}{2}\lambda(v^2/c^2)$ și evaluați numeric această deplasare pentru problema în speță. Remarcați că apare aceeași deplasare atît pentru mișcarea cu viteza + v, cît și pentru cea cu viteza − v.

R: 0,10 Å.

LECTURI SUPLIMENTARE

În ultimii ani s-au publicat multe cărți despre relativitate, cîteva dintre ele în ediții broșate. Titlurile care urmează reprezintă o selecție.

J. A. Wheeler și E. F. Taylor, *Introducere în fizica spațiului și timpului* („Space — Time Physics — An Introduction"), W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1965. Foarte recomandată. Nu este un manual; excelentă pentru studiul individual.

A. P. French, *Relativitatea restrînsă* („Special Relativity"), W. W. Norton and Company, Inc., New York, 1968. Face parte din seria de fizică generală editată la Massachusetts Institute of Technology.

C. Kacser, *Introducere în teoria restrînsă a relativității* („Introduction to the Special Theory of Relativity"). Broșură Co-Op, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1967.

R. S. Shankland, *Convorbiri cu Albert Einstein* („Conversations with Albert Einstein"), Am. J. Phys. *31*: 47 (1963).

Teoria restrînsă a relativității („Special Relativity Theory"), retipăriri alese, publicate pentru A.A.P.T. (Asociația americană a profesorilor de fizică), American Institute of Physics, 335 East 45 th St., New York, 1962. Conține o foarte bună analiză a celebrului paradox al gemenilor; vezi în special articolele lui Darwin, Crawford și McMillan.

M. Born, *Teoria relativității a lui Einstein* („Einstein's Theory of Relativity"), E. P. Dutton & Co., Inc., New York, 1924; retipărire, Dover Publications, Inc., New York, 1962. O prezentare amănunțită, completă și clară a teoriei restrînse a relativității.

H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski și H. Weyl, *Principiul relativității: o culegere de articole originale* („The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs"), traducere de W. Perrett și G. B. Jeffery, Methuen & Co., Ltd., London, 1923; retipărire, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

W. Pauli, *Teoria relativității* („Theory of Relativity"), traducere de G. Field, Pergamon Press, New York, 1958. Traducerea unei excelente monografii în limba germană (Relativitätstheorie, publicată de B. G. Teubner, Leipzig, 1921). Conținutul părții întîi nu este greu.

E. Whittaker, *Istoria teoriilor eterului și electricității* („History of the Theories of Aether and Electricity"), 2 volume, Harper & Row, Publishers, Incorporated, New York, retipărire, în ediție broșată, 1960.

12

Dinamica relativistă: impulsul şi energia

Cuprins

Schimbarea fundamentală a conceptelor noastre de spaţiu şi timp, aşa cum apar ele în transformările Lorentz, influenţează puternic întreaga fizică. Trebuie să cercetăm din nou legile fizicii dezvoltate şi confirmate la viteze mici ($v \ll c$), pentru a vedea dacă ele sînt compatibile cu teoria relativităţii. Nu trebuie să ne surprindă faptul că legile se schimbă dacă sînt transpuse în domenii noi. Legile se schimbă astfel încît la viteze mici regăsim formele newtoniene, care, după cum ne-o confirmă experienţa, sînt exacte în limita vitezelor mici.

Ca şi în capitolul 4, acceptăm ca legi fizice posibile numai acele legi care au aceeaşi formă în toate sistemele de referinţă inerţiale. Numai că pentru a afla cum se transformă o lege fizică în trecerea de la un sistem de referinţă la altul, folosim acum transformările Lorentz în locul transformărilor galileiene. Transformarea Lorentz se reduce la transformarea galileiană atunci cînd $v/c \ll 1$. În loc să insistăm asupra invarianţei legilor fizice la transformările galileiene, vom insista asupra invarianţei lor la transformările Lorentz.

Doi observatori, aflaţi în sistemele de referinţă S şi S' deduc legi fizice. Fiecare le exprimă în funcţie de lungimi, durate, viteze, sau acceleraţii, aşa cum le măsoară în propriul său sistem. Legile trebuie să aibă aceeaşi formă atît în variabilele din sistemul S, cît şi în cele din sistemul S'. Aşadar, atunci cînd folosim transformarea Lorentz pentru a trece de la x, y, z, t din S la x', y', z', t' din S', orice lege fizică dedusă în S este transpusă, fără schimbarea formei, în variabilele din S'. Sensul acestei invarianţe va deveni clar după ce vom analiza cîteva probleme particulare.

CONSERVAREA IMPULSULUI ŞI DEFINIŢIA IMPULSULUI RELATIVIST

Dorim să găsim o definiţie a impulsului $\mathbf{p}$ care, pentru $v/c \ll 1$, să se reducă la $M\mathbf{v}$, unde M este masa de repaus [1] şi care să asigure conservarea impulsului în ciocniri, independent de viteza particulelor în raport cu sistemul de referinţă. Vom găsi definiţia potrivită, considerînd o ciocnire particulară. Vom arăta întîi printr-un exemplu, că impulsul newtonian (nerelativist) $M\mathbf{v}$ nu se conservă în ciocnirile care au loc la viteze *relativiste* [2]. Putem vedea deja că legea a

[1] Masa de repaus se defineşte ca masa inertă în limita nerelativistă $v/c \ll 1$, în particular pentru $v = 0$.

[2] Problema: cît de mare trebuie să fie v pentru a fi relativist, depinde de precizia rezultatelor experimentale. Vom vedea că dacă $(v/c)^2$ poate fi neglijat în raport cu 1, putem considera viteza nerelativistă.

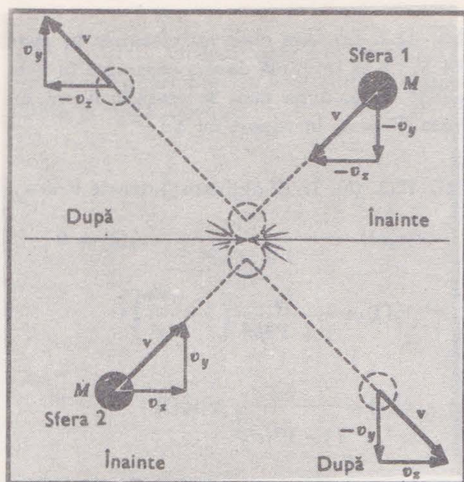


FIG. 12.1. (*a*). Ciocnirea, în planul *xy*, a două sfere de mase *M*. Sînt desenate componentele după axele *x* și *y* ale vitezelor înainte și după ciocnire.

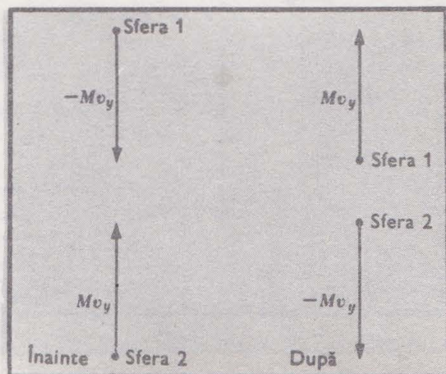


FIG. 12.1. (*b*). Impulsurile individuale nerelativiste în direcția *y*. Impulsul *total* pe direcția *y* este zero, atît înainte, cît și după ciocnire.

doua a lui Newton nu este valabilă dacă M este constant, căci accelerația $\mathbf{a}$ este egală cu $\mathbf{F}/M$ și dacă forța ar acționa un timp suficient de lung, v ar fi mai mare decît c.

Să considerăm figurile 12.1, *a* și *b* care ilustrează ciocnirea între particule de *mase egale*. Alegem un sistem de referință S astfel încît particulele se apropie una de cealaltă cu viteze egale și de sens contrar: componenta y a vitezei particulei 1 este $-v_y$ înainte de ciocnire și $+v_y$ după ciocnire. În acest sistem de referință, centrul de masă se află în repaus. Din considerente de simetrie, componenta y a impulsului total este zero, atît înainte cît și după ciocnire.

Acest lucru va fi adevărat, independent de definiția impulsului, cu condiția ca el să aibă semne diferite pentru $\pm v_y$. Așadar, nu întîmpinăm dificultăți aici cu definiția newtoniană a impulsului $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ (indiferent dacă expresia este sau nu corectă); variația lui p_y pentru particula 1 este $+2Mv_y$ și variația lui p_y pentru particula 2 este $-2Mv_y$, astfel încît variația totală a componentei y a impulsului newtonian este nulă.

Să considerăm acum un alt sistem de referință S', care se mișcă cu viteza particulară $\mathbf{V} = v_x\hat{\mathbf{x}}$, în raport cu sistemul S, ca în figura 12.2, *a*. Remarcați că v_x este componenta x a vitezei particulei 2 în S, iar $-v_x$ este componenta x a particulei 1. Compunerea relativistă a vitezelor descrisă de ecuațiile (11.15)—(11.17) poate fi folosită la aflarea componentelor vitezelor în S' (reamintim că $V = v_x$):

$$-v_x'(1) = \frac{-v_x - V}{1 + v_x V/c^2} = \frac{-2v_x}{1 + v_x^2/c^2}$$

$$v_y'(1) = \frac{v_y}{1 + v_x V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_y}{1 + v_x^2/c^2}\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{12.1}$$

$$v_x'(2) = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} = 0$$

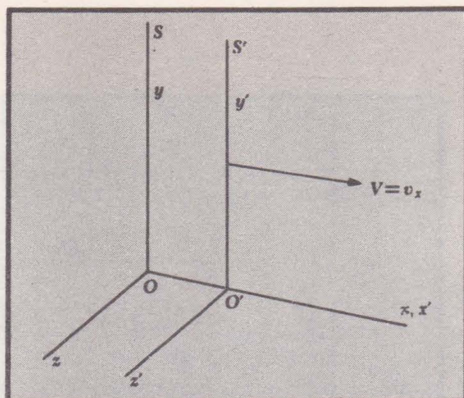


FIG. 12.2. (*a*). Am observat ciocnirea în sistemul S. Ce se întîmplă dacă o observăm în sistemul S', care, după cum se arată în figură, are viteza $V = v_x$ în raport cu S?

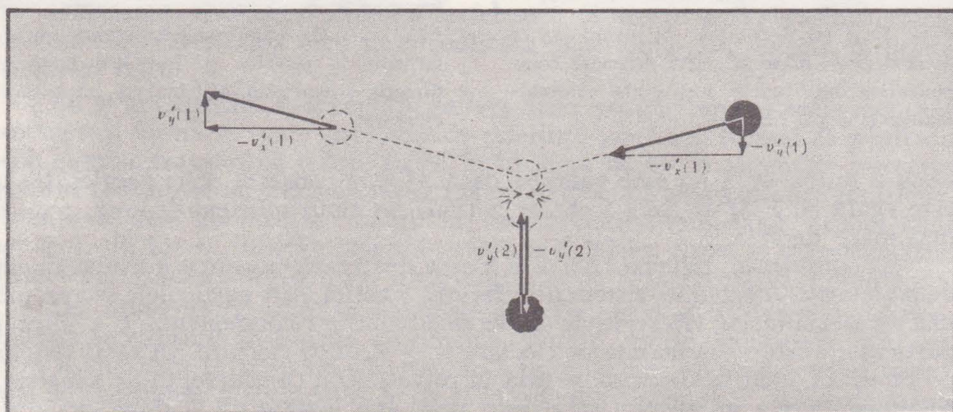
FIG. 12.2. (*b*). În S' obținem (întrucît $V = v_x$),

$$-v'_x(1) = -\frac{2V}{1 + V^2/c^2}; \quad v'_x(2) = 0$$

$$v'_y(1) = \frac{v_y}{1 + V^2/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

și

$$v'_y(2) = \frac{v_y}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} > v'_y(1)$$



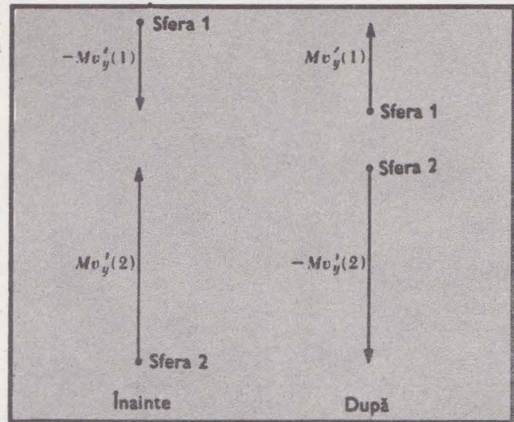
$$v'_y(2) = \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_y}{(1 - v_x^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{12.2}$$

Aceste rezultate sînt ilustrate în figura 12.2, *b*. [Remarcați că în figură expresiile sînt date în funcție de V, pe cînd în ecuațiile (12.1) și (12.2) ele sînt date întîi în funcție de v_x și V și apoi numai în funcție de v_x.]

Evident, mărimile componentelor y ale vitezei în S', date de ecuațiile (12.1) și (12.2), nu sînt egale, chiar dacă ele ar fi egale în S. Diferența în mărimile componentei y a vitezelor în S' apare din faptul că componentele x ale vitezelor în S nu sînt aceleași; ele sînt egale, dar de semn contrar. Situația este ilustrată în figura 12.2, *c*. Variațiile impulsului nerelativist, $-2Mv'_y$ (2) și $2Mv'_y$ (1) nu vor fi egale și de semn contrar. Vedem așadar, că o definiție în care impulsul este direct proporțional cu viteza nu poate asigura conservarea impulsului în toate sistemele de referință. Sau conservarea impulsului este incompatibilă cu transformarea Lorentz, sau există o altă definiție a sa, astfel încît conservarea impulsului să fie valabilă în toate sistemele ca e se mișcă unul față de celălalt cu viteză constantă.

Vom căuta acum o definiție Lorentz invariantă a impulsului. Definiția trebuie să fie astfel încît componenta y a impulsului particulei să fie independentă de componenta x a vitezei sistemului de referință în care se observă

FIG. 12.2. (*c*). În noul sistem S' impulsul nerelativist după direcția y' nu este același înainte și după ciocnire.



ciocnirea. Dacă se găsește o astfel de definiție, atunci conservarea componentei y a impulsului particulei într-un sistem de referință, asigură conservarea ei în toate sistemele. Știm că deplasarea Δy în direcția y rămîne invariantă la transformarea Lorentz. Dar timpul Δt în care se parcurge distanța Δy depinde de sistemul de referință și atunci viteza $v_y = \Delta y/\Delta t$ depinde de sistemul de referință. În loc de a folosi ceasurile din sistemul laboratorului pentru a măsura pe Δt, putem folosi un ceas legat de particulă. Acest ceas va măsura timpul propriu al particulei $\Delta\tau$. *Toți observatorii vor fi de acord cu valoarea lui* $\Delta\tau$. Așadar, mărimea $\Delta y/\Delta\tau$ este aceeași în toate sistemele de referință. Știm că Δt și $\Delta\tau$ diferă prin factorul de dilatare a timpului din ecuația (11.11), astfel încît avem:

$$\Delta\tau = \Delta t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{12.3}$$

unde v este viteza particulei în raport cu sistemul de referință în care este măsurat Δt. De aici rezultă:

$$\frac{\Delta y}{\Delta\tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Vedem că componenta y a lui $\mathbf{v}/(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ va fi aceeași în toate sistemele de referință care diferă doar prin componenta x a vitezei lor. Dacă *definim* impulsul relativist prin relația:

$$\boxed{\mathbf{p} \equiv \frac{M\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}} \tag{12.4}$$

atunci conservarea componentei y a impulsului este valabilă în orice sistem inerțial, care se mișcă față de unul aflat în repaus, cu o viteză constantă îndreptată de-a lungul axei x. Remarcați că folosind definițiile $\beta = v/c$ și $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$, introduse în capitolul 11, putem scrie pentru mărimea impulsului:

$$p = Mc\,\beta\gamma. \tag{12.5}$$

Figura 12.3 ilustrează această nouă definiție a impulsului în funcție de v.

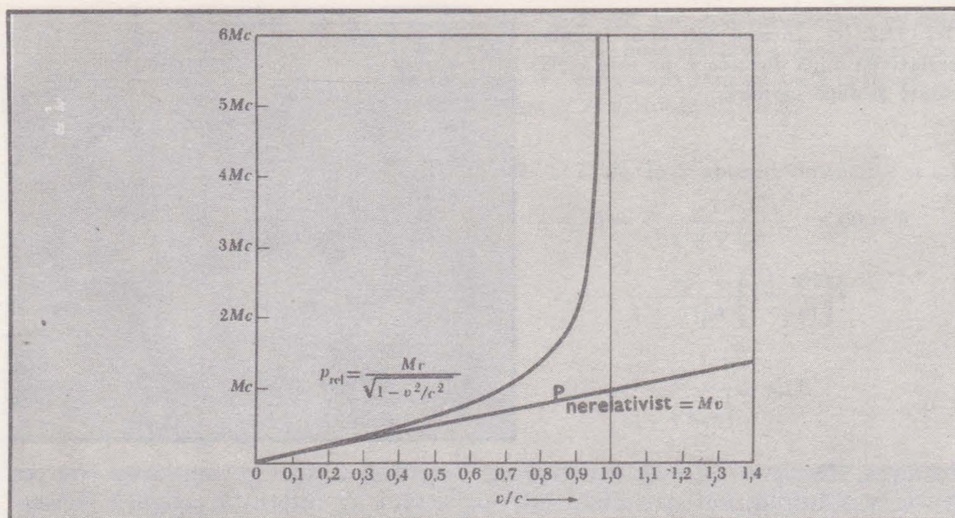


FIG. 12.3. Pentru ca impulsul să se conserve in *orice* sistem, redefinim p după cum urmează. Pentru o particulă cu viteza v și masa de repaus M,

$$\mathrm{p} = \frac{M\mathrm{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Mărimile impulsurilor relativist și nerelativist sînt trasate pe grafic.

În discuția de pînă acum, am folosit pentru simplitate axe de coordonate simetric dispuse în raport cu mișcările, astfel încît nu apăreau modificări în componenta x a vitezei niciunei particule. Întrucît nu există modificări nici în componenta y, definiția (12.4) asigură și conservarea componentei x a impulsului. Vom vedea în paragraful „Transformarea impulsului și energiei" (pagina 378) că, în general, transformarea impulsului în S' este legată atît de impulsul cît și de energia din S. Cititorul poate arăta că, chiar dacă particula 2 are masa diferită de a particulei 1, argumentul de mai sus este valabil, astfel încît avem o lege relativistă de conservare a impulsului. Pentru $v/c \ll 1$ definiția impulsului se reduce la cazul nerelativist, $p = Mv$. Este un fapt experimental dovedit că impulsul definit de relația (12.4) se conservă în toate procesele de ciocnire.

Putem scrie impulsul relativist [ecuația (12.4)]:

$$\mathrm{p} = M(v)\mathrm{v}$$

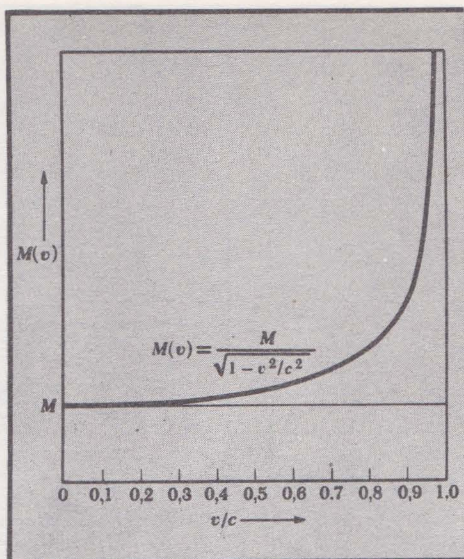
și interpretăm mărimea:

$$\boxed{M(v) \equiv \frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} = M\gamma} \qquad (12.6)$$

drept masa relativistă a particulei de viteză v și masă de repaus M. Ea este ilustrată în figura 12.4. Masa de repaus este masa obținută în limita $v \to 0$. Cînd $v \to c$, $M(v)/M \to \infty$. Creșterea relativistă a masei a fost verificată în numeroase experiențe de deviere a electronilor; ea este, de asemenea, implicit verificată în funcționarea oricărui accelerator de particule de mare energie. O altă formulare a relației (12.6), dată în paginile următoare, evidențiază în mod direct legătura dintre energia relativistă și impuls, și este deseori mai simplu de aplicat.

FIG. 12.4. Noua definiție a impulsului conduce la această comportare a masei:

$$M(v) = \frac{M}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot$$



În unele cărți se folosește M pentru masa variabilă și se scrie $M = M_0/\sqrt{1 - v^2/c^2} = \gamma M_0$, unde M_0 este masa de repaus. Vom continua însă să notăm masa de repaus cu M, iar masa relativistă variabilă cu γM, sau uneori cu $M(v)$.

ENERGIA RELATIVISTĂ

Ce este energia cinetică relativistă? Prin ce vom înlocui expresia $\frac{1}{2} Mv^2$ pentru a obține o expresie relativistă semnificativă? În primul rînd, să ne reamintim cum am definit energia cinetică în capitolul 5: ea era energia căpătată de o particulă liberă, aflată inițial în repaus, atunci cînd se efectua asupra ei un lucru mecanic. Reținem această definiție și scriem legea a doua a lui Newton sub forma:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

unde timpul t și forța F se referă la cantitățile măsurate în sistemul laboratorului în care se observă impulsul p. (Transformarea forței dintr-un sistem de referință în altul este tratată ceva mai departe în acest paragraf.) Presupunem că $\mathbf{F}$ este pe direcția x. Atunci, lucrul mecanic L efectuat de ea este:

$$L = \int F dx = \int \frac{d}{dt} \frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dx = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \frac{dx}{dt} dt =$$

$$= \int \left[\frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} + \frac{Mv^3 c^{-2}}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}} \frac{dv}{dt} \right] dt =$$

$$= \int \frac{Mv \, dv/dt}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}} dt = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) dt,$$

unde am folosit faptul că $dx/dt = v$.

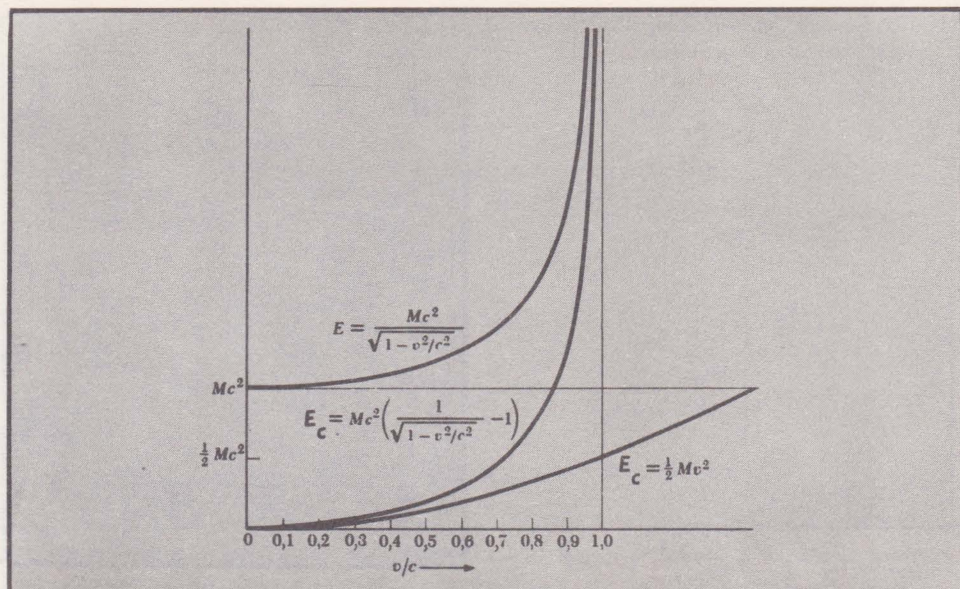


FIG. 12.5. Energia relativistă $E = Mc^2/(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$, energia cinetică relativistă, $E_c = Mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2} - Mc^2$ și energia cinetică nerelativistă $E_c = \frac{1}{2} Mv^2$ sînt trasate ca funcții de v/c. Pentru $v/c \ll 1$, curbele pentru E și E_c sînt aproape identice ca formă, deoarece $Mc^2/(1-v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} \approx Mc^2 + \frac{1}{2} Mv^2$. Pentru $v/c \sim 1$, E crește mult mai repede decît $\frac{1}{2} Mv^2$.

Dacă presupunem că la limita superioară de integrare viteza este v, iar la limita inferioară este zero, obținem:

$$\boxed{L = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - Mc^2 = Mc^2(\gamma - 1).} \tag{12.7}$$

Aceasta va fi energia cinetică E_c; graficul ei în funcție de v este trasat în figura 12.5. Folosind această expresie pentru E_c obținem concordanță cu rezultatele experimentale prezentate în figura 10.20.

Din punct de vedere formal această nouă expresie nu seamănă cu $\frac{1}{2} M v^2$, dar să vedem ce devine ea pentru $v/c \ll 1$.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \ldots$$

ca urmare,

$$\gamma - 1 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

și, în definitiv,

$$Mc^2(\gamma - 1) \text{ devine } \frac{1}{2} Mc^2 \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} Mv^2,$$

reducîndu-se, pentru valori mici ale raportului v/c, la expresia newtoniană.

Să considerăm acum energia relativistă din punct de vedere formal. Folosind relația (12.5), pătratul impulsului relativist poate fi scris sub forma:

$$p^2 = M^2c^2 \beta^2\gamma^2. \tag{12.8}$$

Identitatea:

$$\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = 1,$$

sau

$$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1,$$

este implicit Lorentz — invariantă deoarece 1 este o constantă. Înmulțind cu M^2c^4, obținem:

$$M^2c^4(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2) = M^2c^4$$

și, folosind ecuația (12.8),

$$M^2c^4\gamma^2 - p^2c^2 = M^2c^4. \tag{12.9}$$

Întrucît *masa de repaus* este constantă, M^2c^4 este o constantă, deci un invariant Lorentz, așa cum trebuia.
Ce mărime fizică este însă $M^2c^4\gamma^2$? Rolul său în ecuația (12.9) sugerează că ea trebuie să fie o mărime fizică importantă, deoarece scăzînd din ea p^2c^2 obținem numărul M^2c^4 care este un invariant Lorentz.

Să definim *energia totală relativistă* E a unei particule libere prin relația:

$$E \equiv Mc^2\,\gamma \equiv \frac{Mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{12.10}$$

Atunci ecuația (12.9) spune că mărimea:

$$\boxed{E^2 - p^2c^2 = M^2c^4} \tag{12.11}$$

este un invariant Lorentz.
Prin trecerea de la un sistem de referință la altul, $p \to p'$ și $E \to E'$, invarianța mărimii date de relația (12.9) arată că:

$$E'^2 - p'^2c^2 = E^2 - p^2c^2 = M^2c^4.$$

Acesta este lucrul pe care îl înțelegem atunci cînd spunem că expresia (12.11) este un invariant Lorentz. Subliniem că M reprezintă masa de repaus a particulei și este Lorentz invariantă. Din ecuația (12.11) rezultă:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + M^2c^4}. \tag{12.12}$$

Dacă $pc \ll Mc^2$, atunci:

$$E = Mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2c^2}{M^2c^4}} = Mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2c^2}{M^2c^4}\ldots\right) = Mc^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{M},$$

iar $E_c = \frac{1}{2}\frac{p^2}{M}$ este tocmai rezultatul nerelativist. Pe de altă parte, dacă $pc \gg Mc^2$, atunci:

$$E = pc.$$

Această aproximație este deseori făcută de fizicienii care lucrează în domeniul energiilor înalte. Vom vedea în cele ce urmează (pagina 384) că ea este valabilă în cazul cuantelor de lumină, pentru care $M = 0$.

Între aceste două limite, relația dintre E și p sau dintre E_c și p (sau v) nu este simplă. Remarcați că, folosind egalitatea $E = \gamma Mc^2$, energia cinetică E_c dată de ecuația (12.7) devine acum:

$$E_c = E - Mc^2 \text{ sau } E = Mc^2 + E_c. \tag{12.13}$$

Este important de subliniat că dacă $v = 0$, atunci $E = Mc^2$. Cu alte cuvinte, masa M are energie chiar în repaus. Această energie reprezintă, desigur, *energia de repaus* și vom vedea în cele ce urmează cîteva exemple în care ea se va dovedi importantă. Diferența dintre energia totală E (pentru $v > 0$) și energia de repaus este energia cinetică E_c.

Remarcați, de asemenea, că $E = \gamma Mc^2$ [ecuația (12.10)] și γM este tocmai masa relativistă, astfel încît E este produsul dintre masa relativistă și c^2. Masa și energia sînt, de fapt, nume diferite pentru aceeași mărime. Nu are sens să întrebăm: are o particulă masa mai mare, deoarece are energie cinetică sau are energie cinetică fiindcă i s-a mărit masa? „Masă mai mare" și „energie cinetică" *trebuie* să fie considerate laolaltă.

Conservarea energiei în ciocnirea particulelor cere ca suma:

$$\sum_i^n E_i = \text{const.},$$

[în care E_i este energia relativistă a particulei de indice i, dată de relația (12.12)], să fie aceeași înainte și după ciocnire. Conservarea energiei relativiste este valabilă chiar și pentru ceea ce am numit ciocnire neelastică, întrucît pierderea de energie cinetică (sub formă de excitații interne ale particulelor) este compensată de o creștere corespunzătoare a masei particulelor. Conservarea impulsului cere ca suma:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \text{const.},$$

să fie aceeași înainte și după ciocnire.

TRANSFORMAREA IMPULSULUI ȘI ENERGIEI

Folosind ecuația (12.3), scriem acum relația (12.4) pe componente:

$$p_x = M\frac{dx}{d\tau}; \quad p_y = M\frac{dy}{d\tau}; \quad p_z = M\frac{dz}{d\tau}\cdot \tag{12.14}$$

În mod similar, din ecuațiile (12.10) și (12.3) rezultă că putem scrie energia E sub forma:

$$E = Mc^2\frac{dt}{d\tau}\cdot \tag{12.15}$$

Întrucît M și τ sînt invarianți Lorentz, din ecuațiile (12.14) și (12.15) rezultă că, la o transformare Lorentz p_x, p_y, p_z și E/c^2 trebuie să se transforme la fel ca x, y, z și t. Deoarece cunoaștem transformarea acestora, ecuația (12.16) rezultă imediat. Folosind transformările date în capitolul 11, obținem *relațiile de transformare* pentru impuls și energie:

$$\boxed{\begin{array}{c} p'_x = \gamma\left(p_x - \dfrac{\beta E}{c}\right); \quad p'_y = p_y; \quad p'_z = p_z \\ E' = \gamma(E - p_x c\beta) \end{array}} \tag{12.16}$$

Transformarea inversă rezultă schimbînd pe $-\beta$ în $+\beta$ și schimbînd între ele cantitățile indiciate cu prim și cele neindiciate:

$$p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{\beta E'}{c}\right); \; p_y = p'_y; \; p_z = p'_z$$
$$E = \gamma(E' + p'_x c\beta). \tag{12.17}$$

Folosind ecuațiile (12.14) și (12.15) putem afla viteza particulei din impulsul și energia ei:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{p_x}{M} \cdot \frac{Mc^2}{E} = \frac{c^2 p_x}{E},$$

sau

$$\mathbf{p} = \mathbf{v}\,\frac{E}{c^2}. \tag{12.18}$$

EXEMPLU

Ciocnirea neelastică. Presupunem că două particule identice 1 și 2 se ciocnesc și se unesc formînd o a treia particulă 3. În sistemul S al centrului de masă avem (din însăși definiția centrului de masă):

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0.$$

Particula rezultată trebuie să rămînă în repaus. Într-un alt sistem S', avem:

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}'_3.$$

Exprimăm noile impulsuri în funcție de cele observate în S, cu ajutorul transformării (12.16):

$$p'_{x1} + p'_{x2} = \gamma(p_{x1} + p_{x2}) - \frac{\gamma\beta(E_1 + E_2)}{c} = p'_{x3} = \gamma p_{x3} - \frac{\gamma\beta E_3}{c}. \tag{12.19}$$

E_1 și E_2 sînt energiile particulelor inițiale, în S; E_3 este energia, în S, a particulei rezultate. Dar întrucît $p_{x3} = 0$ și $p_{x1} + p_{x2} = 0$, ecuația (12.19) se reduce la:

$$E_3 = E_1 + E_2.$$

Acest rezultat ne spune că energia relativistă se conservă în ciocniri. Discuția ne reamintește de discuția similară asupra impulsului și energiei, purtată în capitolul 4.

Întrucît particulele sînt identice, $E_1 = E_2$; folosind ecuația (12.10) pentru E_1, obținem pentru E_3 în S:

$$M_3c^2 = \frac{2Mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \quad (12.20)$$

M_3 este masa de *repaus* a particulei formate în urma ciocnirii iar v este viteza inițială a particulei 1 (sau 2) în sistemul S. Masa de repaus M_3 a particulei rezultate este, în acest exemplu, mai mare decît suma $2M$ a maselor de repaus ale particulelor inițiale. Energia cinetică a particulelor incidente s-a transformat în masă de repaus a particulei rezultate.

Considerînd cea mai generală ciocnire, găsim că impulsul se conservă doar dacă suma:

$$\sum_i \frac{M_i c^2}{(1 - v_i^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_i E_i \quad (12.21)$$

extinsă asupra tuturor particulelor incidente, este egală cu aceeași sumă, extinsă asupra particulelor emergente [1]. Am văzut în ecuația (12.20) o exemplificare a acestui fapt. Într-o ciocnire relativistă, impulsul se conservă numai dacă se conservă și energia relativistă.

Noua masă de repaus M_3 este mai mare decît suma $2M$ a maselor de repaus inițiale. Pentru $\beta \ll 1$, putem descrie parțial această creștere în funcție de mărimi nerelativiste. Întrucît:

$$\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots,$$

obținem din ecuația (12.20) că:

$$M_3 \approx 2\left(M + \frac{1}{2} M \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) \approx 2\left(M + \frac{\text{energia cinetică}}{c^2}\right) \cdot \quad (12.22)$$

Așadar, masa de repaus M_3 nu este compusă numai din suma maselor de repaus ale particulelor incidente ci și dintr-o contribuție proporțională cu energia lor cinetică. Acest exemplu de ciocnire neelastică arată că a avut loc o transformare a energiei cinetice în masă. [Am scris ecuația (12.22) pentru valori mici ale lui β doar întrucît acest fapt ușurează punerea în evidență a transformării masă-energie, dar transformarea are loc pentru orice β.] Din formula (12.22) rezultă relația dintre creșterea masei:

$$\Delta M = M_3 - 2M \quad (12.23)$$

și energia cinetică care „a dispărut":

$$E_c = c^2 \cdot \Delta M \quad (12.24)$$

Din definiția energiei cinetice dată de egalitatea (12.7) $E_c = (\gamma - 1)Mc^2$, se poate constata valabilitatea generală (nu numai pentru β mici) a rezultatelor conținute în formulele (12.22) – (12.24).

Echivalența dintre masă și energie. Posibilitatea transformării masei de repaus în energie și reciproc (precum și relația cantitativă dintre ele) a fost considerată de către Einstein drept cea mai semnificativă contribuție a teoriei relativității. Atît timp cît particulele nu capătă viteze semnificative în raport

[1] Nu putem aplica direct ecuația (12.21), dacă în ciocnire intervin fotoni, deoarece pentru fotoni, $v = c$. Vom arăta în relațiile (12.26) și (12.27) cum se rezolvă această problemă pentru fotoni și pentru alte particule cu masă de repaus nulă.

cu c, putem folosi definiția nerelativistă a energiei cinetice din care deducem că, în toate ciocnirile de particule (chiar dacă numărul particulelor incidente diferă de cel al particulelor emergente), variația negativă sau pozitivă a masei de repaus înmulțită cu c^2 este egală cu variația pozitivă sau negativă a energiei cinetice. Reciproc, într-o ciocnire neelastică, pierderea de energie cinetică, trebuie să fie însoțită de o creștere a maselor de repaus ale particulelor emergente.

Vedem din formulele (12.6) și (12.10) că putem scrie $E = M(v)c^2$. Astfel, definiția naturală a energiei în teoria relativității validează formula (12.24) a energiei totale, independent de restricția $v/c \ll 1$:

$$\Delta E = c^2 \, \Delta M.$$

(O deducere exactă este dată în nota istorică de la sfîrșitul capitolului.) Variația ΔM a masei asociată transformării energiei cinetice în masă de repaus este, în general, foarte mică pentru procesele întîlnite în mod uzual, deoarece c este mult mai mare decît vitezele obișnuite.

Deoarece masa este echivalentă cu energia, unui sistem care are energia totală relativistă E, îi este asociată o masă inertă $M = E/c^2$. Să considerăm o cutie fără masă, care conține N particule de masă M, aflate în repaus. Dacă încercăm să o accelerăm, cutia „opune" o masă inertă NM. La viteza $\mathbf{V}$, cutia are impulsul $NM\mathbf{V}$. Dar, dacă fiecare particulă din cutie are viteza $\mathbf{v}$ și energia cinetică $\frac{1}{2} mv^2$, atunci masa inertă a cutiei este $N(M + Mv^2/2c^2)$, iar impulsul ei este $N\mathbf{V}(M + Mv^2/2c^2)$. În aceste formule, vitezele V și v au fost presupuse mult mai mici decît c.

În mod similar, un resort comprimat are o masă mai mare decît unul liber, diferența fiind dată de raportul dintre lucrul mecanic necesar comprimării și c^2. Dacă resortul comprimat este complet dizolvat în acid, produsele de reacție vor fi ușor mai grele (sub limita măsurabilității experimentale) decît în cazul în care resortul ar fi liber. Aceasta ar putea fi pusă în evidență sub forma unei mici creșteri de temperatură a soluției, dacă o astfel de creștere ar putea fi măsurată.

EXEMPLU

Transformarea masă-energie

(1) Dacă două corpuri cu mase de 10^{-3} kg, avînd viteze de semn contrar, egale fiecare cu 10^3 m/s, se ciocnesc și rămîn lipite în urma ciocnirii, masa de repaus suplimentară a particulei rezultate este:

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} \approx 2 \left(\frac{1}{2} M \frac{v^2}{c^2} \right) \approx 1 \cdot 10^{-14} \text{ kg}.$$

Aceasta reprezintă o cantitate mai mică decît precizia cu care poate fi măsurată masa de 10^{-3} kg.

(2) Un atom de hidrogen constă dintr-un electron legat de un proton printr-o forță de atracție electrostatică; masa sa de repaus M_H este mai mică decît suma maselor de repaus m, a electronului liber și M_p, a protonului. Diferența de masă este egală cu energia de ionizare (de legătură) împărțită prin c^2. Masa M_H a atomului de hidrogen este de $1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ kg. Energia de legătură a electronului la proton este de 13,6 eV sau $22 \cdot 10^{-19}$ J astfel încît:

$$M_p + m - M_H = \frac{22 \cdot 10^{-19}}{c^2} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-35} \text{ kg}$$

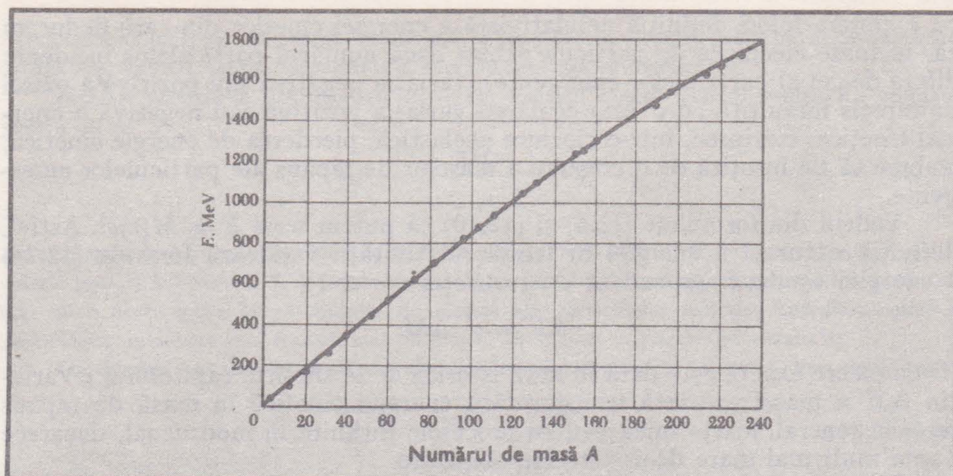


FIG. 12.6. Energia de legătură a nucleelor, in MeV, ca funcţie de numărul de masă A a nucleului. Reamintim că 1 MeV este echivalent cu o masă de $1{,}76 \cdot 10^{-30}$ kg. În grafic nu sînt reprezentate toate nucleele.

ceea ce reprezintă $1/10^8$ din masa atomului de hidrogen — o cantitate prea mică pentru a fi măsurată [1].

(3) Suma dintre masele de repaus ale protonului şi neutronului este:

$$M_p + M_n = (1{,}67265 + 1{,}67496) \cdot 10^{-27} = 3{,}34761 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

Cu toate acestea, masa deuteronului este doar de $3{,}34365 \cdot 10^{-27}$ kg. Diferenţa de $0{,}00396 \cdot 10^{-27}$ kg corespunde unei energii de $3{,}56 \cdot 10^{-13}$ J sau 2,23 MeV, care este tocmai energia necesară pentru a disocia deuteronul într-un neutron şi un proton liberi şi care se numeşte energia de legătură a deuteronului. (Figura 12.6 prezintă graficul energiei de legătură a nucleelor în funcţie de numărul de masă.) În fapt, aceste date furnizează o metodă de obţinere a masei neutronului. Dezintegrarea neutronului în proton, electron şi neutrin furnizează o alta, iar acordul celor două metode este foarte bun.

(4) În tabelul 12.1 energia degajată observată, ΔE, este comparată cu variaţia observată a masei, ΔM, pentru diferite reacţii nucleare.

TABELUL 12.1

Compararea energiei de dezintegrare calculate şi observate *

	Scăderea masei u.a.m.	Energia degajată, MeV	
		$\Delta M \cdot c^2$	ΔE
$^{9}Be + {}^{1}H \rightarrow {}^{6}Li + {}^{4}He$	0,00242	2,25	2,28
$^{6}Li + {}^{2}H \rightarrow {}^{4}He + {}^{4}He$	0,02381	22,17	22,20
$^{10}B + {}^{2}H \rightarrow {}^{11}C + {}^{1}n$	0,00685	6,38	6,08
$^{14}N + {}^{2}H \rightarrow {}^{12}C + {}^{4}He$	0,01436	13,37	13,40
$^{14}N + {}^{4}He \rightarrow {}^{17}O + {}^{1}H$	−0,00124	−1,15	−1,16
$^{28}Si + {}^{4}He \rightarrow {}^{31}P + {}^{1}H$	−0,00242	−2,25	−2,23

* Ş. Dushman. General Electric Review. 47: 6 — 13 (octombrie 1944).

[1] Măsurătorile actuale sînt de 10 pînă la 100 ori mai precise. Efectele legăturii electronice au fost observate în reacţiile nucleare.

O unitate atomică de masă (u.a.m.) este egală cu 1/12 din masa atomică a izotopului ^{12}C.

EXEMPLU

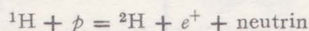
Producerea energiei în stele. Cea mai mare parte din energia Soarelui și a majorității stelelor ia naștere în urma „arderii" nucleare a protonilor cu obținere de heliu.

Energia degajată pentru fiecare atom de heliu format (vezi fig. 12.7) poate fi calculată din variația netă a masei în cursul reacției:

$$4M(^1H) - M(^4He) = 4(1{,}6736 \cdot 10^{-27})\ \text{kg} - (6{,}6466 \cdot 10^{-27})\ \text{kg} \approx \approx 0{,}0478 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \approx 52\ m. \qquad (12.25)$$

unde m este masa electronului. Rezultatul este echivalent cu 26,7 MeV. Masele atomice tabelate includ masa electronilor respectivi. În reacțiile de mai jos, pozitronii sînt anihilați de electroni și produc raze γ.

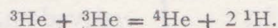
Temperatura în centrul Soarelui este de $\sim 2 \cdot 10^7$ K. La această temperatură se crede că procesele nucleare sînt dominate de următoarele reacții (ilustrate în fig. 12.8):



$$^1H + p = {}^2H + e^+ + \text{neutrin}$$



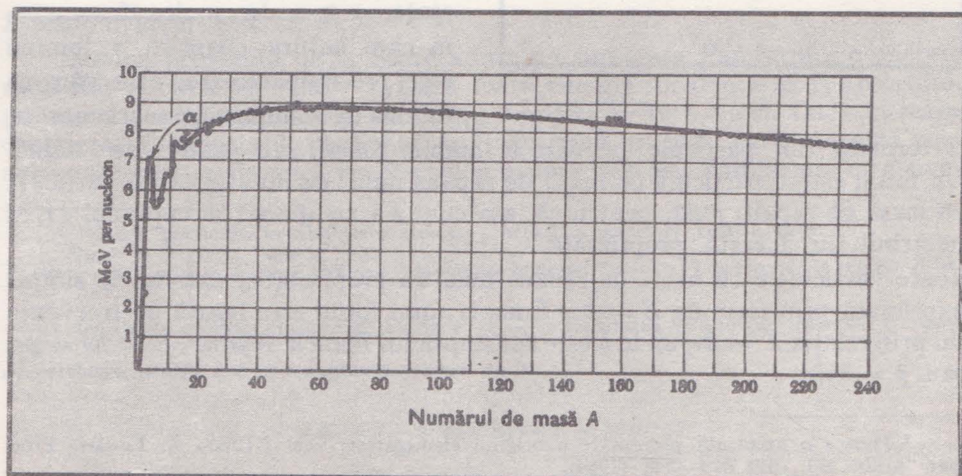
$$^2H + {}^1H = {}^3He + \gamma$$



$$^3He + {}^3He = {}^4He + 2\,{}^1H.$$

Efectul net este arderea hidrogenului și producerea de ^4He. Remarcați că în prima treaptă a reacției se elimină un neutrin (particulă neutră cu masă de repaus nulă), astfel încît Soarele este o sursă puternică de neutrini. Neutrinii interacționează foarte slab cu materia; aproape

FIG. 12.7. Energia de legătură pe nucleon, în MeV per nucleon, ca funcție de numărul de masă A. Punctul notat cu α corespunde nucleului de ^4He, care are o energie de legătură relativ mare.



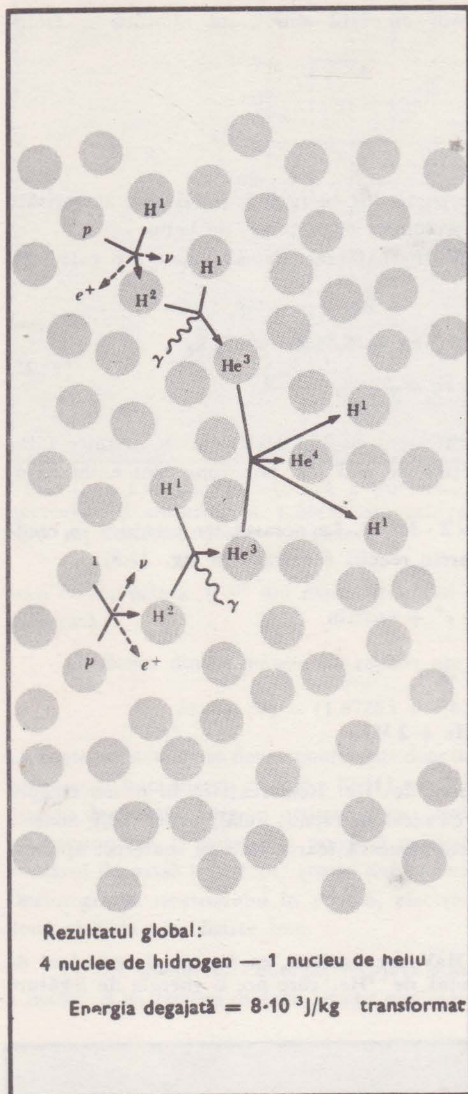


FIG. 12.8. Diagrama fuziunii hidrogenului în heliu prin reacția în lanț $p - p$ care are loc în cea mai mare parte a stelelor de masă egală sau mai mică decît masa Soarelui. Densitatea: 10^5 kg/m^3. Temperatura: 10^7 K. *(După W. A. Fowler.)*

toți neutrinii produși în reacțiile nucleare care au loc în stele, scapă în spațiul cosmic. Ei transportă pînă la 10% din energia emisă de către Soare [1].

Particule cu masă de repaus nulă. Dacă în formula (12.11) punem $M=0$, obținem:

$$E = pc \qquad (12.26)$$

astfel încît relația (12.18) devine:

$$v = c \qquad (12.27)$$

și vedem că o particulă cu masă de repaus nulă se mișcă totdeauna cu viteza luminii. Ea are această viteză pentru orice observator, după cum pentru orice observator ea are masa de repaus nulă. Cu excepția faptului că nu îl putem concepe totdeauna ca pe o particulă, un puls de lumină în vid are tocmai această proprietate, $v \equiv c$. În multe fenomene, în care natura cuantică a luminii este precumpănitoare, observăm că lumina se comportă ca și cum ar fi formată din particule pe care le numim *fotoni*, sau cuante de lumină. Un foton este o particulă cu masă de repaus nulă; ea nu este unica particulă cu masă de repaus nulă, pentru că, așa cum s-a menționat în capitolul 11, și neutrinii au această proprietate.

Toate particulele cu masă de repaus nulă au proprietatea extrem de simplă exprimată prin formula $E = pc$. Energia unui foton este legată de frecvența lui prin relația $E = h\nu$, unde h este constanta lui Planck. Așadar, $E = h\nu = pc$, sau $p = h\nu/c$.

[1] Pentru o excelentă prezentare a originii elementelor, vezi William A. Fowler, Proc. Nat. Acad. Sci., *52*: 524–548 (1964).

Există totdeauna un impuls E/c asociat unui foton de energie E. Atunci cînd un foton este absorbit de un atom, atomul primește un impuls egal cu E/c. Dacă fotonul este reflectat (absorbit și reemis în sens contrar), transferul de impuls este $2E/c$.

Să calculăm presiunea radiației în interiorul unui cub de latură L care conține fotoni cu energia radiantă totală U pe unitatea de volum. Presupunem că fotonii se mișcă dezordonat în toate direcțiile; aceasta este echivalent cu a spune că o treime din ei se mișcă paralel cu una dintre muchiile cubului. În unitatea de timp pe o față a cubului au loc $\left(\frac{N}{3}\right)\left(\frac{c}{2L}\right)$ ciocniri, unde N este numărul total al fotonilor din cutie. Variația impulsului la fiecare ciocnire este $2E/c$. Media temporală a forței care acționează asupra unei fețe este $F=$ (ciocniri în unitatea de timp) · (variația impulsului la o ciocnire) $= N\left(\frac{c}{6L}\right)\left(\frac{2E}{c}\right) = N\frac{E}{3L}$. Dacă n este numărul de fotoni din unitatea de volum, atunci $N = nL^3$ și pentru presiunea radiației rezultă formula:

$$F = nL^2\frac{E}{3} \quad \text{sau} \quad P = \frac{1}{3}U\ ^{1}$$

unde $P = F/L^2$ și $U = nE$.

Este ușor de obținut expresia deplasării Doppler din expresiile lui p și E și din transformările Lorentz (12.16). Care sînt valorile lui E' și p', în sistemul S', dacă valorile corespunzătoare în sistemul S sînt $E = h\nu$, $p_x = h\nu/c$?

$$p'_x = \gamma\left(\frac{h\nu}{c} - \beta\frac{h\nu}{c}\right);\ E' = \gamma\left(h\nu - \beta c\frac{h\nu}{c}\right).$$

Deci:

$$p'_x = \frac{h\nu}{c}(1-\beta)\gamma;\ E' = h\nu(1-\beta)\gamma$$

$$p'_x = \frac{h\nu}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}};\ E' = h\nu' = h\nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \tag{12.28}$$

E' este, evident, egal cu $p'c$.

Lumina provenită de la Soare aduce pe suprafața Pămîntului o energie radiantă de circa 10^3 J/m² · s. Dacă toată energia incidentă ar fi absorbită, presiunea corespunzătoare ar fi $(10^3/c)$ N/m² $\approx 3 \cdot 10^{-6}$ N/m². Dacă întreaga energie ar fi reflectată, presiunea ar fi de două ori mai mare. Această presiune este extrem de mică iar efectul ei asupra mișcării Pămîntului este com-

---

[1] Pentru particule nerelativiste (teoria cinetică a gazelor) relația este: $P = \frac{Nmv^2}{3L^3} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}N\frac{mv^2}{L^3}\right) = \frac{2}{3}$ · densitatea energiei cinetice. Trecerea de la relația $P = \frac{2}{3}$ · densitatea energiei cinetice la relația $P = \frac{1}{3}$ · densitatea de energie (care va fi egală cu presiunea pentru $v \approx c$) corespunde trecerii de la:

$$E_c = \frac{p^2}{2m} \quad \text{la} \quad E_c = E = pc.$$



FIG. 12.9. Cometa Mkros, 27 August 1957. *(Fotografie de la Observatoarele Mount Wilson și Mount Palomar.)*

plet neglijabil. În cazul cozii foarte difuze a unei comete sau a sateliților lui Echo, pentru care aria suprafeței este mare în raport cu masa, efectul global al acestei presiuni poate să nu fie neglijabil. Figura 12.9 reprezintă o ilustrare a acestui fapt. Bombardarea cozii cometei de către particulele provenite de la Soare poate avea un efect notabil. În interiorul unei stele fierbinți de mică densitate, presiunea radiației poate deveni extrem de importantă.

Pentru orice particulă cu energie suficient de mare, astfel încît $E \gg Mc^2$, vom avea aproximativ aceeași relație între impuls și energie, ca și pentru foton. Pentru o particulă, putem totdeauna postula un observator aflat în mișcare, pentru care particula este în repaus. Dar fotonul nu va putea fi adus niciodată în repaus prin schimbarea sistemului de referință, deoarece, deși energia și impulsul lui pot diferi pentru diferiți observatori, el va avea totdeauna $v = c = E/p$.

Să considerăm un atom de hidrogen în repaus, dar aflat într-o stare electronică excitată. Atomul de hidrogen emite o cuantă luminoasă de energie E și impuls $(E/c)\hat{\mathbf{x}}$. Atomul capătă un impuls de recul egal cu $-(E/c)\hat{\mathbf{x}}$. Ca urmare a reculului, centrul de masă al sistemului (atom plus cuantă de lumină) nu poate rămîne în repaus decît dacă cuanta de lumină are o masă M_γ. Pentru a afla pe M_γ, punem:

$$\dot{\mathbf{R}}_{c.m.} \equiv \frac{M_H \dot{\mathbf{r}}_H + M_\gamma \dot{\mathbf{r}}_\gamma}{M_H + M_\gamma} = 0$$

$M_H \dot{\mathbf{r}}_H = -(E/c)\hat{\mathbf{x}}$ și $\dot{\mathbf{r}}_\gamma = c\hat{\mathbf{x}}$, astfel încît:

$$-\frac{E}{c} + M_\gamma c = 0 \text{ și } M_\gamma = \frac{E}{c^2}.$$

Aceasta este tocmai masa dată de relația lui Einstein. Masa cuantei de lumină nu este o masă de repaus; ea este masa corespunzătoare energiei E. Masa de repaus a cuantei de lumină este nulă.

TRANSFORMAREA VITEZEI DE VARIAȚIE A IMPULSULUI

Ne interesează legea a doua a lui Newton:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

și modul în care se transformă ea. Este evident că:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \neq \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}'}{\mathrm{d}t'}.$$

Să considerăm sistemul S' în care masa M este instantaneu în repaus. Atunci S' se mișcă cu viteza $v\hat{\mathbf{x}}$ în raport cu S. Din transformările (12.16) rezultă:

$$\Delta p_y = \Delta p'_y; \quad \Delta p_z = \Delta p'_z$$

iar din formula (12.3), obținem:

$$\Delta t' = \Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t$$

unde $\Delta\tau$ este timpul propriu. Prin urmare:

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{\Delta p'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\Delta t'} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p'_y}{\Delta t'}.$$

Întrucît

$$F_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \quad \text{și} \quad F'_y = \frac{\Delta p'_y}{\Delta t'}$$

vedem că

$$F_y = \frac{1}{\gamma} F'_y \quad \text{și} \quad F_z = \frac{1}{\gamma} F'_z.$$

Componentele x ale lui $\Delta\mathbf{p}/\Delta t$ nu sînt la fel de simple.

$$p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{vE'}{c^2}\right)$$

$$\Delta p_x = \gamma \Delta p'_x + \gamma v \frac{\Delta E'}{c^2}. \tag{12.29}$$

Evaluăm $\Delta E'$ în funcție de $\Delta p'_x$:

$$\Delta E' = \frac{c^2 p' \,\Delta p'}{\sqrt{M_0^2 c^4 + c^2 p'^2}}.$$

Dar p'_x, p'_y, p'_z sînt toţi egali cu zero. Aşadar, $\Delta E' = 0$ şi reîntorcîndu-ne la relaţia (12.29), obţinem:

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{\gamma \Delta p'_x}{\Delta t'} \cdot \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\gamma \Delta p'_x}{\Delta t'} \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{\Delta p'_x}{\Delta t'}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p'_x}{\mathrm{d}t'}$$

şi

$$F_x = F'_x. \tag{12.30}$$

Aceste ecuaţii vor juca un rol fundamental în volumul 2, capitolul 5. Ele sînt, desigur, cazuri particulare ale unor rezultate mult mai generale.

CONSTANŢA SARCINII

Legea de mişcare $q\mathbf{E} = \dot{\mathbf{p}}$ pentru o particulă de sarcină q într-un cîmp electric $\mathbf{E}$ este incompletă, cîtă vreme nu ştim dependenţa sarcinii de viteză şi acceleraţia particulei de impuls $\mathbf{p}$. Cea mai bună verificare experimentală a faptului că sarcina protonului sau a electronului este constantă cu o foarte mare precizie, este observaţia că fasciculele de hidrogen atomic sau molecular nu sînt deviate de cîmpuri electrice uniforme, perpendiculare pe fascicule. Atomul de hidrogen constă dintr-un electron e şi un proton p. Molecula de hidrogen H_2 constă din doi electroni şi doi protoni. Chiar dacă protonii se mişcă foarte încet, electronii se mişcă în jurul protonilor cu o viteză medie de circa $10^{-2}c$ [1]. Molecula nedeviată are în acest caz impulsul constant, astfel încît rezultatul experimental ne spune că $\dot{\mathbf{p}}_p + \dot{\mathbf{p}}_e = 0 = (e_p + e_e)\mathbf{E}$. Rezultă deci din experienţă că, în atom sau moleculă, $e_e = -e_p$ în ciuda faptului că electronul are o viteză mare, iar protonul o viteză mică, sau că viteza medie a electronului este diferită în atom şi în moleculă. Din punct de vedere cantitativ, se ştie că pînă la viteze de ordinul $10^{-2}c$, sarcina electronului este independentă de viteză şi egală cu cea a protonului, cu o precizie mai mare de $1/10^9$. În plus, se ştie că sarcinile existente în natură sînt multipli ai sarcinii electronului, astfel încît sarcina totală poate fi aflată printr-o simplă numărare, independentă de sistemul de referinţă.

Situaţia experimentală va fi discutată în volumul 2. Rezultatul experimental indică independenţa sarcinii faţă de viteza particulei sau observatorului. Prin urmare, la o schimbare a sistemului de referinţă, sarcina şi masa se transformă în mod diferit.

---

[1] Teoria elementară a lui Bohr, asupra atomului dă pentru starea fundamentală viteza $v = c/137$.

PROBLEME

1. *Impulsul relativist.* Care este impulsul unui proton care are energia cinetică de 1 GeV[1]? (Dacă E este măsurat în GeV, putem măsura impulsul p în GeV/c.)

R: 1,7 GeV/c.

2. *Impulsul relativist.* Care este impulsul unui electron cu energia de 1 GeV?

R: 1,0005 GeV/c.

3. *Impulsul fotonului.* Care este impulsul fotonului cu energia de 1 GeV?

4. *Energia și impulsul unui proton rapid.* Considerăm un proton cu viteza $\beta = 0{,}995$ în sistemul laboratorului; ce valori are impulsul relativist și energia totală relativistă? Ce valoare are energia cinetică?

5. *Particule provenite din raze cosmice de mare energie.* Se știe că particulele provenite din razele cosmice pot avea energii pînă la 10^{19} eV și chiar mai mari.

(*a*) Care este masa aparentă (aproximativă) a unei astfel de particule?

R: $1{,}8 \cdot 10^{-17}$ kg.

(*b*) Care este impulsul ei (aproximativ)?

R: $5 \cdot 10^{-9}$ kg · m/s.

6. *Transformarea energiei și impulsului.* Un proton are viteza $\beta = 0{,}999$ în sistemul laboratorului. Aflați valoarea energiei și impulsului într-un sistem care se deplasează în același sens cu viteza $\beta' = 0{,}990$ în raport cu sistemul laboratorului.

[1] În original 1 BeV. Cuvîntul billion are sensuri diferite în diferite țări. În Statele Unite, este egal cu 10^9, dar în Anglia, este 10^{12}. Se preferă folosirea prefixului giga (prescurtat G) pentru a desemna factorul 10^9.

7. *Energia unui electron rapid.* Un electron are $\beta = 0{,}99$. Care este energia sa cinetică?

R: 3 1 MeV.

8. *Reculul în emisia* γ. Care este, în sistemul laboratorului, impulsul de recul al unui nucleu de ^{57}Fe care reculează datorită emisiei unui foton de 14 keV. Impulsul nucleului este relativist?

R: $7{,}5 \cdot 10^{-24}$ kg · m/s.

9. Considerați o rază γ de energie E_γ care se îndreaptă către un proton aflat în repaus în sistemul laboratorului.

(*a*) Care este impulsul razei γ în sistemul laboratorului?

(*b*) Arătați că viteza V a centrului de masă în sistemul laboratorului este dată de raportul:

$$\frac{V}{c} = \frac{E_\gamma}{E_\gamma + M_p c^2}$$

(*c*) Care este energia razei γ în sistemul centrului de masă? Dar energia protonului în același sistem?

10. *Dezintegrarea neutronilor.* Folosind valorile date în capitolul 12, calculați energia degajată la dezintegrarea unui neutron într-un proton și un electron.

R: 0,79 MeV

11. *Invarianța Lorentz într-un sistem de două particule.* Fie $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ și $E = E_1 + E_2$, impulsul total și respectiv energia totală, pentru un sistem de două particule. Arătați în mod explicit că transformările Lorentz aplicate lui $\mathbf{p}$ și E sînt compatibile cu invarianța mărimii $E^2 - p^2c^2$.

12. *Trecerea de la sistemul în repaus la sistemul centrului de masă.* Doi protoni pleacă din același punct cu viteze $\beta = 0{,}5$ în sensuri contrare.

(*a*) Care sînt energia și impulsul unui proton în raport cu punctul de plecare?

(b) Cu ajutorul transformării Lorentz, găsiți energia și impulsul unui proton în sistemul propriu al celuilalt. (În probleme de acest fel este convenabil să se exprime energia ca un multiplu al energiei de repaus.)

13. *Radiația masei prin antenă.* Care este masa corespunzătoare energiei radiate de o antenă radio cu puterea de 1 000 W, în timp de 24 h? (1 W = 1 J/s).

14. *Energia solară. Constanta solară* este fluxul energiei solare pe metru pătrat și pe secundă, la distanța Pămîntului. Măsurătorile au arătat că valoarea ei este $1{,}4 \cdot 10^3$ J/m² · s.

(a) Arătați că puterea totală radiată de Soare este $4 \cdot 10^{26}$ W.

(b) Arătați că puterea radiată medie per kilogram de materie solară este $\approx 2 \cdot 10^{-4}$ W/kg $\approx 6 \cdot 10^3$ J/kg · an.

(c) Arătați că energia produsă prin transformarea unui gram de hidrogen în ^{4}He este $\approx 6 \cdot 10^{11}$ J.

(d) Arătați că, dacă o treime din masa Soarelui ar fi hidrogen, iar procesul de fuziune ar continua fără modificări, Soarele ar continua să radieze cu aceeași putere ca și în prezent, timp de încă $3 \cdot 10^{10}$ ani.

15. *Propulsarea datorită presiunii radiației.* Un dispozitiv posibil de propulsare în spațiul cosmic constă dintr-o foaie metalică reflectătoare de mare suprafață, legată de un mic vehicul spațial. Faceți estimări rezonabile referitoare la accelerațiile pe care le-ar căpăta un astfel de vehicul la distanța de 1 UA față de Soare.

16. *Impulsul unui puls laser.* Un laser mare poate produce un puls luminos cu energia de 2 000 J.

(a) Arătați că impulsul acestui puls este de ordinul 10^{-5} kg · m/s.

(b) Analizați cum poate fi măsurat acest impuls. Durata pulsului poate fi de 1 ms (10^{-3} s).

TEME AVANSATE

Emisia fără recul a razelor γ. Un nucleu aflat într-o stare excitată poate emite un foton (rază γ) în timpul tranziției către starea sa fundamentală, sau neexcitată. Poate avea loc și procesul invers: un nucleu aflat în starea fundamentală poate absorbi un foton, trecînd într-o stare excitată (vezi fig. 12.10).

Presupunem că preparăm o sursă care conține nuclee excitate. În timp, sursa va emite fotoni. Fotonii sînt lăsați să ciocnească un material absorbant care conține nuclee de același tip, aflate însă în starea fundamentală. Aceste nuclee vor absorbi fotonii incidenți pe care îi vor reemite mai tîrziu. Acest fenomen de absorbție și reemisie se numește *fluorescență nucleară*. Fotonii emiși (atît de sursă cît și de absorbant) vor avea un spectru energetic de lărgime Γ, ca în figura 12.11. Γ este litera grecească gamma mare.

Un exemplu instructiv este furnizat de nucleul ^{57}Fe. Acesta se formează în stare excitată, ca produs de dezintegrare a ^{57}Co. În starea excitată, nucleul ^{57}Fe emite un foton de energie 14,4 keV, trecînd în starea fundamentală.

Considerăm nucleul ^{57}Fe într-o stare excitată și presupunem că nucleul se află inițial în repaus în vid. Atunci cînd este emis fotonul, nucleul va recula în sens opus.

(a) Care este frecvența ν a fotonului de energie 14,4 keV? Reamintim că $E = h\nu$, unde h este constanta lui Planck, iar E este energia.

R: $3{,}5 \cdot 10^{18}$ Hz.

(b) Impulsul fotonului este $h\nu/c$. Care este impulsul de recul al nucleului?

R: $7{,}7 \cdot 10^{-29}$. kg · m/s.

(c) Arătați că energia de recul R a nucleului este:

$$R = \frac{E^2}{2Mc^2},$$

unde M este masa nucleului, iar E este energia fotonului. Evaluați energia R pentru ^{57}Fe, în eV.

R: $2 \cdot 10^{-3}$ eV

Nivelele energetice nucleare nu sînt perfect monocromatice ci au o lărgime Γ, dată de relația de incertitudine:

$$\tau\Gamma \approx \frac{h}{2\pi},$$

unde τ este timpul de viață al stării. Pentru raze γ de joasă energie, ca cea dată de ^{57}Fe, lărgimea nivelelor energetice nucleare poate fi mult mai mică decît energia de recul R. În această situație, razele γ emise nu mai pot fi reabsorbite de un nucleu aflat în repaus întrucît frecvența este modificată (vezi fig. 12.11 și 12.12).

O metodă de acordare a frecvențelor emițătorului și receptorului este aceea de a imprima sursei o viteză în raport cu receptorul.

(*d*) Care este viteza necesară în cazul nucleului ^{57}Fe?

(*e*) Mössbauer a observat că în cazul fotonilor emiși de anumite cristale, impulsul de recul este preluat de întregul cristal și nu de nucleul individual. La temperatura camerei, aproximativ 70% din fotonii emiși de un cristal de Fe nu dau, în acest sens, efecte de recul. Calculați energia R pentru un foton emis fără recul, dacă masa cristalului de Fe este de 10^{-3} kg.

R: $2 \cdot 10^{-25}$ eV, ceea ce este complet neglijabil.

NOTĂ ISTORICĂ

Relația dintre masă și energie. Primul articol al lui Einstein referitor la teoria restrînsă a relativității, intitulat „Asupra electrodinamicii corpurilor în mișcare" a apărut în Annalen der Physik **17**: 891–921 (1905). Acest volum din Annalen conține trei articole clasice ale lui Einstein: unul referitor la interpretarea cuantică a efectului fotoelectric (pag. 132–148); unul referitor la mișcarea browniană (pag. 549–560) și cel referitor la teoria restrînsă a relativității, citat mai sus (multe dintre rezultatele conținute în acest articol au fost anticipate de către Larmor, Lorentz și alții). În același an, a apărut în vol. **18** pag. 639–641, un mic articol al lui Einstein,

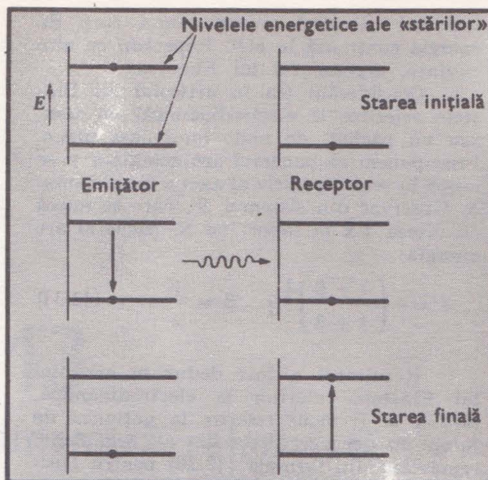


FIG. 12.10. Variația nivelelor energetice nucleare în timpul emisiei și absorbției radiației

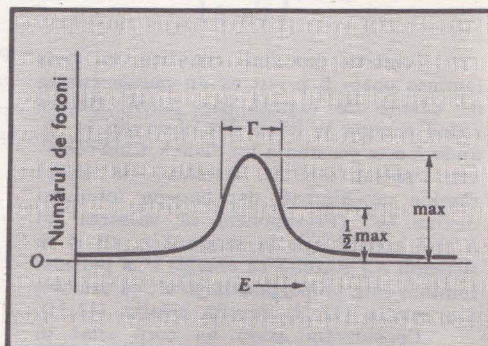


FIG. 12.11. Distribuția de energie a razelor γ datorată lărgimii nivelului energetic nuclear

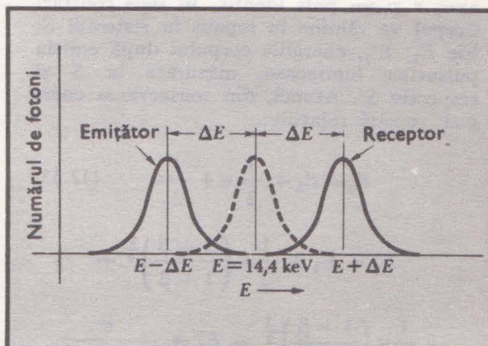


FIG. 12.12. Deplasările curbei energetice a razelor γ pentru emisia și absorbția nucleară.

intitulat „Depinde inerţia unui corp de energia conţinută în el?" Repetăm, cu alte cuvinte, argumentul lui Einstein:

Considerăm (ca în articolul lui Einstein referitor la electrodinamică) un tren, sau un pachet, de unde luminoase plane. Presupunem că pachetul are energia ϵ şi se mişcă în sensul pozitiv al axei x din sistemul S. Observat din sistemul S', care se mişcă cu viteza $V\hat{\mathbf{x}}$ în raport cu S, pachetul are energia:

$$\epsilon' = \epsilon\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \beta = \frac{V}{c}. \qquad (12.31)$$

Rezultatul a fost dedus în articolul lui Einstein referitor la electrodinamică, fără a se fi făcut referire la noţiunea de foton. El decurge direct din alt argument: remarcăm din formula (12.28) pentru efectul Doppler longitudinal, că frecvenţele măsurate de observatori aflaţi în repaus în sistemele S' şi respectiv S sînt legate prin relaţia:

$$\nu' = \nu\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (12.32)$$

Conform descrierii cuantice, un puls luminos poate fi privit ca un număr întreg de cuante de lumină sau *fotoni*, fiecare avînd energie $h\nu$ (cînd sînt observaţi în S), unde h este constanta lui Planck. Cînd observăm pulsul din S', numărul de fotoni rămîne neschimbat, dar energia fotonului devine $h\nu'$. (Presupunem că valoarea lui h este aceeaşi atît în sistemul S' cît şi în sistemul S.) Rezultă că energia ϵ' a pulsului luminos este proporţională cu ν'; ca urmare, din relaţia (12.32) rezultă relaţia (12.31).

Considerăm acum un corp aflat în repaus în sistemul S şi presupunem că energia sa iniţială este E_0 în S şi E'_0 în S'. Presupunem că corpul emite un puls luminos de energie $\frac{1}{2}\epsilon$ în sensul pozitiv al axei x şi un puls identic, în sens contrar. Corpul va rămîne în repaus în sistemul S. Fie E_1, E'_1, energiile corpului după emisia pulsurilor luminoase, măsurate în S şi respectiv S'. Atunci, din conservarea energiei, rezultă relaţiile:

$$E_0 = E_1 + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \qquad (12.33)$$

$$E'_0 = E'_1 + \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}} = E'_1 + \frac{\epsilon}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (12.34)$$

din care, prin scădere obţinem:

$$E_0 - E'_0 = E_1 - E'_1 + \epsilon - \frac{\epsilon}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (12.35)$$

Diferenţa de energie $E'_0 - E_0$ trebuie să fie tocmai energia cinetică E_{c0} a corpului, măsurată în S', deoarece corpul se află iniţial în repaus în sistemul S. În mod similar, $E'_1 - E_1$ este energia cinetică finală E_{c1}, măsurată în S'. Aşadar, ecuaţia (12.35) poate fi scrisă sub forma:

$$E_{c0} - E_{c1} = \epsilon\left[\frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} - 1\right].$$

Vedem că energia cinetică a corpului scade în urma emisiei de lumină. Scăderea este independentă de proprietăţile corpului. Dacă $\beta \ll 1$, atunci:

$$E_{c0} - E_{c1} \approx \frac{1}{2}\epsilon\beta^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{c^2}V^2,$$

astfel încît masa de repaus a corpului scade cu

$$\Delta M = \frac{\epsilon}{c^2}.$$

Din această relaţie, Einstein a dedus că: *dacă un corp cedează energia ϵ sub formă de radiaţie, masa lui scade cu ϵ/c^2*. Evident, nu importă faptul că energia luată de la corp devine energie de radiaţie, astfel încît sîntem conduşi la concluzia mai generală că:

Masa unui corp este o măsură a energiei conţinute în el; dacă energia variază cu ϵ, atunci masa variază în acelaşi sens cu $\epsilon/(9 \cdot 10^{16})$, energia fiind măsurată în Jouli, iar masa în kg.

Nu este imposibil ca pentru corpuri a căror energie este puternic variabilă (de exemplu, săruri de radiu), teoria să fie supusă unei verificări concludente.

Dacă teoria concordă cu faptele experimentale, atunci radiaţia transportă masă inertă între emiţător şi receptor.

LECTURI SUPLIMENTARE

M. Born, *Teoria relativităţii a lui Einstein* („Einstein's Theory of Relativity"), capitolul 6, §(7–9), (retipărire) Dover Publications, Inc., New York, 1962.

A. P. French, *Relativitatea restrînsă* („Special Relativity"), capitolul 7, W. W. Norton & Company, Inc., New York, 1968.

C. Kacser, *Introducere în teoria restrînsă a relativităţii* („Introduction to the Special Theory of Relativity") capitolele 5–7, Ediţie broşată Co-Op, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1967.

13
Probleme de dinamică relativistă

Cuprins

Am analizat în capitolul 3 o serie de probleme referitoare la mişcarea nerelativistă a particulelor în cîmpuri electrice şi magnetice. De asemenea, am discutat în capitolele 3, 4 şi 6, ciocnirile neelastice ale particulelor nerelativiste. Extindem acum cîteva dintre soluţii la domeniul relativist. De multe ori, soluţiile nu prezintă dificultăţi speciale, iar o parte dintre ele sînt de mare importanţă pentru fizica energiilor înalte şi pentru astrofizică.

Este binecunoscut faptul că în ciocnirea particulelor cu energie foarte mare, pot fi create particule noi, inexistente înainte de ciocnire, prin transformarea energiei în masă. În sistemul centrului de masă, toată energia cinetică a particulelor încidente poate participa la crearea unor particule noi şi a unor stări energetice excitate. Orice reacţie care conduce la o anumită configuraţie de noi particule sau stări excitate este caracterizată de un prag energetic de la care reacţia poate avea loc. Dacă în reacţii intervin energii relativiste, atunci, partea din energia în sistemul laboratorului, reprezentată de această energie de prag a centrului de masă, este mai mică decît în cazul nerelativist. Aceasta este o consideraţie importantă în fizica energiilor înalte. Un exemplu este dat la pagina 405.

Faptul că impulsul unei particule relativiste accelerate poate creşte indefinit, chiar dacă viteza variază puţin, atunci cînd are valori apropiate de c, stă la baza funcţionării marilor acceleratoare şi a analizei după impulsuri a particulelor de mare energie cu ajutorul cîmpului magnetic de deflecţie. Metodele de deflecţie magnetică sînt folosite pe scară largă în cercetările asupra particulelor de mare energie.

Pentru a ne forma obişnuinţa în efectuarea unor operaţii standard, vom studia mai întîi accelerarea unei particule relativiste de către un cîmp electric.

ACCELERAREA UNEI PARTICULE ÎNCĂRCATE DE CĂTRE UN CÎMP ELECTRIC LONGITUDINAL CONSTANT[1]

Ecuaţia de mişcare a unei particule de sarcină q şi masă de repaus M într-un cîmp electric uniform[2] $\mathscr{E}\hat{\mathbf{x}}$ este:

$$\dot{p}\hat{\mathbf{x}} = q\mathscr{E}\hat{\mathbf{x}} \tag{13.1}$$

[1] Studentul care vrea să verifice corectitudinea formulei (13.1) trebuie să-şi reamintească egalitatea (12.30). O analiză detaliată este făcută în volumul 2.

[2] Notăm aici cîmpul electric cu $\mathscr{E}$ pentru a nu-l confunda cu energia E.

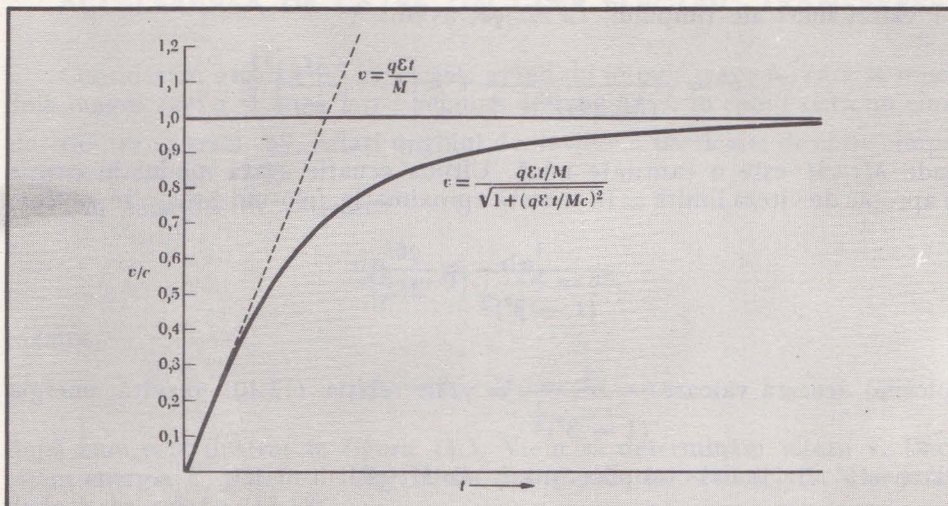


FIG. 13.1. Viteza v a unei particule de sarcină q și masă de repaus M, accelerate din repaus de către un cîmp electric $\mathcal{E}$, ca funcție de timp. Pentru $t \gg 0$, viteza v se apropie de limita c. Linia punctată reprezintă viteza sarcinii prezisă de mecanica nerelativistă.

sau, scriind $\mathbf{p} = M\mathbf{v}/(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ obținem:

$$M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v}{(1 - v_x^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} = q\mathcal{E}, \tag{13.2}$$

unde am presupus $v_y = v_z = 0$, așa cum se întîmplă la accelerarea din repaus în direcția x. Integrînd ecuația (13.2) în raport cu timpul, vedem imediat că:

$$p = M\frac{v}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} = q\mathcal{E}t$$

cu $v(0) = 0$. Ridicînd la pătrat și rearanjînd termenii, sau folosind relațiile (12.11) și (12.18), obținem:

$$v^2 = \frac{(q\mathcal{E}t/Mc)^2}{1 + (q\mathcal{E}t/Mc)^2}c^2. \tag{13.3}$$

În figura 13.1 este reprezentat grafic raportul v/c în funcție de t. Pentru valori mici ale timpului[1], $t < Mc/q\mathcal{E}$, numărătorul din expresia (13.3) poate fi înlocuit cu unu și rezultă:

$$v^2 \approx \left(\frac{q\mathcal{E}}{M}t\right)^2 = \frac{p^2}{M^2},$$

ca și în cazul aproximației nerelativiste din capitolul 3.

[1] Dacă $\mathcal{E} = 3 \cdot 10^4$ V/m, avem pentru un electron:

$$\frac{mc}{e\mathcal{E}} \approx \frac{10^{-30} \times 3 \times 10^8}{5 \times 10^{-15}} \approx 10^{-7}\ \mathrm{s}.$$

La valori mari ale timpului, $t \gg Mc/q\mathcal{E}$, avem:

$$v^2 = \frac{1}{(Mc/q\mathcal{E}t)^2 + 1} c^2 \approx \left[1 - \left(\frac{Mc}{q\mathcal{E}t}\right)^2\right] c^2,$$

unde $Mc/q\mathcal{E}t$ este o cantitate mică. Ultima ecuație arată modul în care v se apropie de viteza limită c. În această aproximație, folosind $\beta \equiv v/c$ se obține:

$$\frac{1}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{q\mathcal{E}t}{Mc}.$$

Folosind această valoare $\frac{1}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \gamma$ în relația (12.10) rezultă energia relativistă[1] în limita timpilor mari, $t \gg Mc/q\mathcal{E}$,

$$E = \frac{Mc^2}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \approx q\mathcal{E}ct.$$

Rezultatul este egal tocmai cu produsul dintre forță și distanța străbătută în timpul t cu viteza c. În aceeași limită, impulsul este:

$$p \approx q\mathcal{E}t \approx \frac{Mc}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{E}{c}.$$

Remarcați particularitatea tipic relativistă că impulsul și energia cresc continuu, chiar după ce viteza s-a plafonat practic, și că energia este proporțională cu p și nu cu p^2.

Spațiul parcurs se calculează extrăgînd radicalul în egalitatea (13.3) și scriind $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}x = \frac{(q\mathcal{E}/Mc)t}{1 + (q^2\mathcal{E}^2t^2/M^2c^2)} c\mathrm{d}t. \quad (13.4)$$

Integrînd de la 0 la t, obținem distanța:

$$x = \frac{Mc^2}{q\mathcal{E}} \left\{\left[1 + \left(\frac{q\mathcal{E}t}{Mc}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - 1\right\}. \quad (13.5)$$

Am presupus $x = 0$ și $v = 0$ la $t = 0$. Remarcați că dacă $q\mathcal{E}t/Mc \gg 1$, atunci $x \approx ct$, în timp ce dacă $q\mathcal{E}t/Mc \ll 1$, $x \approx \frac{1}{2}(q\mathcal{E}/M)t^2$, ceea ce reprezintă cazul nerelativist.

---

[1] Expresia generală a energiei E obținută din formula (12.11) este:

$$E^2 = M^2c^4 + q^2\mathcal{E}^2t^2c^2.$$

ACCELERAREA DE CĂTRE UN CÎMP ELECTRIC TRANSVERSAL

Considerăm o particulă încărcată, avînd un impuls mare p_0, care se mişcă de-a lungul axei x şi intră într-o regiune de lungime L în care există un cîmp electric transversal, $\mathscr{E}\hat{\mathbf{y}}$. Aflaţi unghiul de deviere a particulei de către cîmpul electric (vezi fig. 13.2).

Din ecuaţiile de mişcare:

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = 0\,; \quad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = q\mathscr{E},$$

rezultă:

$$p_x = p_0\,; \quad p_y = q\mathscr{E}t,$$

după cum este ilustrat în figura 13.3. Vrem să determinăm viteza $\mathbf{v}$. Dacă aflăm energia E, putem deduce viteza din impuls, folosind relaţia $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/E$ dedusă din relaţia (12.18).

Energia este dată de expresia:

$$E^2 = M^2c^4 + p^2c^2 = M^2c^4 + p_0^2c^2 + (q\mathscr{E}tc)^2 = E_0^2 + (q\mathscr{E}tc)^2, \qquad (13.6)$$

unde E_0 este energia iniţială. Atunci, din formula (13.6) şi din relaţia viteză — —impuls, avem

$$v_x = \frac{p_0c^2}{[E_0^2 + (q\mathscr{E}tc)^2]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (13.7)$$

$$v_y = \frac{q\mathscr{E}tc^2}{[E_0^2 + (q\mathscr{E}tc)^2]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (13.8)$$

Remarcaţi că v_x descreşte atunci cînd t creşte (vezi fig. 13.4). Observăm, de asemenea, că v_y este totdeauna mai mic decît valoarea sa nerelativistă $q\mathscr{E}t/M$. La momentul t, unghiul θ pe care îl face traiectoria cu axa x este dat de:

$$\operatorname{tg}\theta(t) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{q\mathscr{E}tc^2}{p_0c^2} = \frac{q\mathscr{E}t}{p_0}.$$

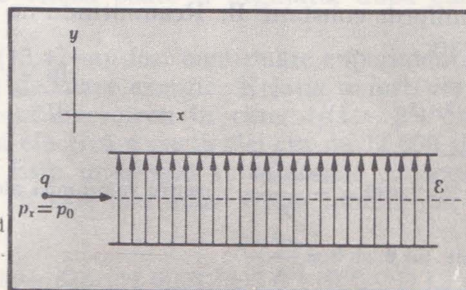


FIG. 13.2. Presupunem că o sarcină q, avînd impulsul iniţial p_x, pătrunde într-un cîmp electric transversal $\mathscr{E}$.

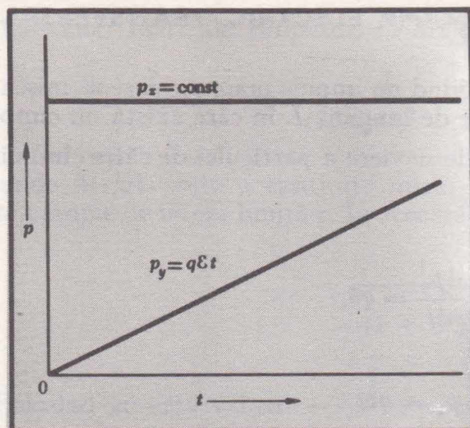


FIG. 13.3. Forța în direcția y este $q\mathcal{E}$, astfel incît $p_y = q\mathcal{E}t$, în timp ce p_x rămîne constant. Energia: $E = c\sqrt{(p_x^2 + p_y^2) + M^2c^2}$ crește.

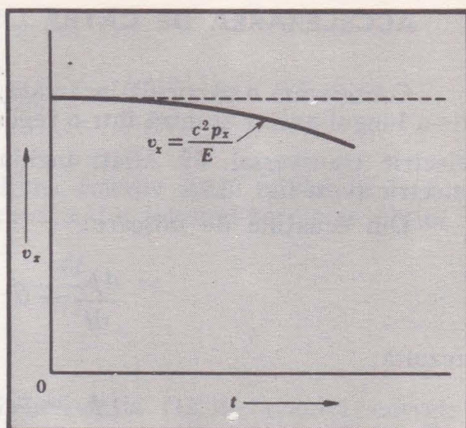


FIG. 13.4. Întrucît $v_x = c^2p_x/E$, viteza v_x *descrește* atunci cînd particula este accelerată în direcția y. Mecanica nerelativistă ar fi prezis, desigur, $v_x = \text{const}$.

Timpul t_L necesar pentru a străbate distanța L se calculează integrînd ecuația (13.7)

$$\int_0^L dx = p_0c^2 \int_0^{t_L} \frac{dt}{[E_0^2 + (q\mathcal{E}tc)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

sau, folosind formula 728.1 din Dwight

$$L = \frac{p_0c}{q\mathcal{E}} \operatorname{arc\,sh} \frac{q\mathcal{E}t_Lc}{E_0},$$

adică

$$t_L = \frac{E_0}{q\mathcal{E}c} \operatorname{sh} \frac{q\mathcal{E}L}{p_0c}.^{1}$$

PARTICULA ÎNCĂRCATĂ ÎN CÎMP MAGNETIC

Vom considera, în cele ce urmează, o importantă problemă practică, tratînd despre mișcarea unei particule de sarcină q într-un cîmp magnetic uniform constant **B**. Reamintindu-ne ecuația (3.23) scriem ecuația de mișcare:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{13.9}$$

[1] $\operatorname{sh}\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$; pentru valori mici ale lui θ, $\operatorname{sh}\theta \approx \theta$ în timp ce pentru valori mari ale lui θ, $\operatorname{sh}\theta \approx \frac{e^{\theta}}{2}$.

Ca și în cazul nerelativist (cap. 3, pagina 94) avem $dp^2/dt = 0$, deoarece:

$$\frac{d}{dt} p^2 = 2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 2q\mathbf{p}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

iar $\mathbf{p}$ este totdeauna paralel cu $\mathbf{v}$, astfel încît produsul mixt este nul. Așadar, mărimea impulsului și, corespunzător, mărimea vitezei particulei rămîn neschimbate într-un cîmp magnetic constant. Dar, dacă numai direcția particulei este modificată de către cîmp, atunci factorul:

$$\frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{13.10}$$

care intră în definiția lui $\mathbf{p}$, este constant.

Ecuația de mișcare (13.9) poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{13.11}$$

Întrucît expresia (13.10) este constantă, ecuația de mai sus are soluții în care particula se mișcă pe o orbită circulară aflată într-un plan perpendicular pe $\mathbf{B}$ (vezi cap. 3, pag. 94—99). Fie ρ raza cercului și ω_c viteza unghiulară a mișcării, pentru cazul $\mathbf{v}$ perpendicular pe $\mathbf{B}$ (vezi fig. 13.5). Înlocuind în ecuația (13.11) $d\mathbf{v}/dt$ cu accelerația centripetă $\omega_c^2\rho$ și pe v cu $\omega_c\rho$, obținem:

$$\frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \omega_c^2\rho = q\omega_c\rho B$$

din care rezultă:

$$\boxed{\omega_c = \frac{qB(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}{M}}. \tag{13.12}$$

Observăm că frecvența mișcării este mai joasă pentru particulele rapide decît pentru cele care se mișcă lent. Așadar, ciclotronul poate fi folosit pentru accelerarea particulelor la energii relativiste, doar dacă radiofrecvența cîmpului de accelerare (sau inducția magnetică) este modulată în așa fel încît să satisfacă la orice moment relația (13.12), pe măsură ce energia particulei crește. În figura 13.6 este trasat graficul acestei relații. Pentru particule nerelativiste dependența frecvenței de viteză poate fi neglijată, după cum am văzut în capitolul 3.

Valorile lui ω_c prezise de formula (13.12) au fost confirmate experimental în timpul funcționării acceleratoarelor de mare energie. Relația a fost verificată pentru electroni accelerați într-un sincrotron în care $1/(1 - \beta^2)^{1/2} \approx$ $\approx 12\,000$, adică în situații în care masa efectivă a particulei era de 12 000 de ori mai mare decît masa de repaus. Este interesant de observat că acest număr arată, în termeni de $c - v$, cu cît este mai mare viteza luminii decît viteza particulei. Avem în adevăr:

$$1 - \beta^2 = (1 + \beta)(1 - \beta) \approx 2(1 - \beta) \approx (12\,000)^{-2} \approx 7{,}0 \cdot 10^{-9}. \tag{13.13}$$

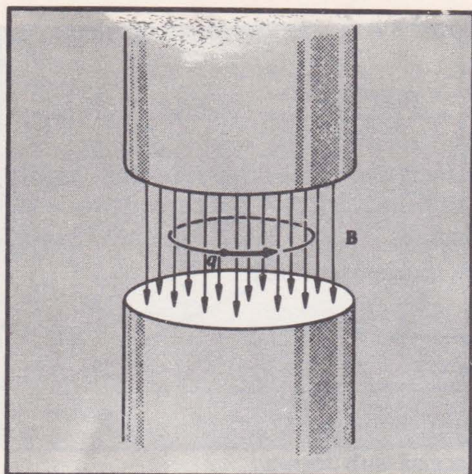


FIG. 13.5. O sarcină cu viteza **v**, perpendiculară pe un cîmp magnetic uniform, efectuează o mișcare circulară, pe un cerc de rază $\rho = p/qB$.

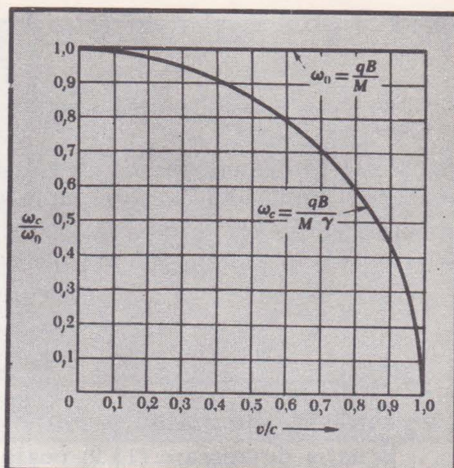


FIG. 13.6. Frecvența ciclotronică ω_c a mișcării circulare a unei sarcini q, cu masa de repaus M, în planul perpendicular pe cîmpul magnetic uniform **B**, este reprezentată ca funcție de raportul v/c. Frecvența ciclotronică nerelativistă ω_0 este reprezentată de linia orizontală.

Remarcați că am pus $1 + \beta \approx 2$. Din relația (13.13) avem:

$$1 - \beta = \frac{c - v}{c} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-9}; \quad c - v \approx 1 \text{ m/s}.$$

În acceleratorul de protoni de la Serpukhov din Uniunea Sovietică, protonii sînt injectați la o energie de 100 MeV pe o orbită circulară într-un cîmp magnetic și accelerați pînă la circa 80 000 MeV. Aceasta corespunde la o variație a lui β de la 0,43 la $1 - 6{,}8 \cdot 10^{-5}$.

Folosind expresia (13.12), rezultă raza de girație ρ a unei particule relativiste într-un cîmp magnetic:

$$\rho = \frac{v}{\omega_c} = \frac{Mv}{qB(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Membrul drept conține impulsul p, astfel încît[1]:

$$\boxed{B\rho = \frac{p}{q}}.$$

Rezultă că raza ρ a cercului descris de o particulă încărcată care se mișcă în cîmp magnetic este o măsură directă a impulsului relativist. Această relație este cea mai importantă metodă independentă de măsurare a impulsurilor particulelor relativiste încărcate.

[1] În sistemul CGS, în care forța Lorentz se scrie $\mathbf{F} = \frac{q}{c}\, \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, relația capătă forma $B\rho = \frac{cp}{q}$. (N.T.)

SISTEMUL CENTRULUI DE MASĂ ŞI ENERGIA DE PRAG

Conservarea energiei impune în general o limitare asupra reacțiilor nucleare sau fenomenelor care pot avea loc la ciocnirea a două particule. De exemplu, un foton de mare energie (rază γ) poate produce o pereche electron-pozitron conform reacției:

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+,$$

numai dacă energia razei γ este mai mare decît energia corespunzătoare maselor de repaus ale electronului și pozitronului. Așadar, doar conservarea energiei impune faptul că pragul sau energia minimă de producere a perechii electron-pozitron este:

$$E_\gamma = 2mc^2 \approx 1{,}02 \cdot 10^6 \text{ eV}.$$

Reamintim din capitolul 9, pagina 313, că masa de repaus a pozitronului este egală cu masa de repaus a electronului.

Această reacție este, cu toate acestea, imposibilă în spațiul liber, oricît de mare ar fi energia, întrucît impulsul nu se poate conserva. Am văzut în capitolul 12 că impulsul fotonului este $p_\gamma = \dfrac{E_\gamma}{c}$. Vom observa această reacție în sistemul centrului de masă al perechii electron-pozitron. În acest sistem, suma dintre impulsurile electronului și pozitronului este zero:

$$p_{e^-} + p_{e^+} = 0.$$

Dar, în acest sistem, impulsul fotonului incident nu este zero, deoarece nu există *nici un* sistem în care impulsul fotonului să poată fi făcut egal cu zero[1]. Așadar, în sistemul centrului de masă

$$\mathbf{p}_\gamma \neq \mathbf{p}_{e^-} + \mathbf{p}_{e^+} = 0,$$

iar reacția $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ nu poate avea loc întrucît nu se conservă impulsul. Dacă reacția nu poate avea loc într-un sistem, ea nu poate avea loc în nici un sistem.

Reacția poate avea loc în vecinătatea altei particule, ca de exemplu un nucleu sau un atom, pentru că atunci nucleul poate absorbi variația de impuls. El absoarbe variația de impuls acționînd într-un sens sau altul asupra particulelor încărcate, prin intermediul cîmpului său coulombian. Avem atunci:

$$\mathbf{p}_\gamma + \mathbf{p}_{nucl} = \mathbf{p}'_{nucl} + \mathbf{p}_{e^-} + \mathbf{p}_{e^+}.$$

Impulsul nucleului variază în timpul reacției, dar altfel nucleul rămîne nemodificat și acționează doar ca un catalizator de tipul cel mai simplu. Impulsul nuclear inițial poate fi nul.

O particulă grea sau un nucleu poate absorbi o mare variație de impuls, fără să absoarbă multă energie. Aceasta se vede din forma energiei cinetice nerelativiste:

$$E_c = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{p^2}{2M}.$$

---

[1] Putem modifica frecvența fotonului trecînd de la un sistem la altul, dar nu-l putem face să dispară sau să-l aducem în repaus prin acest procedeu.

Cu cît masa M este mai mare, cu atît energia cinetică asociată unui impuls dat, este mai mică.

EXEMPLU

Energia de prag în fotoproducerea mezonilor π^0. Masa mezonului π° este de 135 MeV. Care este energia minimă a unei raze γ care poate produce în sistemul laboratorului reacția:

$$\gamma + p = \pi^0 + p,$$

dacă protonul inițial se află în repaus?

Este instructiv să se considere această problemă din două puncte de vedere diferite: în sistemul laboratorului și în sistemul centrului de masă.

(1) În sistemul laboratorului (vezi fig. 13.7) o rază γ de mare energie ciocnește un proton aflat în repaus, iar produsele de reacție, la prag, sînt un proton și un mezon π^0 care se mișcă împreună cu viteza βc, în sensul de mișcare al razei γ. Scriem legile de conservare ale impulsului și energiei. (Observați că în ecuațiile de mai jos, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ și nu trebuie confundat cu simbolul pentru razele γ, din discuția precedentă.)

$$\text{Energia:}\quad h\nu_{lab} + M_p c^2 = \frac{(M_p + M_\pi)\, c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(M_p + M_\pi)\, c^2. \qquad (13.14)$$

$$\text{Impulsul:}\quad \frac{h\nu_{lab}}{c} = \frac{(M_p + M_\pi)\, \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(M_p + M_\pi)\, \beta c.$$

Putem elimina pe $h\nu_{lab}$ și să rezolvăm în funcție de β și γ:

$$h\nu_{lab} = \gamma(M_p + M_\pi)\, \beta c^2$$

$$\gamma(M_p + M_\pi)\, \beta c^2 + M_p c^2 = \gamma(M_p + M_\pi)\, c^2$$

Punînd $M_\pi/M_p = \alpha$, obținem:

$$1 + \gamma\beta(1 + \alpha) = \gamma(1 + \alpha)$$

sau

$$\sqrt{1 - \beta^2} = (1 + \alpha)\,(1 - \beta)$$

ceea ce dă:

$$\beta = \frac{\alpha(2 + \alpha)}{2 + 2\alpha + \alpha^2} \qquad (13.15)$$

și

$$\gamma = \frac{2 + 2\alpha + \alpha^2}{2(1 + \alpha)}.$$

Rezolvînd acum pentru $h\nu_{lab}$:

$$h\nu_{lab} = \frac{M_p c^2 \alpha (1 + \alpha)\,(2 + \alpha)}{2(1 + \alpha)} = \frac{M_\pi c^2}{2}\,(2 + \alpha) \qquad (13.16)$$

sau

$$h\nu_{lab} = 144{,}7 \text{ MeV},$$

unde am folosit valoarea:

$$\alpha = \frac{135}{938} = 0{,}144.$$

(2) În sistemul centrului de masă (vezi fig. 13.8) scriem:

$$\text{energia:}\quad h\nu_{c.m.} + \gamma M_p c^2 = (M_p + M_\pi) c^2$$

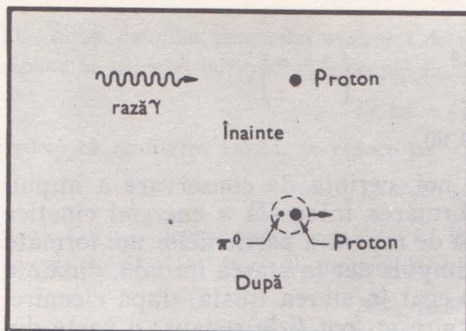


FIG. 13.7. In sistemul laboratorului, o rază γ ciocnește un proton aflat în repaus și produce un proton și un mezon π°, care, pentru a conserva impulsul la prag, trebuie să se deplaseze împreună în direcția razei γ.

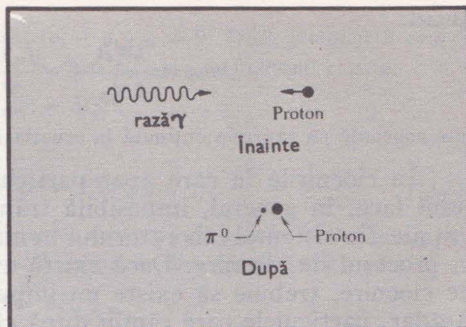


FIG. 13.8. Sistemul centrului de masă. O rază γ și un proton se deplasează unul către celălalt, cu impulsuri egale. După interacție, protonul și mezonul π° rămîn în repaus, dacă reacția are loc la prag.

$$\text{și impulsul: } \frac{h\nu_{c.m.}}{c} = \gamma M_p \beta c$$

unde β și γ se referă acum la mișcarea inițială a protonului în sistemul centrului de masă. Folosind aceeași notație ca mai sus și eliminînd $h\nu_{c.m.}$, rezultă:

$$\gamma(\beta + 1) = 1 + \alpha; \quad \frac{\beta + 1}{\alpha + 1} = \sqrt{1 - \beta^2}$$

și

$$\beta = \frac{\alpha(2 + \alpha)}{2 + 2\alpha + \alpha^2},$$

care este același cu β obținut din ecuația (13.15) de mai sus, așa cum și trebuia să fie, întrucît în sistemul centrului de masă protonul și mezonul π° se află în repaus în starea finală. Continuînd calculul, găsim:

$$h\nu_{c.m.} = M_\pi c^2 \frac{2 + \alpha}{2(1 + \alpha)} = 126{,}5\,\text{MeV}. \tag{13.17}$$

Putem afla, de asemenea, $h\nu_{c.m.}$ din $h\nu_{lab}$ aplicînd formula pentru efectul Doppler (ec. 12.28)

$$h\nu_{c.m.} = h\nu_{lab}\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \frac{M_\pi c^2}{2}(2 + \alpha)\frac{1}{1 + \alpha},$$

ceea ce concordă cu valoarea din relația (13.17).

Un mod mai simplu de a rezolva problema este acela de a ține seama că $E^2 - p^2c^2$ este un invariant. Scriem acest lucru în sistemul laboratorului, pentru situația dinainte și de după ciocnire și obținem:

$$(h\nu_{lab} + M_p c^2)^2 - \left(\frac{h\nu_{lab} c}{c}\right)^2 = [\gamma(M_p + M_\pi)\, c^2]^2 - [\beta\gamma(M_p + M_\pi)\, c^2]^2, \tag{13.18}$$

ceea ce dă:

$$2h\nu_{lab} M_p c^2 + M^2{}_p c^4 = (M_p + M_\pi)^2 c^4,$$

unde am folosit relația:

$$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1.$$

Atunci:

$$h\nu_{lab} = \frac{M^2c^2}{2M_p} + \frac{M_\pi M_p c^2}{M_p} = M_\pi c^2\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right),$$

care concordă cu expresia obținută în ecuația (13.16).

În ciocnirile în care apar particule noi, cerința de conservare a impulsului face, în general, imposibilă transformarea integrală a energiei cinetice inițiale din sistemul laboratorului în masă de repaus a particulelor noi formate în procesul de ciocnire. Dacă există un impuls net în starea inițială, dinainte de ciocnire, trebuie să existe un impuls egal în starea finală, după ciocnire. Așadar, particulele care rămîn după ciocnire nu pot fi în repaus; o parte din energia cinetică inițială este transferată particulelor finale ca energie cinetică.

Singurul caz în care *toată* energia cinetică din reacție este disponibilă, este acela în care impulsul stării inițiale este zero. Impulsul poate fi făcut totdeauna egal cu zero prin observarea ciocnirii dintr-un sistem de referință potrivit — sistemul centrului de masă.

EXEMPLU

Energia pe care o poate furniza o particulă în mișcare. Cîtă energie se poate elibera la ciocnirea unui proton în mișcare cu un proton în repaus?

Presupunem întîi că energia cinetică a protonului incident este mult mai mică decît M_pc^2, astfel încît ciocnirea poate fi tratată nerelativist. Dacă protonul incident are viteza $\mathbf{v}$ în sistemul laboratorului, atunci energia sa cinetică este:

$$E_{c,\,lab} = \frac{1}{2}M_pv^2. \tag{13.19}$$

În sistemul centrului de masă un proton are viteza $\frac{1}{2}\mathbf{v}$, iar celălalt, viteza $-\frac{1}{2}\mathbf{v}$. În sistemul centrului de masă toată energia cinetică este disponibilă pentru producerea altor particule, această energie cinetică este:

$$E_{c,\,c.m.} = \frac{1}{2}M_p\left(\frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{1}{2}M_p\left(\frac{1}{2}v\right)^2 = \frac{1}{4}M_pv^2. \tag{13.20}$$

Din relațiile (13.19) și (13.20) obținem rezultatul nerelativist:

$$\frac{E_{c,\,c.m.}}{E_{c,\,lab}} = \frac{1}{2}$$

așadar, este disponibilă jumătate din energie în sistemul laboratorului. Dacă accelerăm un proton la 50 MeV, numai 25 MeV din această energie este capabilă, la ciocnirea acestui proton de un alt proton în repaus, să creeze particule noi.

Eficiența este și mai scăzută în regiunea relativistă; ea se calculează imediat.

Putem lega energia relativistă totală în sistemul laboratorului de energie relativistă totală în sistemul centrului de masă, folosind proprietatea de invarianță [relația (12.11) folosită de asemenea și în ecuația (13.18) de mai sus] aplicată sistemului de doi protoni:

$$\underbrace{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2c^2}_{\text{laborator}} = \underbrace{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2c^2}_{\text{centru de masă}}. \tag{13.21}$$

Din însăşi definiţia sistemului centrului de masă, $(p_1 + p_2)_{c.m.} = 0$. Dacă protonul 2 este în repaus în sistemul laboratorului, atunci $E_{2,\,lab} = M_p c^2$ şi $p_{2,\,lab} = 0$. Folosind relaţia:

$$E_{1,\,lab}^2 - p_{1,\,lab}^2 c^2 = M_p^2 c^4,$$

vedem că egalitatea (13.21) se reduce la:

$$2E_{1,\,lab} M_p c^2 + 2M_p^2 c^4 = E_{tot,\,c.m.}^2, \tag{13.22}$$

unde $E_{tot,\,c.m.}$ desemnează suma $E_1 + E_2$ în sistemul centrului de masă. Dacă $E_{tot,\,lab}$ este energia totală $E_1 + M_p c^2$ în sistemul laboratorului, obţinem din relaţia (13.22) că:

$$2E_{tot,\,lab} M_p c^2 = E_{tot,\,c.m.}^2$$

sau

$$\frac{E_{tot,\,c.m.}}{E_{tot,\,lab}} = \frac{2M_p c^2}{E_{tot,\,c.m.}}. \tag{13.23}$$

Aceasta dă o măsură a „eficienţei". Pentru a obţine o energie totală de 20 GeV în sistemul centrului de masă, pentru $M_p c^2 \approx 1$ GeV, avem nevoie de:

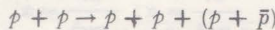
$$E_{tot,\,lab} = \frac{E_{tot,\,c.m.}^2}{2M_p c^2} \approx \frac{400}{2} \approx 200 \text{ GeV}.$$

În acest caz, circa 20 GeV din energia cinetică a protonului de 200 GeV din sistemul laboratorului, este disponibilă pentru crearea de noi particule.

Din cauza eficienţei scăzute în cazul ciocnirii unei particule relativiste cu o particulă în repaus, s-au construit acceleratoare cu fascicule încrucişate de electroni, în care se ciocnesc două fascicule de electroni cu impulsuri egale şi de semn contrar, precum şi un nou inel de accelerare pentru acceleratorul de protoni de 28 GeV de la CERN[1], astfel încît pot fi efectuate şi experienţe cu fascicule încrucişate de protoni.

EXEMPLU

Pragul de producere a antiprotonului. Energia bevatronului de la Berkeley a fost proiectată astfel încît să poată produce antiprotoni (notaţi $\bar{p}$) prin bombardarea protonilor aflaţi în repaus cu protoni de mare energie. Reacţia poate fi scrisă sub forma:



$$p + p \rightarrow p + p + (p + \bar{p})$$

adică, se produce o pereche proton-antiproton. Sarcina se conservă întrucît antiprotonul are sarcina $-e$. Care este energia de prag a reacţiei?

Energia de repaus a perechii proton-antiproton este $2M_p c^2$, deoarece masa de repaus a antiprotonului este egală cu masa de repaus a protonului. Aşadar, în sistemul centrului de masă energia cinetică trebuie să fie cel puţin $2M_p c^2$, ceea ce înseamnă $M_p c^2$ pentru fiecare dintre cei doi protoni iniţiali. La aceasta trebuie adăugată energia de repaus $M_p c^2$ a fiecăruia dintre protonii iniţiali, astfel încît energia totală în sistemul centrului de masă este:

$$E_{tot,\,c.m.} = 4M_p c^2.$$

În sistemul laboratorului energia corespunzătoare este, din ecuaţia (13.23):

$$E_{tot,\,lab} = \frac{E_{tot,\,c.m.}^2}{2M_p c^2} = \frac{16}{2} M_p c^2,$$

[1] Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire (Consiliul European pentru Cercetarea Nucleară) institut de cercetări din Geneva, Elveţia, la care lucrează împreună cercetători din mai multe ţări europene.

din care $2M_pc^2$ este energia de repaus a celor doi protoni, iar $6M_pc^2$ este energie cinetică. Așadar energia de prag a reacției este

$$6M_pc^2 = 6(0{,}938 \text{ GeV}) \approx 5{,}63 \text{ GeV}.$$

Dacă protonul incident se ciocnește cu un proton legat în nucleu, energia de prag este mai mică, intrucît protonul țintă este legat. Puteți spune de ce? Energia de prag observată pentru producerea antiprotonilor, atunci cînd protonii se ciocnesc cu nuclee, este de circa 4,4 GeV, cu 1,2 GeV mai mică decît cea calculată pentru o țintă de protoni liberi in repaus. Acest prag este energia cinetică minimă pe care trebuie s-o aibă protonul incident în sistemul laboratorului, pentru ca reacția să aibă loc.

EXEMPLU

Efectul Compton. Efectul Compton este una dintre cele mai convingătoare manifestări a naturii corpusculare a undelor electromagnetice. Presupunem că studenților le este binecunoscut caracterul ondulatoriu al luminii ca, de exemplu, faptul că lungimea de undă poate fi determinată din efecte de interferență. În 1922, Compton (pentru o analiză detaliată a efectului Compton, vezi volumul 4) a arătat că atunci cînd unde electromagnetice din domeniul razelor X (lungimea de undă de ordinul 10^{-10} m) interacționează cu electroni liberi, ele se comportă ca niște particule în ciocniri elastice. Am văzut deja că energia caracteristică, sau energia cuantică, asociată undelor electromagnetice de frecvență ν, este $h\nu$; impulsul corespunzător este $h\nu/c$. Figura 13.9 ilustrează impulsurile într-o ciocnire cu un electron în care raza X este imprăștiată la unghiul θ, cu frecvența micșorată ν'.

Impulsul longitudinal: $\dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h\nu'}{c}\cos\theta + \gamma m\beta c\cos\Phi.$

Impulsul transversal: $\dfrac{h\nu'}{c}\sin\theta = \gamma m\beta c\sin\Phi.$

Energia: $mc^2 + h\nu = h\nu' + \gamma mc^2.$

Vom calcula ν' în funcție de θ, eliminînd β și Φ. Fie:

$$\frac{h\nu}{mc^2} = \alpha; \quad \frac{h\nu'}{mc^2} = \alpha'$$

$$\alpha = \alpha'\cos\theta + \gamma\beta\cos\Phi$$

$$\alpha'\sin\theta = \gamma\beta\sin\Phi.$$

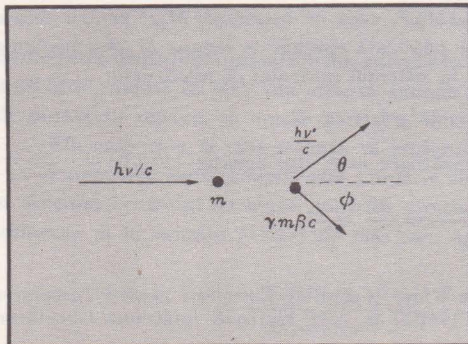


FIG. 13.9. Efectul Compton. Impulsurile inainte și după ciocnire.

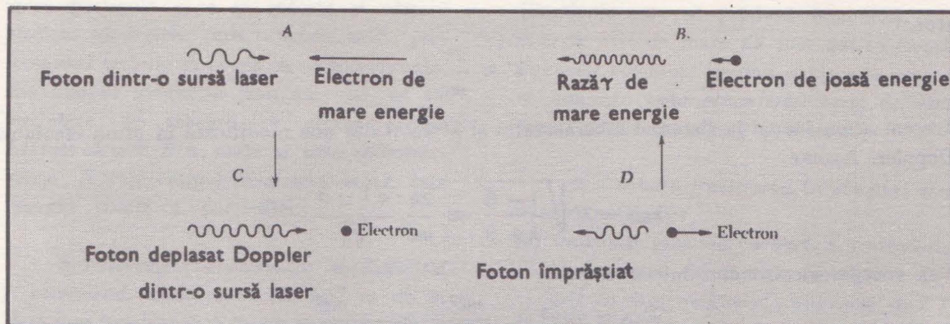


FIG. 13.10. Efectul Compton invers. A și B sint stările in sistemul laboratorului. Transformarea discutată în text trece pe A in C. $C \to D$ prin efect Compton ($\theta = \pi$) iar transformarea duce înapoi pe D în B.

După cîteva calcule nu prea complicate, obținem:

$$\alpha - \alpha' = \alpha\alpha' (1 - \cos\theta)$$

$$\frac{h\nu}{mc^2} - \frac{h\nu'}{mc^2} = \frac{h^2\nu\nu'}{m^2c^4} (1 - \cos\theta).$$

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2} (1 - \cos\theta)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta).$$

Același rezultat poate fi obținut rezolvînd problema în sistemul centrului de masă și apoi trecînd înapoi în sistemul laboratorului, dar aceasta complică mult calculele.

O aplicație recentă în care intervine efectul Compton este folosirea acceleratoarelor de electroni de mare energie și a laserilor pentru a produce raze γ de mare energie prin efect Compton invers. Să privim ciocnirea ilustrată în figura 13.10. Pentru a calcula energia razelor γ, trecem în sistemul pe care l-am folosit mai sus, în care electronul este în repaus.

Fotonul produs de un laser și care a suferit o deplasare Doppler are energia:

$$h\nu_c = h\nu \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$$

[relația (12.28)] (am folosit ν_c pentru a ne referi la fig. 13.10,C) sau:

$$\lambda_c = \lambda \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}},$$

unde β este raportul v/c pentru electron și este ≈ 1. Considerăm acum împrăștierea înapoi a fotonului care a suferit deplasarea Doppler, astfel încît:

$$\lambda' - \lambda_c = \frac{h}{mc} (1 - \cos\pi) = \frac{2h}{mc}.$$

Dacă,

$$\beta \approx 1 \text{ astfel încît } \lambda_c \ll \frac{h}{mc}\text{[1]},$$

[1] În problema 13 de la sfîrșitul acestui capitol se cere soluția exactă.

atunci

$$\lambda' \approx \frac{2h}{mc}.$$

Trecem acum înapoi la sistemul laboratorului și λ' va fi din nou modificată în urma efectului Doppler. Așadar

$$\lambda_{lab} \approx \lambda' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \approx \frac{2h}{mc} \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{2}}.$$

Dar energia electronului inițial este:

$$E_{lab} \approx \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{mc^2}{\sqrt{2}\sqrt{1-\beta}}$$

$$\lambda_{lab} \approx \frac{2h}{mc} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{mc^2}{\sqrt{2}\, E_{lab}} \approx \frac{h}{mc} \frac{mc^2}{E_{lab}}.$$

Atunci, vom avea, în această aproximație:

$$\frac{c}{\lambda_{lab}} \approx \frac{mc^2}{h} \cdot \frac{E_{lab}}{mc^2} \approx \nu_{lab}$$

și

$$h\nu_{lab} \approx E_{lab}$$

unde E este energia electronului; aproape toată energia cinetică trece asupra fotonului. Efectul Compton invers este important în probleme de astrofizică (vezi probl. 12 și 13).

PROBLEME

1. *Protonul în cîmp magnetic.* Calculați raza de girație și frecvența de girație a unui proton avînd energia relativistă totală de 30 GeV, într-un cîmp magnetic cu inducția de 1,5 T.

R: $\omega_c = 4{,}5 \cdot 10^6$ rad/s.

2. *Reculul nuclear.* Care este energia de recul (exprimată în Jouli și în electronvolți) a unui nucleu de masă 10^{-26} kg, după emisia unei raze γ de 1 MeV? (Vezi cap. 12, teme avansate.)

R: $1{,}4 \cdot 10^{-17}$ J; 90 eV.

3. *Ciocnirea electron-proton.* Un electron cu energia de 10 GeV se ciocnește cu un proton aflat în repaus.

(*a*) Care este viteza în sistemul centrului de masă?

(*b*) Care este energia disponibilă pentru producerea de noi particule? (Exprimați-o în unități de M_pc^2.)

4. *Frecvența ciclotronică la energii înalte.* La energii înalte frecvența ciclotronică depinde de viteza particulei accelerate. Pentru a menține sincronismul

între particula care se rotește și cîmpul electric alternativ care o accelerează, proiectantul trebuie să ceară ca radiofrecvența, sau cîmpul magnetic (sau ambele), să fie modulate pe măsură ce viteza crește. Arătați că $\omega \propto B/E$, unde ω este radiofrecvența, B este cîmpul magnetic, iar E este energia totală a particulei.

5. *Frecvențele ciclotronice nerelativistă și relativistă.* Ciclotronul de 4,67 m de la Berkeley funcționează la un cîmp magnetic fixat, de inducție 2,3 T.

(*a*) Calculați frecvența ciclotronică nerelativistă a protonilor în acest cîmp.
R: $2{,}2 \cdot 10^8$ rad/s.

(*b*) Calculați frecvența corespunzătoare unei energii cinetice finale de 720 MeV.

6. *Legi de conservare*

(*a*) Arătați că un electron care se deplasează în vid cu viteza **v** nu poate emite o singură cuantă de lumină. Arătați, cu alte cuvinte, că un astfel de proces de emisie ar încălca legile de conservare.

(*b*) Un atom de hidrogen aflat într-o stare electronică excitată poate emite o cuantă de lumină. Arătați că într-un astfel de proces legile de conservare pot fi satisfăcute. Cum vă explicați diferența dintre situațiile prezentate în cazurile *a* și *b*?

7. *Proton de mare energie.* Calculați impulsul, energia totală și energia cinetică a unui proton ($M_pc^2 = 0{,}94$ GeV) pentru care $\beta \equiv v/c = 0{,}99$, în următoarele cazuri:

(*a*) În sistemul laboratorului.
R: 6,58 GeV/c; 6,65 GeV; 5,71 GeV.

(*b*) În sistemul propriu al particulei.

(*c*) În sistemul centrului de masă al protonului și al unui nucleu de heliu în repaus ($M_{He} \approx 4M_p$).

(*d*) În sistemul centrului de masă al protonului și al unui proton în repaus.

8. *Particule provenite din raze cosmice.* Aflați raza orbitei unei particule de sarcină e și energie 10^{19} eV într-un cîmp magnetic de 10^{-10} T. (Această valoare este rezonabilă pentru cîmpul magnetic al galaxiei noastre.) Comparați cu diametrul galaxiei. (Particule care să producă fenomene la o energie atît de mare au fost găsite efectiv în razele cosmice, ele dau naștere la ceea ce se numește *jerbe atmosferice largi* de electroni, pozitroni, raze γ și mezoni.)

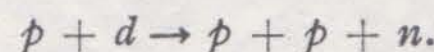
9. *Curbura traiectoriei în cîmpuri electrice și magnetice*

(*a*) Calculați raza de curbură a traiectoriei unui proton de energie cinetică 1 GeV într-un cîmp magnetic transversal de 2 T.
R: 2,83 m.

(*b*) Ce cîmp electric transversal este necesar pentru a produce aproximativ aceeași rază de curbură? Folosiți faptul că raza de curbură a curbei $y(x)$ este dată de formula $\rho = [1 + dy/dx]^{\frac{3}{2}}/(d^2y/dx^2)$ și calculați ρ în punctul în care protonul intră în cîmpul electric, știind că $dy/dx = 0$, iar d^2y/dx^2 poate fi calculat din d^2y/dt^2 și $x = vt$.
R: $5{,}25 \cdot 10^8$ V/m.

(*c*) Considerați mărimea cîmpului electric de la punctul (*b*) și discutați posibilitatea folosirii cîmpului electric pentru deflecția particulelor relativiste.

10. *Dezintegrarea deuteronului.* Considerăm reacția nucleară în care un proton incident de energie cinetică $E_{c,p}$ ciocnește și desface în componentele sale un deuteron aflat în repaus, conform reacției:



$$p + d \to p + p + n.$$

În apropiere de prag, cei doi protoni și neutronul se mișcă ca o îngrămădire nelegată, cu aproximativ aceeași viteză. Scrieți expresiile nerelativiste pentru impuls și energie și arătați că energia cinetică de prag, $E^0_{c,p}$, a protonului incident este:

$$E^0_{c,p} = \frac{3}{2} E_L,$$

unde E_L ($\approx$ 2MeV) este energia de legătură a deuteronului în raport cu protonul și neutronul liberi.

11. *Pragul nerelativist al mezonului* π^0. Folosiți expresiile nerelativiste pentru energia cinetică și impulsul protonului și mezonului π^0 pentru calcularea pragului de fotoproducere [comparați cu ecuațiile (13.14)].

Care este diferența față de pragul calculat din formula (13.16)? Care este energia cinetică corectă a sistemului proton–mezon π^0 la prag? Care este energia cinetică nerelativistă la prag?

R: $h\nu_{prag} = M_p c^2 [1 + \alpha - (1 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}]$.

12. *Ciocnirea elastică electron-foton.* Care este energia cinetică a unui electron care este împrăștiat fără pierdere sau cîștig de energie de către un foton cu energia de 10 000 eV? (*Indicație*: comparați cu ciocnirea elastică în sistemul centrului de masă.)

R: 98 eV.

13. *Efectul Compton invers.* Deduceți formula exactă pentru lungimea de undă a fotonului de lungime de undă λ împrăștiat înapoi de către un electron cu viteza βc.

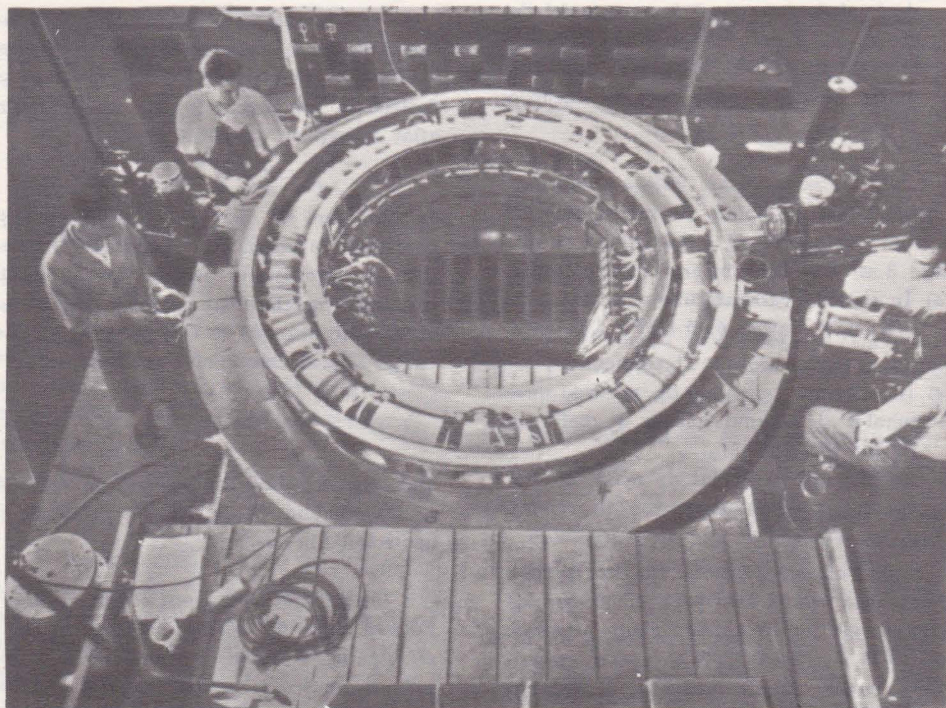
Aplicați-o la cazul în care fotonul incident are energia $h\nu = 3{,}0$eV, iar electronul are energia totală 1,02 MeV ($\gamma = 2$), pentru a găsi energia fotonului împrăștiat.

R: 41 eV.

NOTĂ ISTORICĂ

Sincrotronul. Principiul sincrotronului este folosit la toate acceleratoarele de mare energie în regiunea peste 1 GeV, cu excepția acceleratoarelor liniare de electroni, ca cel de la Stanford. Sincrotronul este o instalație destinată accelerării particulelor la energii foarte mari. El este de fapt un ciclotron în care sau cîmpul magnetic, sau radiofrecvența aplicate sînt variate în timpul accelerării și în care faza particulelor în raport cu cîmpul electric de frecvență radio se adaptează în mod automat la valoarea

FIG. 13.11. Primul sincrotron electronic. *(Fotografie făcută în Laboratorul Lawrence de la Berkeley.)*



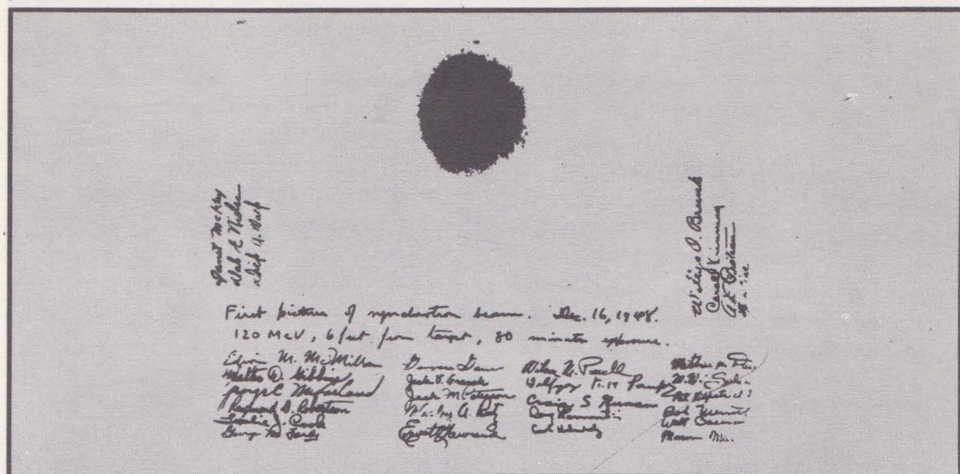


FIG. 13.12. Prima imagine a unui fascicul sincrotronic. *(Fotografie făcută în Laboratorul Lawrence de la Berkeley.)*

convenabilă pentru accelerare. Ideea modulării frecvenței sau a cîmpului nu era nouă; nouă era demonstrarea faptului că orbitele particulelor rămîn stabile în timpul modulării. Principiul sincrotronului a fost descoperit de V. Veksler la Moscova și independent de el de către E. M. McMillan la Berkeley.

O relatare completă a cercetărilor lui Veksler a apărut în Journal of Physics (U.R.S.S.) *9*: 153–158 (1945). Articolul lui McMillan a apărut în Physical Review *68*: 143 (1945). Reproducem în facsimil articolul lui McMillan. Figura 13.11 este fotografia primului sincrotron construit sub conducerea lui McMillan, iar figura 13.12 este prima înregistrare fotografică a unui fascicul de raze X.

LECTURI SUPLIMENTARE

C. Kacser, *Introducere în teoria restrînsă a relativității* („Introduction to the Special Theory of Relativity"), capitolul 7, Ediție broșată Co-Op, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1967.

A.P. French, *Relativitatea restrînsă* („Special Relativity"), capitolul 6 W. W. Norton and Company, Inc., New York, 1968.

Lawrence Radiation Laboratory, *Introducere în detectarea particulelor nucleare în camera cu bule* („Introduction to the Detection of Nuclear Particles in a Bubble Chamber"), Ealing Press, Cambridge, Mass., 1964. O foarte frumoasă colecție de fotografii ale urmelor particulelor în camera cu bule (de privit cu un aparat stereoscopic).

Sincrotonul – Propunere de accelerator de particule de mare energie

Edwin M. McMillan
Universitatea din California, Berkeley, California
5 septembrie 1945

Una dintre metodele folosite cu succes pentru accelerarea particulelor la energii foarte mari se bazează pe aplicarea repetată a unui cîmp electric oscilant, ca în ciclotron. Dacă însă e nevoie de un număr mare de accelerări individuale, poate apărea o dificultate în a menţine particulele în fază cu cîmpul electric. În cazul ciclotronului, această dificultate apare în momentul în care variaţia relativistă a masei produce o variaţie apreciabilă a vitezei unghiulare a particulelor.

Dispozitivul propus aici foloseşte „stabilitatea de fază" pe care o au anumite orbite în ciclotron. Să considerăm, de exemplu, o particulă a cărei energie este astfel încît frecvenţa ei egalează frecvenţa cîmpului electric. Această energie va fi numită energia de echilibru. Să presupunem în continuare că particula traversează spaţiile de accelerare chiar în momentul în care cîmpul electric se anulează, schimbîndu-se în aşa fel încît dacă particula ajunge mai devreme, ea este accelerată. Această orbită este evident staţionară. Pentru a arăta că este şi stabilă, să presupunem că modificăm faza astfel încît particula să ajungă mai devreme în spaţiul de accelerare. Atunci ea este accelerată; creşterea de energie produce o scădere a frecvenţei, ceea ce face ca particula să ajungă mai tîrziu. Un argument similar arată că o abatere a energiei faţă de valoarea de echilibru tinde să se corecteze de la sine. Aceste orbite deplasate vor continua să oscileze, faza şi energia lor variind în jurul valorilor de echilibru.

Pentru a accelera particulele este deci necesar să se schimbe valoarea energiei de echilibru, ceea ce poate fi făcut prin variaţia sau a cîmpului magnetic, sau a frecvenţei. În timp ce energia de echilibru variază, faza se va deplasa înainte, în măsură suficientă spre a furniza forţa de accelerare necesară; asemănarea acestei comportări cu aceea a motorului sincron a sugerat numele dispozitivului.

Ecuaţia care descrie variaţiile fazei şi energiei a fost dedusă ţinîndu-se seama de variaţia temporală a cîmpului magnetic şi a frecvenţei, de accelerarea prin efectul betatron (viteza de variaţie a fluxului), de variaţia acesteia din urmă cu raza orbitei în timpul oscilaţiilor şi de pierderile pe energie prin ionizare şi radiaţie. S-a presupus că perioada oscilaţiilor fazei este mare în comparaţie cu perioada mişcării orbitale. Sarcina a fost luată egală cu sarcina electronică. Ecuaţia (1) defineşte energia de echilibru; (2) dă energia instantanee în funcţie de valoarea de echilibru şi de variaţia fazei iar (3) este „ecuaţia de mişcare" a fazei. Ecuaţia (4) determină raza orbittei.

$$E_0 = (300\ cH)/(2\pi f) \tag{1}$$

$$E = E_0[1 - (\mathrm{d}\Phi)/(\mathrm{d}\theta)] \tag{2}$$

$$2\pi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(E_0 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\theta}\right) + V \sin\Phi = \left[\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}t} - \frac{300}{c}\frac{\mathrm{d}F_0}{\mathrm{d}t} + L\right] + \left[\frac{E_0}{f^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\theta} \tag{3}$$

$$R = (E^2 - E_r^2)^{\frac{1}{2}}/300\ H.$$

Simbolurile sînt:

E = energia totală a particulei (energie cinetică şi de repaus),

E_0 = valoarea de echilibru a lui E,

E_r = energia de repaus,

V = cîștigul de energie pe rotație de la cîmpul electric, corespunzînd fazei de accelerare cea mai favorabilă,

L = pierderea de energie per rotație prin ionizare și radiație,

H = cîmpul magnetic pe orbită,

F_0 = fluxul magnetic pe orbita de echilibru,

Φ = faza particulei (poziția unghiulară în raport cu spațiul de accelerare atunci cînd cîmpul electric = 0),

θ = deplasarea unghiulară a particulei,

f = frecvența cîmpului electric,

c = viteza luminii,

R = raza orbitei.

(Energiile sînt date în eV, mărimile magnetice în sistemul CGS e.m., unghiurile în radiani, celelalte mărimi în unități CGS).

Se vede că ecuația (3) este identică cu ecuația de mișcare a pendulului fără restricții de amplitudine, termenii din dreapta fiind respectiv un cuplu constant și o forță de atenuare. Variația fazei este așadar oscilatorie atît timp cît amplitudinea nu este prea mare, amplitudinea permisă fiind egală cu $\pm \pi$, atunci cînd prima paranteză din dreapta este zero și egală cu zero atunci cînd această paranteză este egală cu V. Pe baza teoremei adiabatice, amplitudinea va scădea ca inversul rădăcinii a patra a lui E_0, deoarece E_0 are rolul unei mase slab variabile în primul termen al ecuației; dacă frecvența scade, ultimul termen din dreapta va produce o atenuare suplimentară.

Aplicarea metodei va depinde de tipul particulelor care urmează a fi accelerate, deoarece energia inițială va fi în orice caz apropiată de energia de repaus. În cazul electronilor, E_0 va varia în cursul accelerării cu un factor mare. Nu este practic, în condițiile actuale, să se varieze frecvența cu un factor atît de mare, astfel încît se va prefera variația lui H, ceea ce are avantajul suplimentar că orbitele se apropie de o rază constantă. În cazul particulelor grele, E_0 va varia mult mai puțin; de exemplu, pentru accelerarea protonilor la 300 MeV, E_0 variază doar cu 30%. Astfel, pentru accelerarea particulelor grele, este practic să se varieze frecvența.

Un proiect posibil pentru un accelerator de electroni la 300 MeV este schițat mai jos:

cîmpul maxim H = 10 000 gauss,
raza finală a orbitei = 100 cm,
frecvența = 48 megacicli/s,
energia de injectare = 300 kV,
raza inițială a orbitei = 78 cm.

Deoarece raza crește cu 22 cm în timpul accelerării, cîmpul magnetic trebuie să acopere doar o coroană circulară de această lărgime, desigur cu o margine de toleranță pentru a asigura cîmpului o formă corespunzătoare. Cîmpul trebuie să scadă ușor cu raza, pentru a asigura stabilitatea radială și axială a orbitelor. Fluxul magnetic total este aproximativ 1/5 din cel necesar pentru a satisface condiția de flux în betatron, pentru aceeași energie finală.

Tensiunea electrozilor de accelerare depinde de viteza de variație a cîmpului magnetic. Dacă magnetul este excitat la 60 cicli, valoarea maximă a lui $\frac{1}{f}\frac{dE_0}{dt}$ este 2 300 V. (Termenul betatronic care conține $\frac{dF_0}{dt}$ este aproximativ 1/5 din această valoare și poate fi neglijat). Dacă luăm V = = 10 000 V cel mai mare defazaj va fi 13°. Numărul de rotații pentru o oscilație de fază va varia de la 22 la 440 în decursul accelerării. Variația relativă a lui E_0 în timpul unei perioade

de oscilație a fazei va fi 6,3% în momentul injectării, iar apoi va scădea. Așadar, presupunerea variației lente în timpul unei perioade, folosită în deducerea ecuațiilor, este valabilă. Pierderea de energie prin radiație este discutată în nota următoare, unde se arată că ea nu este importantă în condițiile de mai sus.

Aplicarea la particule grele nu va fi discutată în detaliu, dar pare probabil ca cea mai bună metodă să fie variația frecvenței. Deoarece această variație nu trebuie să aibă loc foarte rapid, ea poate fi executată cu ajutorul unor instalații rotitoare mecanice, antrenate de un motor.

Sincrotronul oferă posibilități de a cîștiga energii de ordinul miliardului de eV, atît pentru electroni, cît și pentru particule grele; în primul caz, costul în materiale și putere va fi mai mic decît în betatron; în al doilea, nu apare limitarea relativistă de energie din cazul betatronului.

În prezent se prevede construirea unui accelerator de electroni de 300 MeV folosind principiul de mai sus, la Laboratorul de Radiații al Universității din California, de la Berkeley.

14

Principiul echivalenței

Cuprins

Vom discuta în acest capitol alte cîteva aspecte ale relativității. Unele subiecte leagă teoria generală a relativității de teoria restrînsă discutată în capitolele 11—13.

MASA INERTĂ ȘI MASA GRAVITAȚIONALĂ

Legea a doua a lui Newton poate fi folosită pentru a defini masa unui obiect, supunînd corpuri de diverse mase la aceeași forță și măsurînd accelerațiile corespunzătoare. Astfel:

$$M(1)\ a(1) = F = M(2)\ a(2)$$

$$\frac{M(2)}{M(1)} = \frac{a(1)}{a(2)}$$

și dacă punem $M(1) = 1$, atunci $M(2)$ este unic determinată. Masa astfel determinată este cunoscută ca *masa inertă* și se notează cu M_i. Putem însă determina masa și prin măsurarea forței gravitaționale exercitate asupra corpului de către un alt corp, ca de pildă Pămîntul:

$$\frac{GM_gM_p}{R_p^2} = F; \quad M_g = \frac{FR_p^2}{GM_p}. \tag{14.1}$$

Masa astfel determinată este cunoscută sub numele de *masă gravitațională* și se notează cu M_g. În ecuația (14.1) M_p și R_p sînt masa și raza Pămîntului. Este remarcabil faptul că masa inertă a tuturor corpurilor este proporțională, în limita erorilor experimentale, cu masa gravitațională. (Putem considera că constanta G a fost determinată ca în experiența lui Cavendish, folosind definiția forței și implicînd așadar masa inertă.) Cea mai simplă experiență pentru a demonstra acest fapt este de a vedea dacă toate corpurile cad cu aceeași accelerație. Pentru un corp care cade aproape de suprafața Pămîntului, avem:

$$M_i(1)\ a(1) = \frac{GM_pM_g(1)}{R_p^2}. \tag{14.2}$$

iar pentru un alt corp:

$$M_i(2)\ a(2) = \frac{GM_pM_g(2)}{R_p^2}. \tag{14.3}$$

Împărţind ecuaţia (14.2) prin (14.3), rezultă:

$$\frac{M_i(1)}{M_i(2)}\frac{a(1)}{a(2)}=\frac{M_g(1)}{M_g(2)}$$

$$\frac{M_i(1)}{M_g(1)}=\frac{M_i(2)}{M_g(2)}\cdot\frac{a(2)}{a(1)}.$$

Dar observaţia directă arată că, în limita erorilor experimentale pentru corpurile care cad în vid avem relaţia $a(2) = a(1)$; obţinem aşadar egalitatea rapoartelor maselor inerte şi gravitaţionale:

$$\frac{M_i(1)}{M_g(1)}=\frac{M_i(2)}{M_g(2)}. \tag{14.4}$$

Cîtă vreme acest raport este constant, putem face valoarea raportului din relaţia (14.4) egală cu unu, prin ajustarea corespunzătoare a valorii lui G; adică, determinăm ca în experienţa lui Cavendish forţa F între masele $M_i(1)$ şi $M_i(2)$, măsurate în sistemul inerţial la distanţa r una de cealaltă şi punem:

$$G=\frac{Fr^2}{M_i(1)\ M_i(2)}.$$

Sarcina experimentală este de a determina dacă apar variaţii ale raportului M_i/M_g pentru diverse particule, materiale sau obiecte.

Determinările clasice au fost făcute de către Newton folosind metoda pendulului descrisă în problema 1 de la sfîrşitul acestui capitol. Alte determinări celebre sînt cele ale lui R. Eötvös, care le-a început prin 1890 şi le-a continuat timp de aproape 25 de ani. Metoda lui ingenioasă poate fi înţeleasă dacă se consideră un pendul suspendat la suprafaţa Pămîntului la latitudinea de 45° ca în figura 14.1. Asupra pendulului acţionează forţa gravitaţională $M_g \cdot g$ îndreptată spre centrul Pămîntului, precum şi forţa centrifugă[1] $M_i\omega^2R_p/\sqrt{2}$, unde $R_p/\sqrt{2}$ este raza cercului pe care se roteşte bobiţa pendulului, datorită rotaţiei Pămîntului. Forţa centrifugă este îndreptată normal la axa de rotaţie, iar componenta sa orizontală se obţine printr-o înmulţire cu cos 45° sau $1/\sqrt{2}$. Rezultanta celor două forţe face un unghi:

$$\theta\approx\frac{M_i\omega^2R_p/2}{M_gg-\frac{1}{2}\ M_i\omega^2R_p}\approx\frac{M_i\omega^2R_p}{2M_gg}$$

cu direcţia razei Pămîntului în punctul respectiv. Am folosit aici faptul că raportul $M_i\omega^2R_p/M_g\cdot g$ este un număr mic astfel că tg $\theta = \theta$. Folosind datele de la începutul capitolului 4, vedem că acest raport are valoarea de aproximativ 0,003.

Să presupunem acum că pe un fir de torsiune sînt suspendate, ca în figura 14.2, două bobiţe din materiale diferite, avînd masele gravitaţionale egale, $M_g(1) = M_g(2)$. Dacă $M_i(1) = M_i(2)$, atunci nu va exista nici un cuplu care să tindă a răsuci firul de torsiune; această situaţie este ilustrată

[1] Ne plasăm într-un sistem de referinţă care se roteşte odată cu Pămîntul.

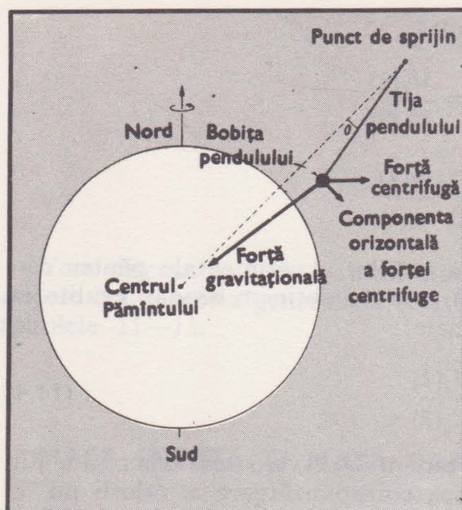


FIG. 14.1. Ilustrarea devierii pendulului de la verticală cu un unghi θ din cauza forței centrifuge care apare ca urmare a rotației Pămîntului. În figură unghiul θ, distanța dintre bobiță și suprafața pămîntului, precum și forța centrifugă sînt mult amplificate.

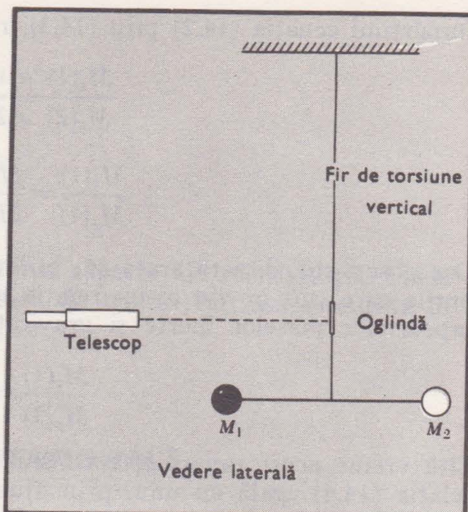


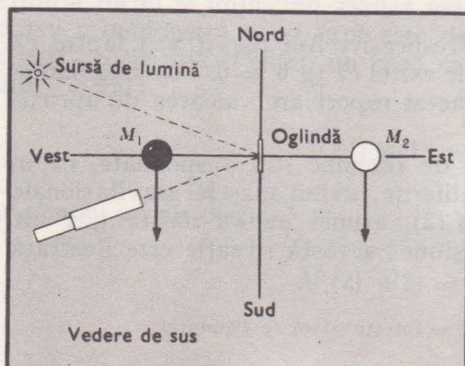
FIG. 14.2. Vedere laterală a unui aparat asemănător cu cel folosit de Eötvös pentru determinarea raportului dintre masa inertă și cea gravitațională. Corpurile M_1 și M_2 sînt de naturi diferite, dar au aceeași masă gravitațională.

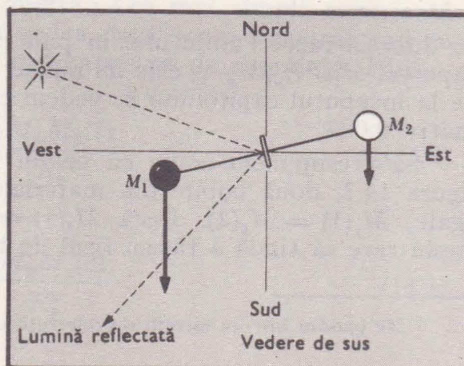
în figura 14.3. Dacă însă $M_i(1)$ este mai mare decît $M_i(2)$, atunci componenta orizontală a forței centrifuge asupra lui $M(1)$ va fi mai mare decît cea asupra lui $M(2)$ și firul se va răsuci sub acțiunea unui moment diferit de zero, ca în figura 14.4. Se repetă măsurătoarea după întoarcerea aparatului cu 180°; aceasta ajută la determinarea poziției de echilibru a balanței. Experiența este un bun exemplu de aplicare a unei metode de zero: efectul ar fi observabil numai dacă $M_i(1) \neq M_i(2)$. Eötvös a comparat opt materiale diferite cu platina (Pt), luată ca etalon. El a găsit că:

$$\frac{M_i(1)}{M_g(1)} = \frac{M_i(\mathrm{Pt})}{M_g(\mathrm{Pt})},$$

FIG. 14.3. Dacă masele inerte ale corpurilor M_1, M_2 sînt egale, componentele orizontale ale forței centrifuge (cele două săgeți) sînt egale și în fir nu apare nici o torsiune.

FIG. 14.4. Dacă masa inertă a lui M_1 este mai mare decît cea a lui M_2, va apărea o răsucire a firului de torsiune și oglinda se va roti.





cu o eroare mai mică de $1/10^8$. Dicke și alții[1] au îmbunătățit experiența folosind aceeași tehnică de ansamblu. Rezultatele lor arată că raportul este egal cu unu, cu o eroare mai mică de $1/3 \cdot 10^{10}$.

Situația experimentală actuală poate fi sintetizată astfel:

Notînd cu Q raportul M_g/M_i, atunci:

1. Valoarea lui Q pentru un electron plus un proton este egală cu valoarea lui Q pentru un neutron cu o eroare de $1/10^7$. (Această comparație decurge direct din compararea elementelor ușoare și grele din tabelul periodic; elementele grele au o proporție mai mare de neutroni decît cele ușoare.)
2. Valoarea lui Q pentru acea parte a masei nucleare corespunzătoare energiei de legătură nucleară este egală cu unu cu o eroare de $1/10^5$.
3. Valoarea lui Q pentru acea parte a masei atomice corespunzătoare energiei de legătură a electronilor orbitali este egală cu unu cu o eroare de $1/200$.
4. Q pentru aluminiu în raport cu aurul este egal cu $1 \pm 3 \cdot 10^{-11}$.

MASA GRAVITAȚIONALĂ A FOTONILOR

Am văzut în capitolul 12 că un foton de energie $h\nu$, unde ν este frecvența, trebuie să aibă o masă inertă egală cu $\frac{h\nu}{c^2}$. Are fotonul și masă gravitațională? Din punct de vedere experimental este evident că are, și că masa gravitațională este egală ca valoare cu masa inertă. (Masa de *repaus* este, evident, nulă.)

Să considerăm un foton, care la înălțimea L deasupra suprafeței Pămîntului are frecvența ν și energia $h\nu$. După ce cade pe distanța L, el va pierde energia potențială $mgL = \frac{h\nu}{c^2} gL$ pe care o va cîștiga ca energie „cinetică" astfel încît energia sa va deveni $h\nu'$, unde:

$$h\nu' \approx h\nu + \frac{h\nu}{c^2} gL, \tag{14.5}$$

presupunînd că fotonul are masa $\frac{h\nu}{c^2}$ constantă în timpul căderii (argumentul fiind acela că ν' nu diferă mult de ν). Frecvența măsurată a fotonului *după* cădere, ν', rezultă așadar, din relația (14.5):

$$\nu' \approx \nu\left(1 + \frac{gL}{c^2}\right). \tag{14.6}$$

Figura 14.5 ilustrează acest efect. Dacă $L = 20$ m, deplasarea relativă a frecvenței este:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gL}{c^2} \approx \frac{10^3 \times 2 \times 10^3}{(3 \times 10^{10})^2} \approx 2 \cdot 10^{-15}. \tag{14.7}$$

---

[1] P. G. Roll, R. Krotkov, R. H. Dicke, Ann. Phys. (N.Y.) *26*: 442 (1964).

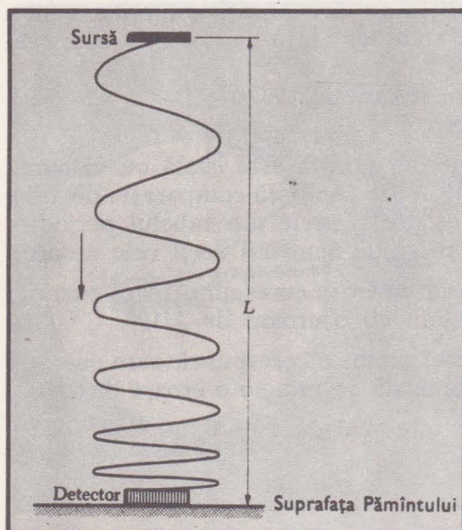


FIG. 14.5. Prezentare schematică a experienței care pune în evidență deplasarea gravitațională spre roșu. Un foton emis de către sursă spre centrul Pămîntului pierde „energia potențială" $\Delta U = (h\nu/c^2)gL$ și cîștigă, în căderea de-a lungul distanței L, o cantitate egală de „energie cinetică". Frecvența fotonului care intră în detector este $\nu' = \nu(1 + gL/c^2)$; frecvența fotonului emis de sursă este ν. (Cazul descris aici este de fapt o *deplasare spre albastru*. El ar fi *o deplasare spre roșu* dacă fotonul s-ar mișca în sus.)

Efectul extrem de slab, a fost într-adevăr observat de către Pound și Rebka[1] folosind o sursă de raze γ (vezi fig. 14.6). Ei au găsit că:

$$\frac{(\Delta\nu)_{exp}}{(\Delta\nu)_{calc}} = 1{,}05 \pm 0{,}10$$

unde $\Delta\nu = \nu' - \nu$, iar valoarea calculată a fost obținută din ecuația (14.6).

Un foton cu frecvența ν emis la o distanță infinită față de Pămînt va avea la suprafața Pămîntului frecvența ν' care, prin generalizarea relațiilor (14.5) și (14.6), va fi egală cu:

$$\nu' \approx \nu(1 + GM_p/R_pc^2). \qquad (14.8)$$

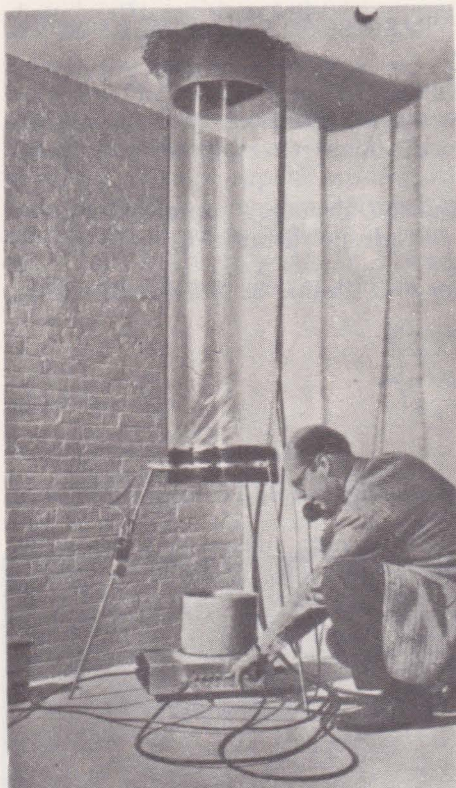


FIG. 14.6. Capătul inferior al instalației experimentale de cădere a fotonilor construită de Pound la Harvard. G. A. Rebka Jr. reglează fotomultiplicatorii după comenzile centrului de control. Într-o versiune ulterioară a experienței au fost prevăzute și mijloace de control ale temperaturii sursei și detectorului. Deplasarea gravitațională măsurată este egală doar cu 1/500 din lărgimea liniei. Pentru a măsura cu precizie o deplasare atît de mică sînt necesare cîteva artificii tehnice speciale. *(Prin amabilitatea lui R. V. Pound.)*

[1] R. V. Pound și G. A. Rebka, Jr., Phys. Rev. Lett. *4*: 337 (1960).
R. V. Pound și J. L. Snider, Phys. Rev., *140*: B 788 (1965).

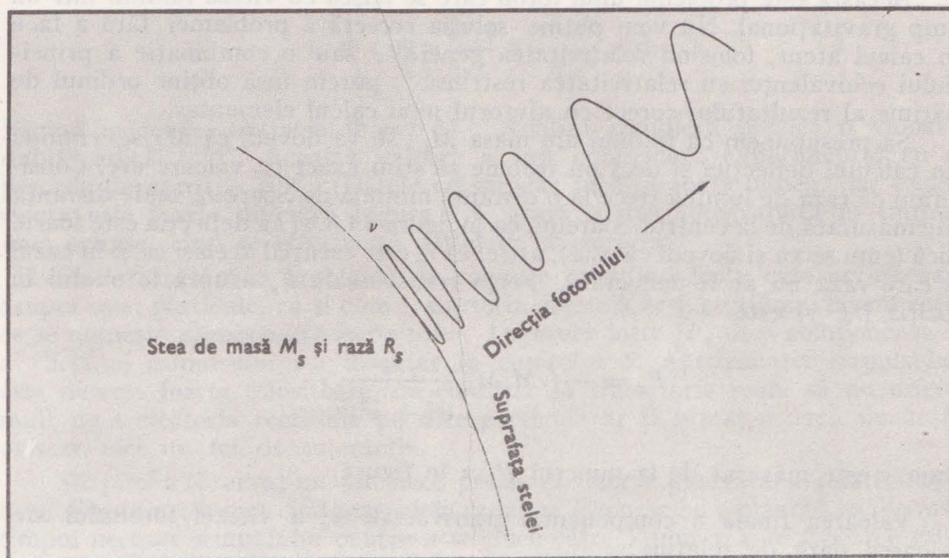
Menționăm că în formula deplasării de frecvență intervine raportul dintre lungimea gravitațională a Pămîntului[1], GM_p/c^2 și raza sa, R_p. Raportul este de $6 \cdot 10^{-10}$. Efectul mai puternic de aici este de aceeași natură ca și cel din ecuația (14.6) numai că acum sursa de lumină este la distanță infinită de Pămînt.

Deplasarea gravitațională spre roșu. După cum este ilustrat în figura 14.7, un foton de frecvență ν care părăsește o stea și ajunge la infinit, va fi observat cu o frecvență:

$$\nu' \approx \nu\left(1 - \frac{GM_s}{R_s c^2}\right) \tag{14.9}$$

unde M_s și R_s sînt masa și raza stelei respective. Aceasta rezultă dintr-o modificare a ecuației (14.8): fotonul pierde acum energie prin părăsirea cîmpului gravitațional al stelei. Un foton din regiunea albastră a spectrului vizibil va avea frecvența deplasată către capătul roșu al spectrului. Pentru acest motiv efectul este cunoscut sub numele de *deplasare gravitațională spre roșu*. Ea nu trebuie să fie confundată cu deplasarea doppleriană[2] spre roșu, care se datorează îndepărtării radiale aparente a stelelor față de Pămînt, conform celor discutate în capitolul 10.

FIG. 14.7. Un foton care părăsește suprafața unei stele, indreptindu-se spre infinit, cîștigă „energie potențială" și pierde o cantitate egală de „energie cinetică". Dacă frecvența fotonului la suprafață este ν, atunci frecvența fotonului la infinit este $\nu' = \nu\,(1 - GM_s/R_s c^2)$



[1] Definită prin analogie cu raza electronului (cap. 9, pag. 301) $M_e c^2 = \frac{GM_e^2}{R}$, $R = \frac{GM_e}{c^2}$

[2] În original „recessional red-shift" adică deplasarea spre roșu datorată îndepărtării (N.T.)

Piticele albe au valori mari ale raportului M_s/R_s și au așadar valori ridicate pentru deplasarea gravitațională spre roșu. Pentru steaua Sirius B deplasarea relativă calculată este:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx -5{,}9 \cdot 10^{-5},$$

iar valoarea observată este $-6{,}6 \cdot 10^{-5}$. Discrepanța se datorează necunoașterii precise a lui M_s și R_s.

Dacă:

$$\frac{GM_s}{R_s c^2} > 1,$$

atunci frecvența ν' în ecuația (14.9) ar fi negativă, ceea ce este desigur imposibil. Totuși, cazul $GM_s/R_s c^2 \approx 1$ este o problemă mai complicată care se rezolvă în cadrul teoriei generale a relativității. Rezultatul este că dacă:

$$\frac{2GM_s}{R_s c^2} \geq 1, \tag{14.10}$$

atunci fotonul sau orice altă particulă *nu* pot părăsi steaua. Astfel de stele se numesc *găuri negre* și ele au stîrnit un mare interes printre astrofizicieni[1] (vezi probl. 5).

Deflecția fotonilor de către Soare. Ce este deflecția unghiulară a unei raze de lumină sau a unui foton care trece foarte aproape de suprafața Soarelui?

Aceasta este problema unui foton care se mișcă cu viteza luminii într-un cîmp gravitațional. Nu vom obține soluția corectă a problemei fără a face un calcul atent, folosind relativitatea generală, sau o combinație a principiului echivalenței cu relativitatea restrînsă[2]; putem însă obține ordinul de mărime al rezultatului corect cu ajutorul unui calcul elementar.

Să presupunem că fotonul are masa M_L; se va dovedi că M_L se elimină din calculul deflecției și deci nu trebuie să știm exact ce valoare are. Considerăm că raza de lumină trece la o distanță minimă de Soare r_0, unde distanța este măsurată de la centrul Soarelui, ca în figura 14.8, și că deflecția este foarte mică (cum se va și dovedi că este), astfel că r_0 este esențial același ca și în cazul în care raza nu ar fi deflectată. Forța transversală F_x asupra fotonului în poziția (r_0, y) este:

$$F_x = -GM_s M_L \frac{r_0}{(r_0^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

unde y este măsurat de la punctul P ca în figură.

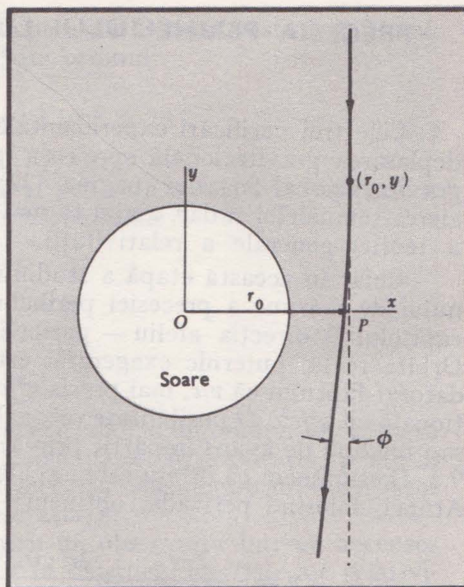
Valoarea finală a componentei transversale v_x a vitezei fotonului are valoarea dată de relațiile:

$$M_L v_x = \int F_x \, \mathrm{d}t = \int F_x \frac{\mathrm{d}y}{v_y} \approx \frac{1}{c}\int F_x \, \mathrm{d}y$$

[1] De exemplu, Kip S. Thorne, Scientific American *217*: 5, (1967); R. Ruffini și J. A. Wheeler, Physics Today *24*: 30 (1971)

[2] L. I. Schiff, Am. J. Phys. *28*: 340 (1961).

FIG. 14.8. Deflecția unui foton de către cîmpul gravitațional al Soarelui.



astfel încît:

$$v_x \approx -\frac{GM_s r_0}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(r_0^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \approx -\frac{2GM_s r_0}{c}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(r_0^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \approx -\frac{2GM_s}{cr_0}.$$

Rezultă că, atunci cînd r_0 este egal cu raza Soarelui, R_s, deflecția unghiulară este (vezi fig. 14.8).

$$\operatorname{tg}\Phi \approx \Phi \approx \frac{|v_x|}{c} \approx \frac{2GM_s}{R_s c^2}\,\text{rad}.$$

Făcînd calculele, obținem $\Phi = 0{,}87''$. Analiza completă prezice o valoare dublă, adică 1,75''. Această valoare a fost confirmată experimental cu o precizie de aproape 20%. (Datele nu satisfac încă pe toată lumea, dar experiența este foarte dificilă.) Figura 1.9. arată o stea fotografiată în timpul unei eclipse, cînd se efectuează astfel de măsurători.

Cînd rezolvăm o problemă de ciocnire calculînd forța care acționează asupra unei particule, ca și cum traiectoria acesteia ar fi rectilinie, facem ceea ce se numește *aproximația impulsului*. Legătura între $\int F_x \, \mathrm{d}t$ și componenta x a variației impulsului s-a discutat în capitolul 5. Aproximația impulsului este deseori foarte folositoare, cu condiția ca traiectoria reală să nu difere mult de traiectoria rectilinie pe care particula ar fi urmat-o dacă nu ar fi existat nici un fel de interacție.

Shapiro[1] a observat un alt efect prezis de teoria generală a relativității a lui Einstein. Atunci cînd semnalele radar se ciocnesc cu o planetă ca Venus, timpul necesar semnalului pentru a se duce către Venus și a se întoarce este mai mare în cazul în care semnalul trece aproape de Soare decît în cazul în care acesta este departe de Soare, iar observațiile experimentale sînt în acord cu teoria.

[1] I. I. Shapiro, Scientific American, *219*:1, 28 (1968).

PRECESIA PERIHELIULUI LUI MERCUR

Cele trei verificări experimentale clasice ale relativității generale sînt deplasarea gravitațională spre roșu (pagina 421), deflecția luminii în cîmpul gravitațional al Soarelui (pagina 422) și precesia periheliului lui Mercur. Întîrzierea semnalelor radar, amintită mai sus, este cunoscută ca a patra verificare a teoriei generale a relativității.

Chiar în această etapă a studiului nostru putem face o estimare a ordinului de mărime a precesiei periheliului lui Mercur. Conform calculelor din capitolul 9 direcția afeliu – periheliu trebuie să rămînă fixă în spațiu [1]. Orbita reală, puternic exagerată, este ilustrată în figura 14.9. Efectul este datorat faptului că v/c, mai precis v^2/c^2, nu este zero. Ce cantitate este proporțională cu v^2/c^2? O posibilitate rezonabilă ar fi unghiul de avans per revoluție, sau unghiul de avans împărțit prin 2π. Putem estima raportul v/c din tabelul 9.2. Presupunem că orbita este circulară, iar raza este egală cu semiaxa mare. Atunci, folosind perioada, obținem:

$$v = \frac{2\pi r}{\text{perioadă}} = \frac{2\pi \cdot 0{,}39 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}}{7{,}6 \cdot 10^{6}} \approx 4{,}8 \cdot 10^{4} \text{ m/s}$$

$$\frac{v}{c} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{v^2}{c^2} \approx 2{,}6 \cdot 10^{-8} = \frac{\delta\theta}{2\pi}$$

$$\delta\theta \text{ (în grade)} \approx 360 \cdot 2{,}6 \cdot 10^{-8} \approx 9 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta\theta \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ secunde de arc/revoluție.}$$

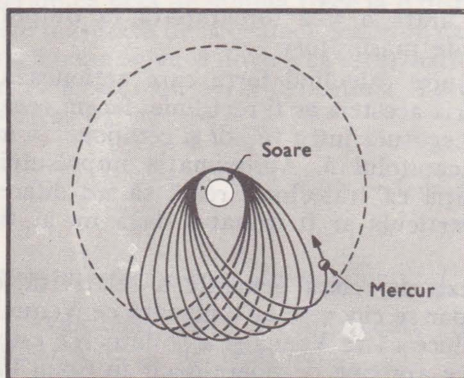


FIG. 14.9. Precesia orbitei lui Mercur explicată de teoria generală a relativității. Planul orbitei coincide cu cel al paginii; pentru claritate, excentricitatea orbitei este puternic amplificată. Dacă nu ar exista precesie, figura ar fi o elipsă staționară.

---

[1] Perturbația datorată celorlalte planete poate fi calculată și comparată cu experiența. Mișcarea observată a acestei direcții în spațiu diferă de cea calculată cu ajutorul acestor perturbații cu 43″ pe secol.

Cifra obişnuită este numărul de secunde pe secol. Perioada este de 0,24 ani. Putem atunci să ne aşteptăm la un efect de ordinul:

$$\delta\theta \text{ (pe secol)} = \frac{100}{0,24} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \approx 13''.$$

Valoarea experimentală este 42,9″ iar teoria generală a relativităţii prezice 43,0″, ceea ce este în limitele erorilor experimentale [1].

ECHIVALENŢA

Faptul experimental că nu s-a descoperit nici o diferenţă între masa inertă şi cea gravitaţională a unui corp, sugerează că gravitaţia poate fi într-un anumit sens echivalentă cu o accelerare. Să considerăm un observator într-un ascensor care cade liber cu acceleraţia g.

Principiul echivalenţei afirmă că, pentru un observator într-un ascensor care cade liber, legile fizicii sînt aceleaşi ca în sistemele inerţiale ale relativităţii restrînse (cel puţin în imediata apropiere a centrului ascensorului). *Efectele datorate mişcării accelerate şi forţelor gravitaţionale se anulează reciproc.* Observînd forţe aparent gravitaţionale, un observator situat într-un ascensor închis nu poate spune ce parte din aceste forţe corespunde accelerării şi ce parte adevăratelor forţe gravitaţionale. El nu va discerne, de altfel, nici o forţă, *în afara cazului* în care alte forţe (adică, nu de tip gravitaţional) ar acţiona asupra ascensorului. În particular, principiul postulat al echivalenţei cere ca raportul dintre masa inerţială şi masa gravitaţională să fie $\frac{M_i}{M_g} \equiv 1$. „Imponderabilitatea" unui om aflat într-un satelit pe orbită este o consecinţă a principiului echivalenţei.

Urmărirea consecinţelor matematice ale principiului echivalenţei conduce la teoria generală a relativităţii; pentru o discuţie suplimentară, consultaţi bibliografia indicată la sfîrşitul capitolului 11.

UNDELE GRAVITAŢIONALE

Teoria generală a relativităţii prezice că, aşa cum sarcinile electrice oscilante dau naştere undelor electromagnetice, masele gravitaţionale oscilante, ca stelele duble, dau naştere undelor gravitaţionale. Din cauza valorii mici a constantei gravitaţionale G, acestea sînt greu de detectat, dar, recent, Weber[2] a publicat o serie de rezultate care indică sosirea din spaţiul cosmic a undelor gravitaţionale. Figura 14.10 prezintă un detector de unde gravitaţionale[3].

---

[1] O discuţie atentă a acestor experienţe clasice se găseşte în primul capitol al cărţii lui L. Witten, Gravitaţia: o introducere în cercetarea curentă (Gravitation: An Introduction to Current Research), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.

[2] J. Weber, Phys. Rev. Lett. *24*: 276 (1970); Scientific American *224*: 5, 22 (1971).

[3] Experienţele lui Weber ca şi experienţele ulterioare nu au dat un rezultat pozitiv cert. În prezent, se lucrează la punerea la punct a unor instalaţii cu o precizie de 10 – 100 ori mai mare decît cea a primului aparat. Este de aşteptat ca undele gravitaţionale să fie, totuşi, detectate. (N.T.)

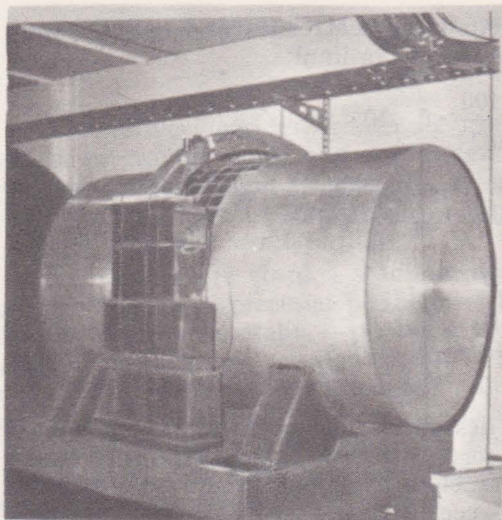


FIG. 14.10. Detectorul de unde gravitaționale este un cilindru de aluminiu cu diametrul de 96 cm. Lungimea sa este de 151 cm și frecvența sa fundamentală este 1661 Hz. Are directivitatea unui cuadrupol masic. *(Prin amabilitatea Profesorului Weber.)*

PROBLEME

1. *Studiul pendulului în funcție de masele inertă și gravitațională.* Arătați că frecvența pendulului de lungime L este dată de

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{M_g}{M_i}\cdot\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}},$$

unde M_g și M_i sînt masele gravitațională și inertă. (Bessel a făcut încă de mult observații foarte atente ale pendulului și a arătat că M_g este egal cu M_i cu o eroare de $1/6 \times 10^4$.)

2. *Deplasarea gravitațională spre roșu.* Găsiți o expresie pentru deplasarea gravitațională spre roșu în care să nu se folosească presupunerea $\Delta\nu/\nu \ll 1$ (Neglijați orice efecte legate de curbura spațiului.) Plecați de la egalitatea $h\Delta\nu = -(h\nu/c^2)(M_s G/r^2)\Delta r$ și integrați pentru dr de la R_s la infinit și pentru dν de la ν la ν'.

R: $\nu' = \nu e^{-GM_s/R_s c^2}$.

3. *Deplasarea spre roșu dată de galaxia noastră.* Estimați deplasarea gravitațională spre roșu pentru lumina care părăsește centrul galaxiei noastre, atunci cînd este observată de la o distanță foarte mare. (Considerați masa uniform distribuită într-o sferă cu raza 10 000 parseci.) Masa galaxiei este $\sim 8 \cdot 10^{41}$ kg.

R. $\Delta\nu/\nu = -3 \times 10^{-6}$.

4. *Radio-galaxii.* În 1962, a fost identificată cu mijloace optice o sursă extraterestră intensă de unde radio; ea apărea ca o mică stea cu un diametru unghiular de 0,5″. S-a crezut la început că este vorba de o stea din galaxia noastră care emite unde radio, dar apoi i s-a determinat spectrul și s-a văzut că liniile spectrale sînt foarte puternic deplasate spre roșu. De exemplu, o linie a oxigenului atomic avînd în mod normal $\lambda = 3{,}727 \cdot 10^{-7}$ m a fost identificată la $\lambda = 5{,}097 \cdot 10^{-7}$ m. O explicație posibilă ar fi aceea că este vorba de o stea foarte masivă cu un spectru puternic *deplasat gravitațional spre roșu.* Dacă această radio-stea ipotetică se află în galaxia noastră, distanța ei față de

Pămînt trebuie să fie mai mică decît 10^{20} m [1].

(*a*) Calculați din diametrul unghiular și deplasarea spre roșu, masa și densitatea medie a stelei în ipoteza că distanța este de 10^{20} m. Conduce aceasta la o explicare rezonabilă a acestui obiect?

R: Masa este $1{,}0 \times 10^{41}$ kg, densitatea medie este $1{,}7 \times 10^{-3}$ kg/m^3. Rezultatul nu pare rezonabil, întrucît masa este aproape 0,1 din masa totală a galaxiei noastre (folosiți rezultatul probl. 2).

(*b*) O altă sugestie ar putea fi aceea că obiectul este o „radio-galaxie" de un tip special, iar deplasarea spre roșu este o deplasare spre roșu doppleriană, ca cea din capitolul 10. Calculați distanța pînă la ea în această a doua ipoteză.

R: $6 \cdot 10^9$ ani lumină ($5 \cdot 10^{25}$ m).

(*c*) Ipoteza radio-galaxiei nu este în contradicție cu această valoare?

R: da, ea are o rază de aproximativ 10^{20} m, care se află în domeniul obișnuit al razelor galactice.

5. *Gaură neagră.* Care ar trebui să fie raza Soarelui pentru ca el să formeze o gaură neagră [vezi ecuația (14.10)]? Comparați densitatea pe care ar avea-o atunci, cu densitatea nucleului.

R: $\sim 3 \cdot 10^3$ m

NOTĂ ISTORICĂ

Pendulele lui Newton. Citām din cele relatate de Newton în *Principia* asupra experiențelor sale cu pendule, făcute pentru a determina eventualele variații ale raportului dintre masele gravitaționale și inerțială.

Că toate corpurile grele cad spre pămînt (cel puțin înlăturînd întîrzierea neegală provenită din rezistența slabă a aerului) în timpuri egale, s-a observat de mult de către alții; și că egalitatea timpurilor se poate constata foarte precis cu pendulele. Am făcut experiența cu aur, argint, plumb, sticlă, nisip, sare comună, lemn, apă, griu. Am folosit două cutii de lemn rotunde și egale. Pe una am umplut-o cu lemn și aceeași greutate de aur am atîrnat-o (cît se poate de exact) în centrul de oscilație al celeilalte. Cutiile atîrnate de fire egale de 11 picioare, formau pendule cu totul egale, în ceea ce privește greutatea, forma și rezistența aerului; și situate una lîngă alta mergeau și se întorceau împreună, cu oscilații egale, timp foarte îndelungat. Prin urmare, cantitatea de materie în aur (potrivit corolarului 1 și 6, propoziția XXIV, Cartea a II-a) era către cantitatea de materie în lemn, precum acțiunea forței motoare asupra aurului întreg către acțiunea aceleiași asupra lemnului întreg: adică, precum greutatea către greutate. Și tot așa pentru celelalte.

În corpurile de aceeași greutate s-a putut observa în mod manifest o diferență de materie, chiar, dacă ea ar fi fost mai mică decît a mia parte a întregii materii [2].

LECTURI SUPLIMENTARE

C. Kacser, *Introducere în teoria restrînsă a relativității* („Introduction to the Special Theory of Relativity"), capitolul 8, Ediție broșată Co-Op, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1967.

---

[1] Pentru detalii suplimentare vezi J.L. Greenstein, *Radiosurse cvasistelare* (Quasistellar Radio Sources), Scientific American *209*: 54 (decembrie 1963).

[2] Traducerea fragmentului a fost luată din Principiile matematice ale filozofiei naturale, traducere de Victor Marian, text revizuit de Prof. V. Vîlcovici, Editura Academiei RPR, București, 1956.

Anexe

Următoarele cărţi de mecanică sînt de nivel aproximativ egal cu cel al textului prezentat; cititorul care studiază mecanica le poate folosi ca material de consultare sau aprofundare. Ar fi bine, însă, ca el să se uite la mai multe dintre aceste cărţi înainte de a cumpăra una dintre ele sau a-i dedica un timp mai îndelungat.

H. D. Young, *Fundamentele mecanicii şi căldurii* („Fundamentals of Mechanics and Heat"), Mc. Graw-Hill Book Company, New York 1964. Text bun. Întrucîtva mai puţin avansat. Tratare pe scurt a relativităţii restrînse.

R. Resnick şi D. Halliday, *Fizică pentru studenţii din domeniul ştiinţei şi ingineriei* („Physics for Students of Science and Engineering") John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966. Vol. I, ed. a doua, sau vol. I şi II împreună. Multe exemple. Bun text uzual.

R. Resnick şi D. Halliday, *Fizică*[1] („Fundamentals of Physics"), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1970. Versiune prescurtată a textului anterior.

A. P. French, *Mecanica newtoniană* („Newtonian Mechanics"), W. W. Norton and Company, Inc., New York, 1971. Parte din seria M.I.T. Foarte bună carte exhaustivă.

M. Alonso şi E. J. Finn, *Bazele fizicii pentru universitate* („Fundamental University Physics"), vol. I, Mecanica („Mechanics"), Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass, 1967. Carte bună, scurtă şi concisă, dar uneori prea rezumativă pentru nivelul ei.

R. T. Weidner şi R. L. Sells, *Fizică clasică elementară* („Elementary Classical Physics"), vol. I, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1965. Nu atît de avansată ca celelalte manuale.

R. P. Feynman, R. B. Leighton şi M. Sands, *Fizica Modernă*[2] („The Feynman Lectures on Physics"), vol. I, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1963. O serie de lecţii remarcabile care pătrund adînc în multe aspecte ale mecanicii. Nu e un manual.

În ultimii ani au apărut o serie de cărţi de probleme. Deşi în cărţile menţionate mai sus există multe probleme, pot exista studenţi care să dorească mai mult.

---

1) Apărută în limba română la Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975 (N.T.)
2) Apărută în limba română, la Editura tehnică, Bucureşti, 1971.

J. A. Taylor, *Îndrumător programat de studiu pentru fizica elementară* („Programmed Study Aid for Introductory Physics"), partea I, Mecanica (Mechanics), Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1970. Bună, cu multe probleme de nivel mai elementar.

R. B. Leighton și E. Vogt, *Exerciții de fizică generală* („Exercises in Introductory Physics"), Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1969. Scrisă pentru a însoți vol. I din lecțiile lui Feynman. Probleme excelente.

D. Schaum, *Fizica generală — teorie și probleme* („Theory and Problems of College Physics"), Schaum Publishing Co., New York, 1961. Multe probleme, aproape jumătate dintre ele rezolvate.

Lista de filme

Există multe filme excelente care tratează subiecte din mecanică. Scrisoarea Comisiei pentru resursele Fizicii Universitare, BSPF-1, Filme de fizică (Physics Films) de W. R. Riley, Am. J. Phys. *36*: 475 (1968) pune la dispoziţie o bună listă de filme de 16 mm şi, în plus, informaţii despre cataloage, locurile în care pot fi obţinute filmele etc. Multe dintre comentariile date mai jos sînt luate direct din acest articol de sinteză.

În ultimii ani au fost produse multe filme. Ele sînt foarte folositoare, în special în măsura în care servesc studiului individual. Comisia de Fizică Generală a publicat un catalog, *Filme scurte pentru învăţarea fizicii* („Short Films for Physics Teaching") care poate fi procurat de la Institutul American de Fizică (AIP), Direcţia pentru Educaţie şi Forţă de Muncă, Serviciul de Informaţii, Universitatea de Stat din New York; Stony Brook, N.Y., 11790.

Cititorul va reţine că multe dintre filmele indicate mai jos sînt filme PSSC şi că sînt, aşadar, la un nivel mai elementar decît cel al cursului de faţă. Totuşi, aceste filme sînt foarte bine concepute şi realizate şi ele pot fi utile chiar şi celor care le văd a doua oară.

Recent, a fost format un Comitet Naţional pentru Filme de Demonstrare a Fizicii [George Appleton, James Strickland, Am. J. Phys. 38: 1945 (1970)]; Strickland poate fi contactat la Centrul pentru Dezvoltarea Educaţiei Newton, Mass. 02160.

Filmele sînt înscrise la capitolul în care ele par a se potrivi cel mai bine. Locurile din care pot fi obţinute sînt notate la sfîrşit.

Capitolul 1

Evoluţia ideilor fizice („The Evolution of Physical Ideas"), 49 min., P.A.M. Dirac; SUNY. Interpretarea proprie dată de Dirac fizicii teoretice; sugerează că încercările fizicienilor de a îmbunătăţi teoriile existente implică o căutare a frumuseţii matematice.

Măsurarea distanţelor mari („Measuring Large Distances"), 29 min., F. Watson; PSSC MLA 0103. Arată cum pot fi determinate distanţele pînă la lună şi la stele aflate pînă la 500 ani-lumină, cu ajutorul triangulaţiei şi a măsurătorilor de paralaxă.

Schimbarea de scală („Change of Scale"), 23 min., R. W. Williams PSSC MLA 0106. Pentru orientarea în ideile de estimare şi schimbare a scalei. Prezintă exemple frumoase de scalare a forţelor şi vitezelor (proiectarea navelor).

Capitolul 2

Măsurarea („Measurement"), 21 min., William Siebert; MLA. Măsurarea vitezei unui glonţ de puşcă cu accentuarea legăturii dintre precizia obţinută şi judiciozitatea întrebărilor.

Simetria („Symmetry"), 10 min., P. Stapp, J. Bregman, R. Davisson, A. Holden, BTL. Prezentare interesantă și modernă a invarianței la reflexie, rotație și translație și a utilizării ei.

Mișcarea circulară uniformă („Uniform Circular Motion"), 8 min., MGH. Prezintă variațiile vectorului viteză, explicînd că mișcarea este accelerată chiar atunci cînd mărimea vitezei este constantă. Forța centripetă ilustrată prin cîteva desene animate.

Cinemateca vectorială („Vector Kinematics"), 16 min., Francis Friedman; PSSC MLA 0109. Un calculator trasează pe ecranul unui tub catodic vectorii viteză și accelerație corespunzători diferitelor tipuri de deplasări ale petei luminoase: circulară, oscilatorie armonică și cădere liberă.

Cinematica mișcării rectilinii („Straight Line Kinematics"), 34 min., E. M. Hafner; PSSC MLA. Graficele în raport cu timpul ale distanței, vitezei și accelerației sînt trasate prin folosirea unui echipament special într-un mobil de test; sînt analizate relațiile între aceste grafice.

Legătura matematicii cu fizica („The Relation of Mathematics to Physics"), 57 min., Richard Feynman; EDC. Fără o înțelegere adîncă a matematicii nu este posibilă o adevărată explicare a frumuseții legilor naturii.

Capitolul 3

Forță, masă și mișcare („Force, Mass and Motion"), 10 min., F. W. Sinden, Bell and EDC. Film animat de calculator care ilustrează mișcarea corpurilor masive sub acțiunea forței gravitaționale și a altor forțe. Se trasează orbitele și se pune în evidență conservarea impulsului.

Forțe („Forces"), 23 min., Jerrold Zacharias; PSSC MLA 0301. Discută forțele din natură, cu demonstrații experimentale. Este ilustrată experiența lui Cavendish. Se poate obține și o versiune de 8 minute a experienței lui Cavendish.

Electroni în cîmp magnetic uniform („Electrons in a Uniform Magnetic Field"), 11 min., Dorothy Montgomery; PSSC MLA 0412. Prezintă electronii în tubul Leybold pentru determinarea sarcinii specifice *e/m*.

Legea lui Coulomb („Coulomb's Law"), 30 min., Eric Rogers; PSSC MLA 0403. Ilustrează dependența forțelor electrice de sarcină și de distanță.

Constanta din forța lui Coulomb („Coulomb Force Constant"), 34 min., Eric Rogers; PSSC MLA 0405. Un aparat Millikan la scară mare este folosit pentru determinarea constantei de proporționalitate din legea lui Coulomb a forței dintre sarcinile electrice.

Masa electronului („Mass of the Electron"), 18 min. Eric Rogers; PSSC MLA 0413. Arată cum se pot face măsurători de masă prin observarea mișcării electronului.

Legea gravitației, un exemplu de lege fizică („The Law of Gravitation, an Example of Physical Law"), 55 min., Richard Feynman; EDC. Excelentă prezentare a descoperirii legii și a unora dintre consecințele sale.

Inerția („Inertia"), 26 min., E. M. Purcell; PSSC MLA 0302. Mișcarea unui puc de gheață carbonică de masă constantă în cîmp de forțe nul și în cîmp de forțe externe.

Masa inerțială („Inertial Mass"), 19 min., E. M. Purcell; PSSC MLA 0303. Mișcarea unor pucuri de gheață carbonică de mase diferite sub acțiunea unei forțe constante.

Căderea liberă și mișcarea proiectilelor („Free Fall and Projectile Motion"), 27 min., Nathaniel Frank; PSSC MLA 0304. Studiul căderii libere și a maselor inertă și gravitațională conduce la mișcarea proiectilelor.

Capitolul 4

Sisteme de referință („Frames of Reference"), 28 min., Patterson Hume and Donald Ivey; PSSC MLA 0307. Demonstrații excelente ale mișcării în sisteme de referință inerțiale și accelerate. Disponibil (EDC) și ca versiuni prescurtate asupra sistemelor liniar accelerate (6 min.) și sistemelor în rotație (7 min.).

Forțe de inerție—accelerație centripetă („Inertial Forces — Centripetal Acceleration"), 3 1/4 min., Franklin Miller Jr; OSU, bobină de 16 min. Prezintă călărirea unui rotor într-un parc de distracții.

Forțe de inerție — accelerație de translație („Inertial Forces — Translational Acceleration"), 2 min., Franklin Miller Jr.; OSU, bobină de 16 mm. Ilustrează forțele în mișcarea uniformă și uniform accelerată în sus și în jos.

Capitolul 5

Energia și lucrul mecanic („Energy and Work"), 28 min., Dorothy Montgomery; PSSC MLA 0311. Discută lucrul mecanic efectuat de către o forță constantă și de către una variabilă, precum și determinarea energiei produse de către acest lucru mecanic.

Ciocniri elastice și energie înmagazinată. („Elastic Collisions and Stored Energy"), 28 min., James Strickland; PSSC MLA 0318. Demonstrații cantitative ale transformărilor dintre energia cinetică și potențială în ciocnirile elastice.

Marile principii de conservare („The Great Conservation Principles"), 56 min., Richard Feynman; EDC. Discuție foarte interesantă a principiilor de conservare și a legăturii lor cu fizica.

Capitolul 6

Cîmpul turbionar („Vorticity"), 44 min. Ascher H. Shapiro; EBEC. Film interesant cu referiri la momentul cinetic (vezi și cap. 8).

Capitolul 7

Mișcarea periodică („Periodic Motion"), 33 min., Patterson Hume și Donald Ivey; PSSC MLA 0306. Film excelent despre mișcarea oscilatorie armonică; se folosesc pucuri fără frecare montate între resorturi elastice.

Mișcarea oscilatorie armonică („Simple Harmonic Motion"), 10 min., MGH. Mișcarea oscilatorie armonică este ilustrată cu ajutorul unui corp montat la capătul unui resort care se mișcă orizontal.

Ruperea podului de la Cheile Tacomei („Tacoma Narrows Bridge Collapse"), 4 min. 40 sec., OSU. Imagini spectaculoase ale vibrațiilor excitate de vînt care distrug podul intrat în rezonanță.

Pendulul Wilberforce („The Wilberforce Pendulum"), 5 min., Franklin Miller Jr.; OSU. Un caz interesant de rezonanță între vibrațiile de torsiune și de translație.

Capitolul 8

Momentul cinetic, o mărime vectorială („Angular Momentum, a Vector Quantity"), 27 min., Aaron Lemonick; ESI MLA 0451. Ilustrează faptul că momentele cinetice se adună vectorial și că aplicarea unui moment asupra unui sistem care are deja un moment cinetic, duce la precesia momentului cinetic.

Mișcarea în sistemul centrului de masă („Moving with the Center of Mass"), 26 min., Herman Branson; PSSC MLA 0320. Se ilustrează legea conservării energiei și impulsului, pentru cîteva mobile care interționează magnetic din două sisteme de referință distincte.

Capitolul 9

Orbite eliptice („Elliptic Orbits"), 19 min., Albert Baez; PSSC MLA 0310. Demonstrarea geometrică a primelor două legi ale lui Kepler precum și a faptului că forța de atracție gravitațională este invers proporțională cu pătratul distanței.

Măsurarea lui G — experiența lui Cavendish („Measurement of „G" — Cavendish Experiment"), 4 min. 25 sec., Franklin Miller, Jr.; OSU. Film scurt despre pendulul de torsiune al lui Cavendish.

Gravitația universală („Universal Gravitation"), 31 min., Patterson Hume și Donald Ivey; PSSC MLA 0309. Se deduce legea gravitației pentru planeta *X* din observații asupra planetei și sateliților.

Capitolul 10

Măsurarea vitezei luminii („Measurement of the Speed of Light"), 8 min., MGH. O foarte bună explicare a cîtorva metode terestre de măsurare a vitezei luminii, printre care metodele lui Fizeau, Foucault și Michelson.

Efectul Doppler („Doppler Efect"), 8 min., MGH. O aplicare clară a cazurilor sursei în mișcare și observatorului în mișcare.

Efectul Doppler și undele de șoc („Doppler Effect and Shock Waves"), 8 min., James Strickland; MLA 0464. Parte dintr-o serie de experiențe efectuate în cuva de studiat unde. Prezintă efectele produse de o sursă de unde periodice care se mișcă cu viteze diferite în raport cu mediul.

Viteza limită, o explorare cu electroni de energie înaltă („The Ultimate Speed, an Exploration with High-energy Electrons"), 38 min., William Bertozzi; ESI MLA 0452. Legătura dintre energia cinetică a electronilor și viteza lor; investigată prin metoda timpului de zbor și a tehnicilor calorimetrice.

Viteza luminii („Speed of light") 21 min., William Siebert; PSSC MLA. Determinarea vitezei luminii prin folosirea metodei timpului de zbor al unui puls luminos și cu ajutorul metodei oglinzii rotitoare.

Capitolul 11

Marea lume a lui Albert Einstein („The Large World of Albert Einstein"), 60 min., Edward Teller; SUNY. Extinderea relațiilor obișnuite timp-distanță la domeniul relativist. Discută influența relativității restrinse asupra fizicii.

Dilatarea timpului, o experiență cu mezoni μ („Time Dilation, an Experiment with Mu-Mesons"), 36 min., David Frish și James Smith; ESI MLA 0453. Se ilustrează dilatarea timpului, prin folosirea dezintegrării radioactive a mezonilor μ din razele cosmice într-o experiență care are loc la Muntele Washington, N.H. (1 475 m) și Cambridge, Mass. (nivelul mării). O expunere amănunțită a acestei experiențe a apărut în *Am. J. Phys.* *31* 342 (1963).

BELL (Sistemul Bell): legătura cu Compania de telefoane Bell (Bell Telephone Company).

(BTL) Biroul de afaceri Laboratoarele Bell (Bell Telephone Laboratories) (BTL), Filmoteca, Murray Hill, N.J. 17971.

BTL: vezi Bell.

EBEC: Corporația Educațională -Enciclopedia Britanica (Encyclopedia Britannica Educational Corporation), 425 North Michigan Avenue, Chicago, Ill. 60611.

EDC: Centrul de dezvoltare educațională (Education Development Center) (fost serviciile educaționale), Filmoteca Centrul de dezvoltare educațională, 39 Chapel Street, Newton, Mass 02160.

ESI MLA: ESI filme pentru Colegiul de fizică produse de serviciile educaționale. Procurabile de la Mijloace moderne de invățămint, 1212 Avenue of the Americas, N.Y. 10036.

MGH: Mc Grow – Hill Book Company. Redacția text film, 327 West 41 st Street, N.Y. 10036. Numai pentru vînzări.

MLA: vezi ESI MLA.

OSU: Universitatea de Stat din Ohio (Ohio State University). Supraveghetorul de distribuție a filmelor, Direcția de filme animate, 1885 Neil Avenue, Columbus Ohio 43210. Film continuu de 16 mm.

PSSC MLA: PSSC – Mijloace moderne de învățămint. Împrumuturile sint înmînate de serviciile de film modern vorbit. Pentru cumpărare, de luat legătura cu direcția MLA a serviciului de științe naturale, Inc. P.O. Box 302, Rochester, N.Y. 14603.

SUNY: Universitatea de stat din New York, Biroul de Comunicații educaționale, Room 2332, 60 East 42 nd Street, N.Y. 10017.

Tabel de valori

Valoarea și unitățile	Mărimea	Simbol sau abreviere	Relația de unde provine
Generale			
57,3° (57°18′)	= 1 radian	rad	180°/π
$3{,}44 \times 10^3$ minute (de arc)	= 1 radian	rad	
$2{,}06 \times 10^5$ secunde (de arc)	= 1 radian	rad	
$1{,}75 \times 10^{-2}$ rad	= 1 grad	°	π/180°
$2{,}91 \times 10^{-4}$ rad	= 1 minut (de arc)	′	
$4{,}85 \times 10^{-6}$ rad	= 1 secundă (de arc)	″	
$1{,}609 \times 10^3$ m	= 1 milă terestră		
10^{-10} m	≡ 1 angstrom	Å	
10^{-6} m	≡ 1 micrometru (micron)	μm	
$2{,}998 \times 10^2$ V	= 1 statvolt		$10^{-6}\,c$
$2{,}99725 \times 10^8$ m/s	Viteza luminii în vid	c	
≈ 9,80 m/s²	Accelerația gravitației la suprafața pămîntului	g	GM_p/R_p^2
$6{,}671 \times 10^{-11}$ Nm²/kg²	Constanta gravitației	G	
$6{,}671 \times 10^{-8}$ dyn cm²/g²	Constanta gravitației	G	
1 dynă	≡ 1 g · cm/s²	dyn	
1 newton	≡ 1 kg · m/s²	N	
Astronomice			
$3{,}084 \times 10^{16}$ m	= 1 parsec		
$9{,}464 \times 10^{15}$ m	= 1 an lumină		$c \times$ s/an
$1{,}49 \times 10^{11}$ m	= 1 unitate astronomică (≡ raza orbitei Pămîntului)	UA	
≈ 10^{80}	Numărul de nucleoni	Universul cunoscut	
≈ 10^{26} m	Raza	Universul cunoscut	
≈ 10^{11}	Numărul de galaxii	Universul cunoscut	
≈ $1{,}6 \times 10^{-18}$ (m/s)/m	Viteza de îndepărtare a nebuloaselor	Universul cunoscut	
≈ $1{,}6 \times 10^{11}$	Numărul stelelor	Galaxia	
≈ 10^{21} m	Diametrul	Galaxia	
≈ 8×10^{41} kg	Masa	Galaxia	

Valoarea şi unităţile	Mărimea	Simbol sau abreviere	Relaţia de unde provine
$6{,}96 \times 10^{8}$ m	Raza	Soarele	
$2{,}14 \times 10^{6}$ s	Perioada de rotaţie		
$1{,}99 \times 10^{30}$ kg	Masa		
$1{,}49 \times 10^{11}$ m	Raza orbitei	Pămîntul	
$6{,}37 \times 10^{6}$ m	Raza medie		
$5{,}98 \times 10^{24}$ kg	Masa		
$5{,}52 \times 10^{3}$ kg/m^3	Densitatea medie		
$3{,}156 \times 10^{7}$ s	= 1 an (perioada de revoluţie)		
$8{,}64 \times 10^{4}$ s	= 24 ore (perioada de rotaţie)		
$3{,}84 \times 10^{8}$ m	Raza orbitei	Luna	
$1{,}74 \times 10^{6}$	Raza		
$7{,}34 \times 10^{22}$ kg	Masa		
$2{,}36 \times 10^{6}$ s	Perioada de revoluţie		
Gaze			
$22{,}4$ m^3/kmol	Volumul molar la parametri standard (PS)	V_0	
$2{,}69 \times 10^{25}$ m^{-3}	Numărul lui Loschmidt	n_0	N_0/V_0
$6{,}0222 \times 10^{26}$ kmol^{-1}	Numărul lui Avogadro	N_0	
$8{,}314 \times 10^{3}$ J · kmol^{-1} · K^{-1}	Constanta gazelor	R	
$1{,}381 \times 10^{-23}$ J/K	Constanta lui Boltzmann	k	R/N
$1{,}01 \times 10^{5}$ N/m^2	Presiunea atmosferică		
10^{-7} m	Drumul liber mediu la PS		
$3{,}32 \times 10^{2}$ m/s	Viteza sunetului în aer la PS		
Atomice			
$6{,}6262 \times 10^{-34}$ J · s	Constanta lui Planck	$\hbar$	
$1{,}0546 \times 10^{-34}$ J · s	Constanta lui Planck/2π	$\hbar$	$h/2\pi$
13,6 electroni volţi	Energia asociată cu un Rydberg	Ry	
$1{,}6022 \times 10^{-19}$ J	Energia asociată cu un electron-volt	eV	
$1{,}2398 \times 10^{-6}$ m	Lungimea de undă asociată cu un electron-volt		hc/e
$2{,}4180 \times 10^{14}$ s^{-1}	Frecvenţa asociată cu un electron-volt		
$0{,}5202 \times 10^{-10}$ m	Raza Bohr pentru starea fundamentală a hidrogenului		$\hbar^2/me^2$

Valoarea și unitățile	Mărimea	Simbol sau abreviere	Relația de unde provine
$\approx 10^{-10}$ m	Raza unui atom		
$0{,}9274 \times 10^{-23}$ J/T	Magnetonul Bohr	μ_B	$e\hbar/2m$
137,036	Inversul constantei structurii fine	α^{-1}	$(\hbar c/e^2)\, 4\pi\varepsilon_0$
Particule			
$1{,}67265 \times 10^{-27}$ kg	Masa de repaus a protonului	M_p	
$1{,}67496 \times 10^{-27}$ kg	Masa de repaus a neutronului	M_n	
$1{,}66057 \times 10^{-27}$ kg	1 unitate atomică de masă unificată ($\equiv 1/12$ masa lui ^{12}C)	u	
$0{,}910954 \times 10^{-30}$ kg	Masa de repaus a electronului	m	
$0{,}93828$ 10^{9} eV	Energia echivalentă cu masa de repaus a protonului	E_p	$M_p c^2$
$0{,}511004 \times 10^{6}$ eV	Energia echivalentă cu masa de repaus a electronului		mc^2
$0{,}93150 \times 10^{9}$ eV	Energia echivalentă cu o unitate atomică de masă		
1836	Masa protonului/masa electronului		M_p/m
$2{,}818 \times 10^{-15}$ m	Raza clasică a electronului	r_0	$e^2/4\pi\varepsilon_0 mc^2$
$4{,}80325 \times 10^{-10}$ ues	Sarcina protonului	e	
$1{,}60219 \times 10^{-19}$ C	Sarcina protonului	e	
$2{,}423 \times 10^{-12}$ m	Lungimea de undă Compton	λ_C	h/mc

Index

Plan editură: 6542. Coli de tipar: 28
Bun de tipar: 21. 07. 1981

Tiparul executat sub comanda
nr. 1189 la
Intreprinderea poligrafică
„13 Decembrie 1918“,
str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97
București,
Republica Socialistă România

IP „13 DECEMBRIE 1918“

Lei 21,30

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ - BUCUREŞTI

